

# Еще одно доказательство теоремы Морлея

Афанасьев А. Н.

26 января 2023 г.

## Аннотация

В статье приводится доказательство Теоремы Морлея, основанное на свойствах ориентированных углов.

Теорема Морлея является одной из красивейших теорем геометрии, привлекающих интерес любителей математики начиная со школьников и заканчивая известными математиками. О теореме можно прочитать в известной любителям геометрии книге [1]. Многие проводили часы, дни и даже месяцы в поисках своего доказательства этой теоремы. Некоторые из этих доказательств можно найти в сайте <http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/>. Так же стоит отметить статьи из отечественных журналов [2], [3].

В настоящей статье приводится еще одно доказательство этой теоремы. Важное место в доказательстве занимает понятие ориентированного угла. Об ориентированных углах можно прочитать в [4].

**Теорема 1** Пусть точки  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  внутри треугольника  $ABC$  таковы, что

$$\begin{aligned}\angle B_0AC &= \angle C_0AB_0 = \angle BAC_0 = \frac{1}{3}\angle A, \\ \angle C_0BA &= \angle A_0BC_0 = \angle CBA_0 = \frac{1}{3}\angle B, \\ \angle A_0CB &= \angle B_0CA_0 = \angle ACB_0 = \frac{1}{3}\angle C.\end{aligned}$$

Тогда, треугольник  $A_0B_0C_0$  — равносторонний.

**Доказательство.** Пусть  $\frac{1}{3}\angle A = \alpha$ ,  $\frac{1}{3}\angle B = \beta$  и  $\frac{1}{3}\angle C = \gamma$ . Тогда  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ .

Далее, пусть точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  — точки пересечения прямых, выходящих из вершин данного треугольника и делящих углы при этих вершинах на три равные части, с прямыми  $A_0B_0$ ,  $A_0C_0$  и  $C_0B_0$ , как показано на рисунке 1, и пусть

$$\begin{aligned}\angle BA_1B_2 &= \alpha_1, \quad \angle C_1A_2C = \alpha_2, \\ \angle CB_1C_2 &= \beta_1, \quad \angle A_1B_2A = \beta_2, \\ \angle AC_1A_2 &= \gamma_1, \quad \angle B_1C_2B = \gamma_2.\end{aligned}$$

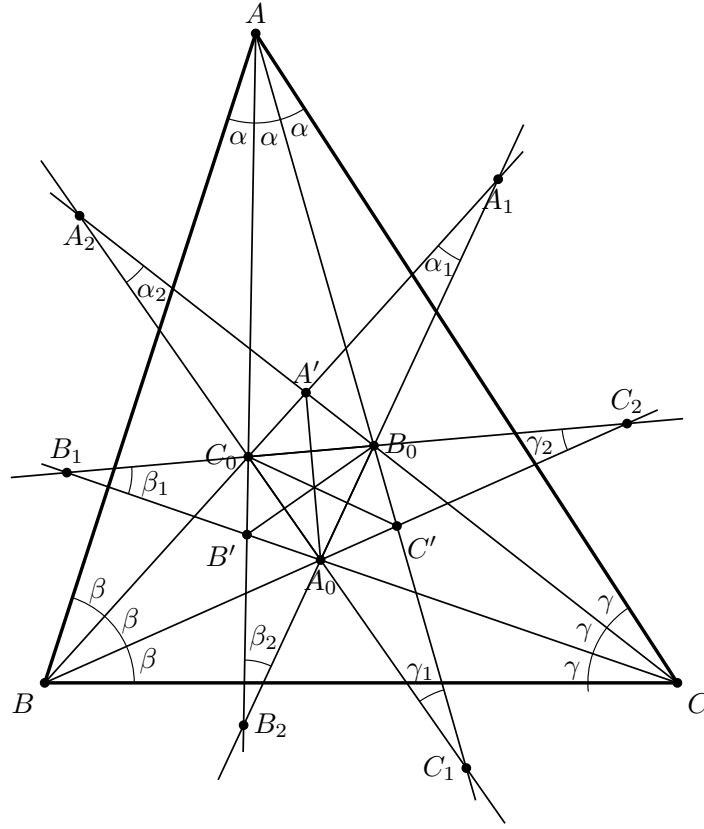


Рис. 1

Так как у треугольников  $ABC_0$  и  $A_1B_2C_0$  общий внешний угол при вершине  $C_0$ , то

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha + \beta. \quad (1)$$

Аналогично:

$$\beta_1 + \gamma_2 = \beta + \gamma \quad (2)$$

$$\alpha_2 + \gamma_1 = \alpha + \gamma. \quad (3)$$

Пусть  $A'$  — точка пересечения прямых  $BA_1$  и  $CA_2$ ,  $B'$  — точка пересечения прямых  $AB_2$  и  $CB_1$ ,  $C'$  — точка пересечения прямых  $AC_1$  и  $BC_2$ .

