

УДК 517.51, 512.7, MSC 26E99, 14PXX

АРИФМЕТИКА DR_+ .

АЛЕКСАНДР Н. ЖВАНЬКО

Аннотация. В данной работе предлагается идея использования p -неклассических арифметик (p -НКА), идея разнообразий и арифметика DR_+ , определенная на множестве \mathbb{R}_+ неотрицательных вещественных чисел. Использование p -НКА — это и переиспользование конструкций, основанных на классической арифметике (КА), с другими наборами числовых алгебраических операций на бесконечных подмножествах \mathbb{R}^n , и применение новых сущностей, не имеющих аналогов в КА, например, операционного уравнения, как уравнения с неизвестной арифметической операцией. Под разнообразиями понимаются: а) множества или последовательности значений функций разнообразия; б) множества решений уравнений разнообразий. Функция/уравнение разнообразия — это функция/уравнение полностью или частично снабженное p -НКА. Арифметика DR_+ состоит из сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений. Каждое из действий выполнимо для любых чисел из \mathbb{R}_+ и это множество замкнуто по любому из действий. Указано сходство полученных вслепую графиков абстрактных функций разнообразия с опубликованными графиками реальных данных из актуальных исследований наук о жизни.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Introduction	2
1.1. p -Nonclassical arithmetics (p -NCAs)	2
1.2. Diversities and its functions/equations	4
1.3. Why?	5
1.4. DR_+ arithmetic	7
1.5. Limitations of the theory	8
2. DR_+ и подстановочная арифметика	8
2.1. Краткое неформальное описание	8
2.2. Определение DR_+ и подстановочной арифметики	10
3. Общие соглашения и определения	12
4. Действия	14
4.1. Сложения	14
4.2. Вычитания	18
4.3. Умножения	25
4.4. Деления	33
5. Вывод	51
Приложение А. Графики DR -разнообразий	52

Date: 23 февраля 2023 года.

Key words and phrases. non-classical arithmetic, real functions, algebraic variety, diversities, неклассическая арифметика, вещественные функции, алгебраические многообразия, разнообразия.

Приложение А является частью исследования, проведенного благодаря финансовой поддержке П. А. Гришанова (Латвия, Рига). Автор также выражает признательность Wolfram Research за использование Wolfram|One при написании приложения А.

Приложение В. Таблицы операций	63
Список литературы	65

1. INTRODUCTION

1.1. p-Nonclassical arithmetics (p-NCAs). Since there are several different meanings in the scientific literature for the use of the phrase ‘non-classical arithmetic(s)’, the meaning given by the author of this material will be marked as ‘p-nonclassical arithmetic’, ‘non-classical arithmetic in the sense of this article’, etc. (The suffix ‘p’ was chosen randomly and has no hidden meaning.)

Let us begin with the reader’s curiosity, and suggest him/her to change the addition and multiplication tables known from school and then recalculate familiar functions such as quadratic, cubic, etc., using the resulting tables. What kind of graphs do we get? If they are graphs different from their classical counterparts, then we have obtained p-nonclassical quadratic, cubic, etc. functions, and addition and multiplication in these functions are naturally called p-nonclassical. In addition to p-nonclassical addition and multiplication, these can be subtraction, division, exponentiation, and extraction of roots.

Sets of p-nonclassical operations are conveniently called p-nonclassical arithmetics. All of the above has the disadvantage of being considered a definition. In fact, defining our subject well is not entirely straightforward, but we won’t need it yet. Let us denote, perhaps, only the following:

List 1.1. (Conditions for p-NCAs)

- (1) Well-known arithmetics, such as p-adic, complex, quaternion arithmetic, etc., which use ‘school’ arithmetic, are not p-NCAs.
- (2) We consider first of all effective algebraic operations defined on infinite subsets of sets \mathbb{R}^n ;
- (3) These are sets of such operations which allow us to replace classical operations in familiar constructs — functions, equations, matrices, etc.
- (4) If \vdash_j, \vdash_i are operations of p-nonclassical arithmetics, $+$, \cdot are operations of classical arithmetic (CA) then for an essentially large set $S \subseteq \mathbb{R}^n$, condition

$$(1.1) \quad a \vdash_j b \neq a + b, \quad a \vdash_i b \neq a \cdot b, \quad a, b \in S,$$

must hold.

All that is required of point 3 is that the mechanical recalculation of such a substitution gives a numerical result without regard to its interpretation — for example, that we can recalculate the matrix determinant or the Riemann zeta function. In other words, it is not required that, say, Cramer’s rule give solutions using the obtained value of the determinant. For reasons described below, it may be desirable that the computed results differ from the classical ones. (An explanation of the strange (‘incorrect’) meaning of the non-classical Riemann zeta function will be given below.)

The author found in the scientific literature two cases of verbatim use of the phrase ‘non-classical arithmetics’, which differ from the meaning of this article.

