Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции
A proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

© Н. М. Мусин

28.01.2023

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что оно имеет единственное решение при $t = t_0$.

Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана; дзета-функция; нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t.

Considering one of that two equations one can found that it has a unique solution at $t = t_0$.

As nontrivial zeros are symmetric about the line $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis; zeta function; nontrivial zeros.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.
$\mathbb{N}_0$ - множество неотрицательных целых чисел.

Известно [1], что при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = -s \int\limits_1^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2} + \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}.$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.

Так как

$$\frac{s}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{2} \frac{1}{-sx^s} \Bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{2x^s} \Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

то получаем

$$\zeta(s) = -s \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} + 1. \tag{1}$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x) \right), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$
\begin{aligned}
u_1(\sigma, t) &= \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\
v_1(\sigma, t) &= \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\
u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, \\
v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$
\begin{cases}
u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\
v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t).
\end{cases} \tag{4}
$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$
\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.
$$

□

Следствие. *Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\dfrac{t_0}{1 + t_0^2}, \dfrac{1}{t_0}\right)$.*

Определение 1. *Прямоугольник $\left\{(\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0; 1), w \in U\right\}$ будем называть критическим прямоугольником.*

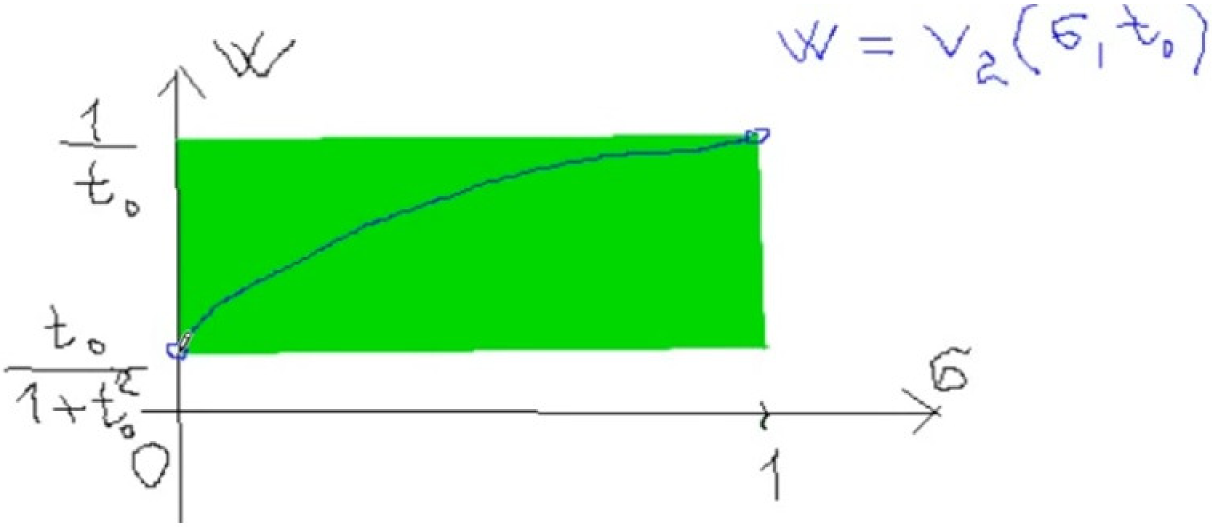


Рис. 1: Критический прямоугольник

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2. *Функция $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ убывает по σ на интервале (0; 1).*

Доказательство. Справедливость леммы следует из равенства

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}. \tag{5}$$

□

Отсюда следует, что графики функций $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$ пересекаюся, причём в точке с абсциссой $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

Далее исследуем вопрос о том, как пересекаются графики функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

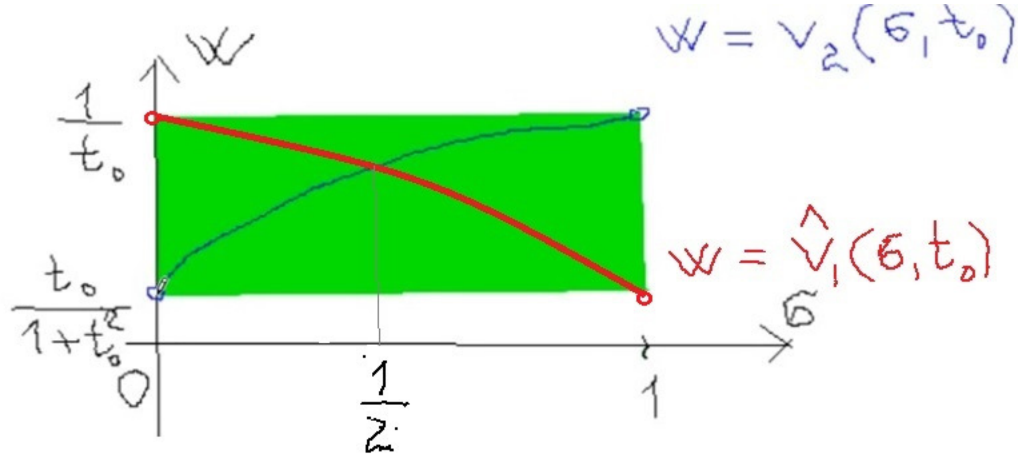


Рис. 2: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

Рассмотрим дробь $k(\sigma) = \dfrac{v_1(\sigma, t_0)}{\hat{v}_1(\sigma, t_0)}$. Согласно следствию из леммы 1 имеет место двойное неравенство $\dfrac{t_0}{1+t_0^2} < v_2(\sigma, t_0) < \dfrac{1}{t_0}$.

Из леммы 2 следует аналогичное неравенство $\dfrac{t_0}{1+t_0^2} < \hat{v}_1(\sigma, t_0) < \dfrac{1}{t_0}$. Из этих неравенств следует оценка $\dfrac{t_0^2}{1+t_0^2} < k(\sigma) < \dfrac{1+t_0^2}{t_0^2}$.

Так как $v_1(\sigma, t_0) = k(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0)$, получаем такое двойное неравенство: $\dfrac{t_0^2}{1+t_0^2}\hat{v}_1(\sigma, t_0) < v_1(\sigma, t_0) < \dfrac{1+t_0^2}{t_0^2}\hat{v}_1(\sigma, t_0)$.

С учётом равенства (5) получаем $\dfrac{t_0^2}{1+t_0^2} \cdot \dfrac{t_0}{\sigma^2+t_0^2} < v_1(\sigma, t_0) < \dfrac{1+t_0^2}{t_0^2} \cdot \dfrac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}$.

Из полученных неравенств следует, что все значения функции $w = v_1(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\dfrac{t_0}{1+t_0^2}, \dfrac{1}{t_0}\right)$.

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.*

Доказательство. Как уже было замечено ранее, из лемм 1 и 2 следует, что графики функций

$$w = v_2(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma-1)^2 + t_0^2} \text{ и } w = \hat{v}_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$$

пересекаются в единственной точке с абсциссой $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

Графики этих функций на плоскости (σ, w) симметричны относительно прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$, так как имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma - 1)^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(1 - \sigma, t_0). \tag{6}$$

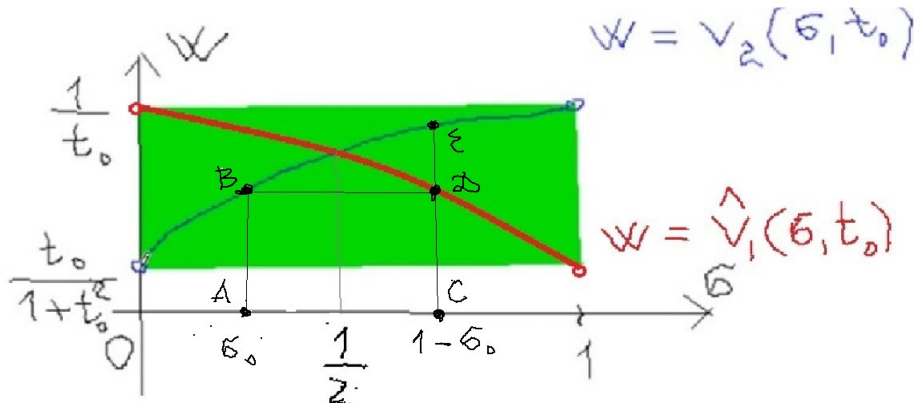


Рис. 3: Графики $\hat{v}_1$ и v_2

Допустим, что $\sigma_0 < \dfrac{1}{2}$.

Имеет место равенство $v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0) = \dfrac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2}$.

Из равенства (6) следует, что $\hat{v}_1(1 - \sigma_0, t_0) = \dfrac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2} = v_1(\sigma_0, t_0)$.

Как известно, в комплексной плоскости (σ, t), если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$, то есть $v_1(1 - \sigma_0, t_0) = v_2(1 - \sigma_0, t_0)$.

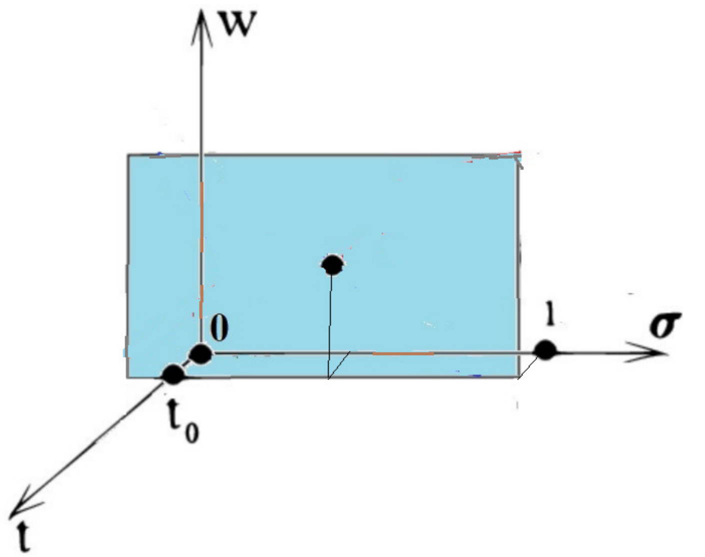
Но ведь $v_2(1 - \sigma_0, t_0) = \dfrac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$.

Получается, что однозначная функция $v_1(\sigma, t_0)$ в точке $1 - \sigma_0$ принимает два разных значения: $\dfrac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2} < \dfrac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$. Противоречие.

Противоречие получается и в случае $\sigma_0 > \dfrac{1}{2}$.

Остаётся единственный вариант: $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

$\square$



Гипотеза Римана доказана.

Следствие. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}.$

Список литературы

[1] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.

[2] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.