Так как  $A_0$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $BA'C$ , то

$$\angle BA'A_0 = \angle A_0A'C = 90^\circ - \beta - \gamma. \quad (4)$$

Аналогично:

$$\angle B_0B'C_0 = \angle A_0B'B_0 = 90^\circ - \alpha - \gamma \quad (5)$$

$$\angle B_0C'C_0 = \angle C_0C'A_0 = 90^\circ - \alpha - \beta. \quad (6)$$

Найдем угол между прямыми  $A_0A'$  и  $B_0B'$ :

$$\begin{aligned}\angle(A_0A', B_0B') &= \angle(A_0A', CA_2) + \angle(CA_2, CB_1) + \angle(CB_1, B_0B') = \\ &= (90^\circ - \beta - \gamma) + \gamma + (90^\circ - \alpha - \gamma) = \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \quad (7)\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}\angle(C_0C', A_0A') &= \angle(C_0C', AC_1) + \angle(AC_1, CA_2) + \angle(CA_2, A_0A') = \\ &= -(90^\circ - \beta - \alpha) + (\alpha + \gamma) - (90^\circ - \beta - \gamma) = \\ &= -180^\circ + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = -180^\circ + 120^\circ + 180^\circ = 120^\circ \quad (8)\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}\angle(B_0B', C_0C') &= \angle(B_0B', A_0A') + \angle(A_0A', C_0C') = \\ &= 180^\circ - 120^\circ + 180^\circ - 120^\circ = 120^\circ. \quad (9)\end{aligned}$$

Далее выразим углы  $\angle C'C_0B_0$  и  $\angle C_0B_0B'$ :

$$\begin{aligned}\angle C'C_0B_0 &= \angle(C_0C', B_1C_2) = \\ &= \angle(C_0C', BC_2) + \angle(BC_2, CB_1) + \angle(CB_1, B_1C_2) = \\ &= (90^\circ - \alpha - \beta) - (\beta + \gamma) + \beta_1 = \\ &= 90^\circ - \alpha - 2\beta - \gamma + \beta_1 = 30^\circ - \beta + \beta_1, \quad (10)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\angle C_0B_0B' &= \angle(B_1C_2, B_0B') = \\ &= \angle(B_1C_2, CB_1) + \angle(CB_1, B_0B') = \\ &= -\beta_1 + (90^\circ - \alpha - \gamma) = 30^\circ - \beta + \beta_1. \quad (11)\end{aligned}$$

Из (10) и (11) следует, что  $\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B'$ . Следовательно,

$$\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B' = 30^\circ. \quad (12)$$

Аналогично докажем, что

$$\angle B'B_0A_0 = \angle B_0A_0A' = 30^\circ \quad (13)$$

и

$$\angle A'A_0C_0 = \angle A_0C_0C' = 30^\circ. \quad (14)$$

Из (12), (13) и (14), учитывая (7), (8) и (9) следует, что

$$\angle B_0A_0C_0 = \angle C_0B_0A_0 = \angle A_0C_0B_0 = 60^\circ. \quad (15)$$

## Список литературы

- [1] Грейтцер С. Л. Коксетер Г. С. М. *Новые встречи с геометрией*. Наука, 1978.
- [2] Яглом И. Тоноян Г. Теорема Морлея. *Квант*, (8), 1978.
- [3] Л. Штейнгарц. Снова о теореме Морлея. *Квант*, (5), 2009.
- [4] Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. The Mathematical Association of America, 2016.

Афанасьев Александр Николаевич,  
доцент кафедры теории и методики обучения математике и информатике

Института математики и информатики  
Северо-Восточного Федерального Университета  
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,  
кандидат педагогических наук.  
E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru