А.Н.Парфенов

# О доказательстве Гёделя

Цитирование важных для понимания моментов логики построения доказательства «Теоремы Геделя о неполноте» представлено по книге:
**Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя : Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.**
Цитаты выделены синим цветом.

*Далее собственно мои не слишком глубокомысленные рассуждения на данную тему.*
*Цитата со стр. 97 :*

«Гёдель далее показал, что некоторый частный случай этой формулы (имеется в виду частный случай формулы «$\forall x \sim Dem\,(x, z)$») является формально недоказуемым. Чтобы получить формулу, мы будем исходить из следующей формулы:

$\forall\, x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$ (1) » (1)

*Собственно говоря, с данного момента, как мне кажется, в логической структуре построения доказательства и начинаются некоторые неувязочки. Присмотримся повнимательнее к отправной точке, «формуле»*

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

*и попробуем разобраться «что» здесь есть «что».*

*Формула*

$Dem(x, z)$

*означает: последовательность формул с Гёделевским номером (G№), равным x, является доказательством формулы с G№, равным z. Или равнозначно: Гёделевские номера (G№) x и z находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem. (Dem, таким образом является арифметическим соотношением* <u>*натуральных чисел*</u>*, являющихся к тому же* <u>*Гёделевскими номерами*</u> *(G№). И это важно.)*

*Формула*

$\sim Dem(x, z)$

*означает: последовательность формул с Гёделевским номером (G№), равным x, не является доказательством формулы с G№, равным z. Или равнозначно: Гёделевские номера (G№) x и z не находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem.*

*Формула*

$\forall x \sim Dem\ (x, z)$

*означает: для всех (для любого) x, являющихся G№, последовательность формул с Гёделевским номером, равным x (G№=x), не является доказательством формулы с Гёделевским номером, равным z (G№=z). Или равнозначно: ни какое, являющееся Гёделевским номером, число x (G№=x), не находится в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem, с натуральным числом - Гёделевским номером, равным z (G№=z). Т.е., иначе говоря, формула с G№= z недоказуема (не выводима).*

*Запись (выражение)*

$sub(y, 13, y)$

*обозначает* «арифметическую формулу *(функцию f(y), содержащую единственную переменную – целочисленный аргумент y ),* выражающую внутри арифметического исчисления метаматематическую характеристику: «гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер у, подстановкой вместо входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13, цифры, обозначающей число „у“»*» (1) (стр. 91). Я бы сказал: « подстановкой вместо буквенного обозначения входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т.е. переменной «y»), её целочисленного значения, являющегося, к тому же G№».*

<u>*Важно:*</u> *запись «sub(y, 13, y)» до подстановки конкретного значения переменной(аргумента) «y» – это функция, а отнюдь не натуральное число.*

*Запись (выражение)*

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

*означает: ни какой Гёделевский номер x (G№= x) не находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem, с… Чем???....... с функцией f(y)= sub(y, 13, y)?*

*Но ведь до подстановки численного значения переменной «y» эта запись - логическая бессмыслица. Арифметическое соотношение Dem, это соотношение между двумя натуральными числами, являющимися к тому же G№, а не между натуральным числом x, являющимся к тому же G№, и функцией f(y). И такая запись формулой не является и G№ не имеет.*

*Выражение*

*∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))*

*можно попытаться прочитать и несколько иным способом:*

*Никакое, являющееся G№, натуральное число x, не находится в арифметическом соотношение Dem с являющимся G№ натуральным числом, которое может быть получено (вычислено) исходя из некоторого неопределенного (пока) значения переменной «y» при помощи процедуры (функции, алгоритма) sub(y, 13, y). И это именно «выражение», а не формула. «*Заметим, наконец, что выражение «sub(*y*, 13, *y*)» не является *формулой* нашей арифметической системы в том смысле, в каком, например являются формулами выражения «∃ *x* (*x* = s*y*)» или «Dem(*x*, *z*)», и вот почему. Выражение «0 = 0» мы называем формулой; такая запись *утверждает* наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение. Аналогично, когда вместо переменных, входящих в выражение «Dem(*x*, *z*)», подставляются некоторые цифры, то получающееся выражение оказывается записью некоторого утверждения (о том, что два числа находятся в некотором отношении), о котором опять-таки имеет смысл ставить вопрос, истинно оно или ложно.. То же самое можно сказать и о выражении «∃ *x (x* = s*y*)»» (1) (стр. 93-94). *То есть, до подстановки целочисленного значения переменной «y» запись «sub(y, 13, y)» не является ни формулой имеющей G№ (значение которого можно было бы рассматривать как значение числа «z») , ни натуральным числом. Соответственно и запись*

*∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))*

*становится формулой, об истинности которой можно говорить (т.е. она становится не только записью, но и формулой – утверждением, либо истинным, либо ложным), лишь после того, как функция f(y)= sub(y, 13, y) принимает некоторое вполне определенное значение, что в свою очередь происходит только при установлении конкретного, определенного значения аргумента «y».*

*И еще раз:* ***важно****, что* ***вычисление значения функции z=f(y)=sub(y, 13, y), а соответственно и определение и подстановка значения переменной «y» в выражение sub(y, 13, y) должно предшествовать превращению записи (выражения) ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)) в формулу****, кодирующую вполне определенное метаматематическое утверждение, и возникновению у нее G№.*

*Повторюсь, запись*

*∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))*

*до подстановки определенного, конкретного значения переменной «y», формулой не является. И до этого момента G№ не имеет.*

*Цитата со стр. 97:*

«$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$ (1)

Эта формула, принадлежащая формальному арифметическому исчислению, представляет некоторое метаматематическое высказывание. Какое же именно? Читатель должен помнить, что выражение «$\mathrm{sub}(y, 13, y)$» обозначает некоторое число, которое есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер *y*, подстановкой вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13, (т. е. переменной *y*) цифры, обозначающей число *y*. Отсюда видно, что формула (1) представляет метаматематическое высказывание: «формула, имеющая в качестве гёделевского номера число $sub(y, 13, y)$, недоказуема».»

Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число *n*. Подставим в (1) вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо переменной «*y*»), цифру, обозначающую это число *n*. В результате подстановки мы получим некоторую формулу, которую назовем (в честь Гёделя) «*G*»:

$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$. (*G*)» (1).

*И вот неувязка в логической структуре построения доказательства проступила яснее:*

«$sub(y, 13, y)$» *это не* «число», *а* «*функция*»*, по крайней мере до момента подстановки в неё конкретного значения переменной «y». Запись (выражение)* «$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$» *до момента подстановки определенного, конкретного целочисленного значения переменной «y», формулой не является, и G№ не имеет. В логическом же построении доказательства сделано ложное предположение (допущение, утверждение), что запись: «* $\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$*» - есть формула, и эта «*формула (1)… имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число *n*.» (1) (стр. 97-98).

*То есть нам предложено подставить в качестве значения переменной «y» то значение, которое может быть определено лишь после подстановки этого же самого значения. И мы здесь имеем вполне определенно самореферентное, непредикативное определение значения переменно «y». Никакое число «n» до подстановки значения переменной «y» не является G№ записи* $\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$*. И его нельзя подставить в формулу (1) в качестве значения аргумента «y», ибо нельзя подставить, то, чего еще нет, то, что еще не определено. Невозможно выполнить действие подстановки «в долг». А, следовательно, все дальнейшие, приведенные в построении доказательства рассуждения теряют смысл. G – формулу, тем способом, который предложен автором, построить невозможно, поскольку отправная запись (в соответствии с принятым определением формулы) формулой не является и G№ не имеет.*

*По сути до подстановки определенного, конкретного значения переменной «y», выражение:*

*$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$*

***<u>лишь шутки ради</u>*** *может интерпретировано как:*

*<u>«Утверждение: «Некое, не имеющее G№, утверждение, недоказуемо», не имеет G№».</u>*

*И только в этом смысле запись*

*$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$*

*может рассматриваться, как утверждение, говорящее (возможно?) о себе самом (как «не имеющее» <u>G№</u> о «не имеющем» <u>G№</u>), как утверждение о собственной недоказуемости. Хотя и это недоказуемо. (И это, только шутка на вполне серьезную тему, не содержащая в данном случае даже «доли истины»).*

*Порядок действий, превращающий запись*

*$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$*

*в формулу, имеющую вычислимый G№, возможен лишь один:*

1. *Установление целочисленного значения переменной «y», являющегося к тому же G№;*

2. *Определение значения функции $z=f(y)=sub(y, 13, y)$;*

3. *Подстановка числа z, являющегося при этом G№, на место функции $sub(y, 13, y)$ в запись $\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$, с превращением последней в формулу $\forall x \sim Dem(x,z)$, имеющую вычислимый G№=n. В формулу, кодирующую (ложное или истинное) метаматематическое утверждение о доказуемости формулы с G№= $sub(y, 13, y)$. При этом подстановка конкретного значения переменной «y» устанавливает статус истинности этого утверждения.*

*И так, повторим еще раз, никакое число «n» до подстановки значения переменной «y» не является G№ записи $\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$. И его нельзя подставить в «формулу» (1) в качестве значения аргумента «y». При подстановке же в «формулу» (1) в качестве значения аргумента «y» любого <u>иного</u> натурального числа, являющегося при этом G№, мы получим утверждение об истинности (доказуемости) некоего утверждения, но только не утверждение, утверждающее собственную недоказуемость.*

*Например:*

*при простановке в место переменной у числа 243 000 000 (G№ формулы «0=0»), (учитывая что, формула «0=0» переменной «у» не содержит, и что подстановка числа 243 000 000 вместо переменной «у» будет чисто формальной, я бы употребил даже термин – фиктивной), мы получим G№= sub(y, 13, y)= 243 000 000, и соответственно ложное метаматематическое утверждение, о том что формула «0=0» не выводима (недоказуема);*

