УДК 517.53, 517.54

ОДИН МЕТОД ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОДЧИНЁННЫХ ФУНКЦИЙ.

Ступин Д. Л.
Тверь

Излагается метод оценки модуля тейлоровского коэффициента с любым номером n на классах подчинённых функций. Обсуждается применение этого метода на классе ограниченных не обращающихся в нуль на единичном круге функций.

A method of estimation of the modulus of the Taylor coefficient with any number n on classes of subordinate functions is presented. We discuss the application of this method to the class of bounded nonvanishing in the unit disc functions.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов, подчинённые функции, система Вандермонда.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, Taylor coefficient modulus estimates, subordinate functions, Vandermonde system.

1. Метод подчинения

Открытый единичный круг, то есть множество $\{z : |z| < 1, \ z \in \mathbb{C}\}$ будем обозначать символом Δ, а замкнутый единичный круг символом $\bar{\Delta}$.

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Через Ω_0 обозначим класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ. Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме

$$f(z) = F(\omega(z)), \tag{1}$$

где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для функции $f(z)$ в Δ.

Возьмём некоторую произвольную голоморфную в Δ функцию F. Класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, $\omega \in \Omega_0$ обозначим через M_F. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Действительно, из формулы (1) получаем, что если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n. \tag{2}$$

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [1], термин был введён Д. И. Литтльвудом [2] и В. Рогозинским [3], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые интересные результаты.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчинённых функции $F(z)$. Известно, что

$$\{f\}_0 = \{F\}_0, \quad |\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|, \quad |\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|);$$

все оценки точные [3] и равенство достигается только на вращениях F в плоскости переменной z.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

2. Постановка и сведение задачи к системе линейных уравнений

Постановка этой задачи мотивируется формулой (2). Однако здесь мы временно абстрагируемся от смысла, стоящего за этой формулой. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.

Положим нам известно, что существуют такие числа $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, что

$$|a_1\{\omega\}_n x + a_2\{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + a_n\{\omega^n\}_n x^n| \leqslant 1, \qquad \omega \in \Omega_0, \quad x \in \bar{\Delta}, \tag{3}$$

и нам необходимо при помощи неравенства (3) оценить выражение

$$|b_1\{\omega\}_n + b_2\{\omega^2\}_n + \ldots + b_n\{\omega^n\}_n|, \qquad \omega \in \Omega_0, \quad b_j \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Если мы предположим, что для некоторых значений параметров $x_k \in \bar{\Delta}$ найдутся коэффициенты $\beta_k \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sum_{j=1}^{n} a_j\{\omega^j\}_n x_k^j = \sum_{j=1}^{n} b_j\{\omega^j\}_n, \tag{5}$$

то переписав (5) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\{\omega^j\}_n \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^j = \sum_{j=1}^{n} b_j\{\omega^j\}_n$$

и собрав коэффициенты при $\{\omega^j\}_n$

$$a_j\{\omega^j\}_n \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^j = b_j\{\omega^j\}_n, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

мы получим систему линейных уравнений

$$a_j \sum_{k=1}^{n} x_k^j \beta_k = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\beta_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные, а $x_k \in \bar{\Delta}$ — параметры, $k = 1, \ldots, n$.

3. Замечания

Подчеркнём, что (5) верно для любой $\omega \in \Omega_0$, при фиксированных β_k, x_k, a_j, b_j. Заметим также, что здесь имеет смысл брать $x_k \neq x_j$, $k \neq j$, иначе мы получим меньше чем n уравнений с n неизвестными. Стоит ещё упомянуть, что $x_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, иначе мы получим систему из $n-1$ уравнения, а не из n.

Введём следующие обозначения (см. формулу (3)):

$$p(x) := a_1\{\omega\}_n x + a_2\{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + a_n\{\omega^n\}_n x^n, \qquad q(x) := \frac{p(x)}{x}.$$

Так как полином p удовлетворяет лемме Шварца, то $|p(x)| \leqslant |x|$ и следовательно $|q(x)| \leqslant 1$, $x \in \bar{\Delta}$. Стало быть,

$$|q(x)| = |a_1\{\omega\}_n + a_2\{\omega^2\}_n x + \ldots + a_n\{\omega^n\}_n x^{n-1}| \leqslant 1, \quad \omega \in \Omega_0,\ x \in \bar{\Delta}. \tag{7}$$

Таким образом, в полной аналогии с предыдущим пунктом мы получим систему, несколько отличающуюся от системы (6)

$$a_j \sum_{k=1}^{n} x_k^{j-1}\alpha_k = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные, а $x_k \in \bar{\Delta}$ — параметры, $k = 1, \ldots, n$.

В правых частях неравенств (3) и (7) стоит 1. Отметим, что это никак не уменьшает общности наших рассуждений. Действительно, если мы располагаем неравенством $|u(x)| \leqslant c$, $c > 0$, то мы всегда можем перейти от этого неравенства к неравенству $|p(x)| \leqslant 1$, где $p(x) = u(x)/c$.

Если $\{\omega^j\}_n = 0$, то уравнение с номером j можно опустить. Аналогично, коэффициент a_j может быть равным нулю только в том случае, когда $b_j = 0$. Стало быть, если $a_j = b_j = 0$, то уравнение с номером j можно опустить. С другой стороны, всегда можно найти полином p такой, что $a_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Например, если $a_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, то $|\{\omega\}_n x + \{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + \{\omega^n\}_n x^n| \leqslant 1$ причём оценка точная. По этому поводу см. [3], а также пункт 8 настоящей статьи.

Итак, с учётом всех замечаний мы получили две системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^j \beta_k = \frac{b_j}{a_j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{j-1}\alpha_k = \frac{b_j}{a_j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные, а $x_k \in \bar{\Delta}$ — параметры, $k = 1, \ldots, n$.

Заметим, что α_k и β_k зависят не только от $x_1, \ldots, x_n$, а также от $\{F\}_1, \ldots, \{F\}_n$, и от $a_1, \ldots, a_n$, но мы в дальнейшем изложени не будем указывать этого явно, так как эти величины мы зафиксировали.

4. Оценки коэффициентов

Основной результат этой работы сформулируем следующим образом:

Теорема 1. *Если $F(z)$ — голоморфная в Δ функция, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любой $f \in M_F$ имеет место оценка*

$$|\{f\}_n| \leqslant \min_{\substack{x_i \in \bar{\Delta},\ x_i \neq 0,\\ x_i \neq x_j,\ i \neq j,\\ i,j=1,\ldots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1,\ldots,x_n)| = \min_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i \neq x_j,\ i \neq j,\\ i,j=1,\ldots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1,\ldots,x_n)|, \tag{11}$$

где α_k, $k = 1,\ldots,n$, есть решения системы (9) *или системы* (10).

Доказательство. При наложенных нами выше ограничениях ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$) система уравнений (10), согласно критерию Кронекера-Капелли, имеет единственное решение, так как определитель d_n её основной матрицы есть определитель Вандермонда: $d_n = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$. То же самое можно сказать и про систему уравнений (9), так как её определитель есть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot d_n$.

Итак, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \{\omega^j\}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k q(x_k)$, следовательно

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_j \{\omega^j\}_n \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q(x_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||q(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|,$$

так как по предыдущему $|q(x)| \leqslant 1$ для любой $\omega \in \Omega_0$ и для любого $x \in \bar{\Delta}$.

Те же самые рассуждения можно провести и для $p(x)$. Таким образом, вспомнив формулу (2) и то, что $b_j = \{F\}_j$, $j = 1,\ldots,n$, мы получим оценку (11).

Покажем справедливость равенства (11). Согласно принципу максимума модуля $|q(x)|$ достигает своего максимума только при $|x| = 1$, то есть $|x_k| = 1$, $k = 1,\ldots,n$, в противном случае основная оценка (3) перестанет быть точной, что сделает грубой и оценку (11). ■

5. Решение систем (9) и (10)

Для получения решения систем (9) и (10) в явном виде мы используем метод Крамера и формулу для разложения определителя по столбцу. Тем не менее, можно действовать и по другому, например, в [15] есть формула для элементов матрицы, обратной к матрице Вандермонда.

Для решений системы (10) получаем следующий результат:

Утверждение 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, а множества Q_k^{ij} — элементы множества всех подмножеств из $n - j$ элементов множества $\{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$, здесь k просто номер подмножества ($k = 1,\ldots,C_{n-1}^{n-j}$), тогда*

$$\alpha_i(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum\limits_{k=1}^{C_{n-1}^{n-j}} \prod\limits_{m \in Q_k^{ij}} x_m \quad \dfrac{b_j}{a_j}}{\prod\limits_{\substack{\gamma=1\\ \gamma \neq i}}^{n} (x_\gamma - x_i)}. \tag{12}$$

Заметим, что мы считаем суммы с нулевым количеством слагаемых равными 0, а произведения с нулевым количеством сомножителей равными 1.

Для системы (9) результат такой: $\beta_i = \alpha_i(x_1, \ldots, x_n)/x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Всюду далее мы не будем использовать решения системы (9), не только потому, что выражения для решений системы (10) несколько проще, но также ещё потому, что согласно теореме 1, для получения оценки коэффициентов нужно исследовать целевую функцию $|\beta_1| + \ldots + |\beta_n|$ на минимум, но β_i содержит в знаменателе множитель x_i, а $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, что будет увеличивать значения целевой функции при $|x_i| < 1$.

6. Гипотеза Кшижа

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж предположил [4, 5], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Это предположение мы будем называть гипотезой Кшижа, а задачу об оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B — проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [6]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B [7, 8, 9, 11, 12]. В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z,t)$.

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лаггера, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [3] и с теорией пространств Харди [7]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n - 3$ действительных переменных [14]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Класс B посредством класса Ω_0, связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха). Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, имеются связи с классической проблемой моментов [9], теорией операторов и теорией обработки сигналов.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде (см. также (1))

$$f(z) = e^{-t\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0. \tag{13}$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. Фактически можно считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

7. Приложения к проблеме Кшижа

В работе [14] подробно описаны так называемые “асимптотические оценки” коэффициентов на классах B_t при больших и малых значениях параметра t. Интересно, что эти оценки являются точными, то есть не нуждаются в улучшении. В частности, в [14] сказано, что начиная с $n = 3$ имеются интервалы, на которых “асимптотические оценки” получить не удаётся:

$$\begin{aligned}
n = 1:&\quad \varnothing,\\
n = 2:&\quad \varnothing,\\
n = 3:&\quad \left(\frac{3}{2},\ 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}\right),\\
n = 4:&\quad (3 - \sqrt{3},\ 6),\\
n = 5:&\quad (1.129\ldots,\ 7.899\ldots),\\
n = 6:&\quad (1.037\ldots,\ 9.785\ldots).
\end{aligned}$$

Обозначим начальные точки этих интервалов через $t_1(n)$, а конечные через $t_2(n)$.

На этих интервалах изменения параметра t, пользуясь теоремой 1 и утверждением 1 можно провести численные вычисления и таким образом получить оценки для $|\{f\}_n|$, $n = 1, \ldots, 6$, на классах B_t. Численный метод и обоснование корректности такого подхода даны в работе [14]. Также в работе [14] содержится достаточно подробный обзор по состоянию дел в вопросе об оценке модулей начальных тейлоровских коэффициентов в проблеме Кшижа.

В работе [14] получены точные оценки коэффициентов $|\{f\}_n|$, $n = 1, \ldots, 6$, на классах B_t. Однако, на указанных выше интервалах они получены численным методом, причём с недостаточной точностью, поэтому вопрос о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 6$ остаётся открытым. Тем не менее, результаты статьи [14] говорят в пользу справедливости гипотезы Кшижа при $n = 1, \ldots, 6$.

В работе [9] описанным здесь методом сделан вывод о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 4$, а в статье [6] тем же методом сделан вывод о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 5$. О том почему эти выводы не вполне корректны в строгом математическом смысле подробно сказано в работе [14]. Далее, в работе [10] этим же методом были проведены оценки первых шести коэффициентов, правда справедливость гипотезы Кшижа при $n = 6$ не была установлена.

Во всех перечисленных работах вычисления проводились при $x_i \in \partial\Delta$. При $n = 1$ и при $n = 2$, данный метод позволяет получить оценки точные на B_t, $t > 0$. При $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ оценки получаются точными на B, но не на B_t.

Вероятно, что при $n = 6$ этим методом невозможно получить оценку точную хотя бы на B. Поэтому метод можно отнести к "асимптотическим" методам. В частности, интересно возможно ли данным методом получить оценку точную на B_t хотя бы при $n = 3$? В любом случае, полученные таким образом результаты интересно было бы сравнить с результатами из [14].

Почему вычисления этим методом нужно проводить только на единичной окружности, а не на всём замкнутом единичном круге, сказано в следующем пункте.

Описываемый в этой работе метод интересен тем, что в большинстве методов мы переходим от задачи максимизации функционала к задаче максимизации функции, а здесь мы перешли к задаче минимизации функции. Кроме того, обычно такая функция находится для каждого n отдельно, а в этой работе получена достаточно простая аналитическая зависимость от n.

8. О выборе коэффициентов a_i

Рассмотрим класс M_H с $H(z) := \dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k$. Этот класс обычно обозначают через C и называют классом Каратеодори. Известно [3], что если $h \in C$, то $|\{h\}_n| \leqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Причём эта оценка точна и достигается на вращениях функции H в плоскости переменной z. Если взять произвольную функцию $\omega \in \Omega_0$, то функция $\omega_x(z) = \omega(xz) \in \Omega_0$, при $|x| \leqslant 1$. Стало быть, $h_x(z) := \dfrac{1+\omega_x(z)}{1-\omega_x(z)} \in C$ и согласно формуле (2)

$$|\{h\}_n| = 2|\{\omega\}_n x + \{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + \{\omega^n\}_n x^n| \leqslant 2.$$

Таким образом понятно, что можно брать $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, о чём мы уже упоминали в пункте 3 сразу перед формулой (9).

Аналогично, можно показать, что в качестве a_i можно брать начальные коэффициенты любой выпуклой однолистной функции. Более того, в качестве a_i можно брать начальные коэффициенты любой функции, у которой есть необходимое нам свойство (3). Подобных примеров много в работах, посвящённых теории подчинённых функций.

В работе [8] впервые появились асимптотические оценки, а в работе [14] указаны границы их применимости. То есть известно, что при $t \in [0, t_1(n)]$

$$|\{f\}_n| = |\{F\}_1(t)\{\omega\}_n x + \{F\}_2(t)\{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + \{F\}(t)_n\{\omega^n\}_n x^n| \leqslant |\{F\}_1(t)| = 2te^{-t},$$

причём эта оценка точна для каждого $t \in [0, t_1(n)]$. Аналогично, при каждом $t \geqslant t_2(n)$ справедлива точная оценка

$$|\{f\}_n| = |\{F\}_1(t)\{\omega\}_n x + \{F\}_2(t)\{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + \{F\}_n(t)\{\omega^n\}_n x^n| \leqslant |\{F\}_n(t)|.$$

То есть числа a_k можно брать в виде $a_k = \{F\}_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, при $t \in [0, t_1(n)]$ и при $t \geqslant t_2(n)$.

Ясно, что для получения хороших оценок при помощи теоремы 1 необходимо, чтобы оценка (3) была точной. Точность оценки (3) не гарантирует точности оценки (11). Возникает вопрос: как оптимально выбрать коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$, так, чтобы оценка (11) была наилучшей?

Каким ограничениям удовлетворяют числа a_k, $k = 1, \ldots, n$? Так как $p \in \Omega_0$, то для коэффициентов p необходимо [3]

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \{\omega^k\}_n|^2 \leqslant 1, \qquad \omega \in \Omega_0,$$

в частности, $|a_k\{\omega^k\}_n| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$. Возможно, множество значений системы чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ можно охарактеризовать полностью, основываясь на решении проблемы коэффициентов для класса Ω_0. По этому поводу смотрите [13, 16]. Однако, не трудно понять, что множество значений системы чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ есть выпуклый компакт, содержащий точку $(0, \ldots, 0)$.

9. Заключение

Изложенный здесь метод в неявной и менее общей форме впервые появился в работе В. Шапеля [9]. В статье [9] изложение строится вокруг теории меры, хотя по сути, для получения основного результата в [9] используется именно метод, которому посвящена эта работа. Основной целью настоящей статьи является конструктивное изложение метода без всяких отсылок к теории меры и в наиболее общей форме. Связи с теорией меры, найденные в [9] весьма интересны, но с точки зрения приложений к оценке коэффициентов — второстепенны.

Здесь описан подход к решению задачи получения оценок модулей начальных тейлоровских коэффициентов на произвольных классах подчинённых функций M_F. Описаны приложения метода на B_t, $t \geqslant 0$. В частности, указано на возможность использования численных методов глобальной липшицевой оптимизации для доказательства гипотезы Кшижа при малых n. Корректность этого подхода в строгом математическом смысле доказана в [14].

В работе используются результаты, полученные в основном методом подчинения [3, 8]. Методами линейной алгебры задача сведена к задаче о поиске условного минимума действительнозначной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что в принципе позволяет даже применять стандартные методы дифференциального исчисления. В процессе решения основной задачи было получено решение системы линейных уравнений с матрицей Вандермонда.

Все изложенные здесь подходы можно применять не только на классах B_t, а также и на других классах подчинённых функций.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе B, а также на других классах голоморфных функций. Задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Список литературы

[1] Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.

[2] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

[3] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[4] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[5] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[6] Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.

[7] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[8] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.

[9] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[10] Ступин Д. Л. Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2015. С. 36–49.

[11] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.

[12] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.

[13] Ступин Д. Л. 2022. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112522

[14] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112619

[15] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1: Основные алгоритмы. М.: Мир, 1976.

[16] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.