*при простановке в место переменной «у» числа, равного G№ формулы «~ (0=0»), мы получим формулу, кодирующую истинное метаматематическое утверждение, о том что формула «~ (0=0)» не выводима (недоказуема).*

***Выводы:***

1. *Запись sub(y, 13, y) до момента подстановки в неё конкретного значения переменной «у» - это функция, а отнюдь не формула и не натуральное число, являющееся G№.*

2. *Dem(x, sub(y, 13, y)) - запись, до подстановки значения переменной «у», формулой не являющаяся и G№ не имеющая.*

3. *∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)) - запись, до подстановки значения переменной «у», формулой не являющаяся и G№ не имеющая.*

4. *Никакое число «n» до подстановки конкретного значения переменной «у» не является G№ записи ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)). А, следовательно, все дальнейшие, приведенные в построении доказательства рассуждения теряют смысл. G – формулу, тем способом, который предложен автором, построить невозможно, поскольку отправная запись (в соответствии с принятым определением формулы) формулой не является и G№ не имеет.*

*Как мы видим, способом, предложенным Геделем, G-формулу построить невозможно и «Теорема о неполноте» при помощи данного построения не может быть доказана. Но это не отрицает принципиальной возможности построения G-формулы неким иным способом. Зададимся вопросом: «Что будет, если кому-то такое построение все же удастся ?» Чтобы оценить последствия обратим наше внимание собственно на семантику G-высказываний Гёделя.*

*Завораживающие, почти магические манипуляции Гёделя с нумерацией утверждений и формированием G-высказываний через систему нумерации, на столько смещают центр внимания при изложении доказательства Малой и Большой теорем о неполноте, что оказывается что нужна почти вечность (по крайней мере для меня) чтобы осознать в общем то простую вещь: G-высказывание всего лишь высказывание, семантически тождественное утверждению «данное утверждение ложное» (парадоксу лжеца). А следовательно, построено по принципу самореферентности и грубо нарушает мои интуитивные представления о мета высказываниях ( «базовое высказывание, в* *отношении которого мы строим мета высказывания, должно существовать: а) до возникновения, формирования, формулирования любого из мета высказываний о нем, и б) независимо от любого из мета высказываний о нем»).*

*Соответственно, любое G-высказывание, - это высказывание, семантически и логически не связанное с остальными высказываниями в системе (оно говорит только о себе самом; истинность, как и ложность его никак не влияет на установление статуса истинности = доказательстве иных высказываний в рамках данной логической системы). Можно сказать – «любое G-высказывание семантически ничтожное». Обособление и удаление G-высказываний из логической системы, интуитивно, не должно обеднять или искажать информационное и семантическое содержание логической системы. Т.е., опять же интуитивно, мы имеем полное право «конвенционально» запретить, сделать невозможными, недопустимыми G-высказывания, сохраняя при этом семантическую полноту системы…*

*Кроме того, смущают рассуждения о «правдивости G-высказываний». Нам подспудно, не определяя термина,   пытаются «продать» на ряду с понятием «истинности как выводимости» некое иное понятие «првдивости», не совпадающее с ним, и, в тоже время, имеющее нечто общее. Такое действие является замаскированным покушением на* ***логический Закон фундировония****, и его всеобщность. Выстраивая формально-логическую систему мы пытаемся, в той или иной мере последовательно, полно и строго (= формализовано), отобразить нашу неформальную, только нам одним внутренне понятную, систему построения логических заключений. Если же мы допускаем параллельное существование несовпадающих понятий:  «истинно» и «правдиво», мы негласно признаем ущербность, ограниченность выстраиваемый формально-логической системы, не вмещающей в себя наше не формализуемое, «трансцедентальное» представление о «правдивости» высказываний, которое оказывается недоступным формализации и включению (имплементации) в выстраиваемую систему.*

*При «конвенционном» запрещении использования G-высказываний (если вдруг появился бы некий действительно работающий способ построения G-высказываний, отличный от предложенного Геделем, и у нас действительно возникла возможность, отсутствующая на данный момент, их построить), мы получили бы формально-логическую систему, семантически столь же полную, как и исходная система, допускающая G-высказывания. Но при этом систему, в которой доказательство Гёделя становится вновь неработающим в виду отсутствия основного инструмента доказательства - G-высказываний…*

*И, вуаля,   мы получаем старый вопрос на новый лад:*

*«Можно ли доказать непротиворечивость логической системы включающей арифметику (теорию чисел) и не содержащей G-высказываний, в силу подпадания их под «конвенцию» о запрете, логическими средствами (в рамках) самой системы?*

*Или доказать, что это невозможно…?»*

Литература:

1. Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя  : Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.