The complete fields used in [1], pp. 32–65, which are isomorphic to the real number system, are called by the authors’ site, [2], ‘non-classical arithmetics’. p-NCAs, as we propose them, are not limited by either the requirement of isomorphism

or the requirement to satisfy the field axioms, but are guided by item 3 of list 1.1. In addition, all arithmetic presented in this book uses the classical real arithmetic in generators, which refers them to item 1 of list 1.1.

The second use was found in the article [3], p. 266, as an equivalent of arithmetics arising from the combination of classical arithmetic with non-classical logics. Additions, multiplications in our non-classical arithmetics are just a convenient name for operations. They could be called ‘Operation 1’, ‘Operation 2’ or some other names. The choice of names was dictated by the desire to reuse familiar constructions, first of all, such as functions, equations with classical arithmetic: take, say, the notation of the Riemann zeta function, replace the operations of classical arithmetic with p-nonclassical ones, calculate the function ζ_{p-NCA} from the new notation — the set of obtained pairs $(z, \zeta_{p-NCA}(z)) \neq (z, \zeta(z))$ is the non-classical Riemann zeta function. At the same time, we do not care at all that the replacement in different notations of the classical zeta function can give different p-nonclassical ‘analogues’ even within the same p-nonclassical arithmetic, while for classical arithmetic, calculations on different notations will give the same function. This paragraph emphasizes the use of a p-NCAs without questions regarding Peano’s axiomatic and non-classical logics, as is done, for example, in [4] (see article abstract) or [5] (text on page 274 about inconsistent arithmetic, which can contain all the true sentences of the standard model of arithmetic). An expert in the field of inconsistent arithmetics expressed the criterion for distinguishing p-NCAs from inconsistent ones by asking: “Do you allow that inconsistencies (for example, inconsistent equations, $a = b$ and $a \neq b$) may hold?” p-nonclassical arithmetics are developed without such permission. The proofs of the theorems will be carried out by the classical predicate calculus.

Why we do not ask questions of classical arithmetic in the light of logic, whether non-classical or classical, will become clear after reading the section “Why?”, which explains the priority tasks of the idea of p-nonclassical arithmetics. However, in the text on non-Diophantine arithmetics,¹ some facts of the p-nonclassical arithmetic DR_+ will be presented, that are similar to some facts of inconsistent arithmetics. These facts of DR_+ arithmetic are not a consequence of logical devices, but exclusively a consequence of the definitions of algebraic operations. p-nonclassical arithmetics do not coincide in purpose with the arithmetics of Robinson, Skolem, Presburger, Heyting, since we are interested in precisely the operations, $+_j, \cdot_j$, with inequalities 1.1.

As already mentioned, ‘addition’, ‘multiplication’ are just convenient names for operations of a certain class, and p-nonclassical arithmetics does not at all ask questions about the correctness of modeling reality using classical arithmetic, while non-Diophantine ones were conceived precisely as a proposal for an alternative that works more adequately in “various situations in which quantitative descriptions of real situations cannot be correctly modeled using the conventional arithmetics of natural and whole numbers” ([6], p. 2²).

However, here are some selected similarities/differences between non-Diophantine arithmetics, [6], and p-NCAs using the example of DR_+ (we keep the notation for ‘+’ without indices if they are taken from [6], and with indices if they are DR_+ operations — ‘ $+_j$ ’, ‘ \cdot_j ’):

¹These are not considered to be inconsistent arithmetics.

²Chapter 1 of interest to us is freely available at:

https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789811214318_0001.

- (1) p. 64: $1 + 1 = 3$, $2 + 2 = 5$ — in DR_+ it is easy to define operations j and k such that $1 \dot{+}_j 1 = 3$, $2 \dot{+}_k 2 = 5$;
- (2) p. 65: $k + 1 = k$ — the numbers k exist for which the equality $k \dot{+}_j 1 = k$ is true in DR_+ ;
- (3) p. 65: "...that is, by adding 1 to 1 to 1 and so on, it is impossible to get number larger than 1,000, and there are non-Diophantine arithmetics where this is true" — this is also possible in DR_+ arithmetic if only the formal inequality

$$a_1 \dot{+}_j \dots \dot{+}_j a_m < 1000, \quad a_1, \dots, a_m < 1000, \quad m \in \mathbb{N}$$

is required. The inequality will remain true even as $m \rightarrow \infty$. Addition and multiplication in DR_+ can be changed so that if the sequence of terms of a real series has a limit of 0, then the sum of the series over the new addition is always a finite number.

- (4) p. 66: "...addition and multiplication are always commutative" — we intentionally do not require this in DR_+ (why we do this will be explained in the "Why?" section);
- (5) p. 66: "...zero is not always a neutral element with respect to addition and one is not always a neutral element with respect to multiplication in non-Diophantine arithmetics" — this is usually the case in DR_+ ;
- (6) p. 66: "At the same time, the laws of associativity and distributivity fail in the majority of non-Diophantine arithmetics." — this is usually the case in DR_+ .

We have indicated only one difference between non-Diophantine arithmetics and p-nonclassical arithmetics as we understand them. To point out more differences, a detailed study of the book [6] is required.

In the sense of a set with the operations of addition and multiplication and partial order defined on it, p-nonclassical arithmetics can be abstract prearithmetics, [7], p. 1789, unless the latter is prohibited from including operations satisfying list 1.1: both the first and the last are universal algebras. It is possible to speak with guarantee about uniqueness of DR_+ . Reuse of constructions based on ordinary arithmetic is possible both in p-NCAs and in prearithmetics, with the same caveat regarding the acceptability of list 1.1 for prearithmetics. In p-NCAs we deliberately and explicitly exclude CA, while prearithmetics are constructed as a general context for many arithmetics, including the usual arithmetics of naturals, integers, rationals... (p. 1790) A detailed comparison requires more research.

1.2. Diversities and its functions/equations. Let us consider equations whose sets of solutions are defined as algebraic varieties. Let us completely or partially replace the classical operations in the equations with p-nonclassical ones. To somehow denote that the sets of solutions belong to equations with substituted operations, let us name these sets as diversities. The equations themselves will be diversity equations.

We will denote diversities (in addition to the sets of solutions to the equations above) as sets/sequences of values of functions provided with p-nonclassical arithmetic, perhaps more than one arithmetic, and possibly having a mix with classical arithmetic. Let's call the described functions diversity functions. The possible graphs of the diversity functions could be seen by the reader here, section 'Приложение А. Графики DR-разнообразий' ('Appendix A. Graphs of DR diversities').

In the scientific literature, you can find related objects marked with the word “non-classical”, for example, non-classical polynomials [8], Frobenius nonclassical curve[9], hypersurface [10]. Due to lack of capacity, comparison with diversity equations was not performed.

1.3. Why? When reading the justifications for the idea, the reader is advised to be somewhat careful, because to date the author has only theorems for the feasibility of DR₊ arithmetic operations.

Simple vs. complex. Let’s take the set³

{0, 86.9191}, {10, 02.0412}, {20, 53.5840}, {30, 91.4506},
{40, 14.6664}, {50, 40.1323}, {60, 65.3078}, {70, 28.7759},
{80, 79.2987}, {90, 37.8235}

of the first ten points of the graph of the function f_1 , section “Графики DR-разнообразий” and compute a polynomial for them. This is what we get⁴—

$$P = 1.03814 \times 10^{-11}x^9 - 4.50449 \times 10^{-9}x^8 + 8.19415 \times 10^{-7}x^7 - \\ 0.0000809853x^6 + 0.00470648x^5 - 0.162279x^4 + 3.17151x^3 - \\ 30.9761x^2 + 106.66x + 86.9191,$$

whereas $f_1(x) = 12.3456 +_2 x$. Moreover, there are reasons to consider f_1 as discontinuous in decimal fractions, hence having no elementary equivalent among functions with classical arithmetic (CA), since each of its elementary functions is continuous. This means that DR₊ makes it possible to obtain by elementary means objects obtainable only by non-elementary means of CA.

A more general assumption is that the simple means of arithmetic A allow us to construct objects accessible only by the complex means of arithmetic B . For the sake of clarity, let us note that it is reasonable to assume the existence of problems optimally solvable only by classical arithmetic.

The argument of natural mathematical understanding (ANMU). Classical arithmetic alone was the basis for a very strong and advanced mathematics. It is unlikely that among the very large set of numerical algebraic operations on \mathbb{R}^n there are not useful sets that can enrich our achievements.

The grouping of operations in arithmetics is convenient in that, once it is done, there are automatically both technical and psychological advantages to the mathematician. The former have been framed in terms of the simple-complex; the latter allow us to use familiar things (functions, known techniques, etc.) instead of inventing unnecessarily intellectual constructs.

In the author’s opinion, ANMU without other arguments would be enough for us to develop a theory of p-NCAs and diversities. Nevertheless, let us add two more.

³The Wolfram Language format is used.

⁴Calculation tool (use option of data set of {x,y} values):

<https://www.wolframalpha.com/input?i=interpolating+polynomial+calculator>.

The DR diversity graphs have resemblance with the graphs of actual scientific research. The presence of diversity mathematics in the examples, although not proven, but the allusions are strong enough to give hope for applications of DR_+ arithmetic to real-world problems.⁵ We should not be deterred when the example articles include statistical rather than functional graphs.

- The first seven references show a kinship to the DR f_8, f_9 function graphs:
 - (1) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01348-4/figures/11>, Extended Data Fig. 5.b from [11]—bacteriophages, high-throughput screening, synthetic biology;
 - (2) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04230-7>, (Go to «Figures»), Fig. 4.d (Xenografted...) from [12]—cell fate and cell lineage, developmental neurogenesis;
 - (3) <https://www.nature.com/articles/s43587-021-00146-z/figures/11>, Extended Data Fig. 6 from [13]—alzheimer’s disease, transcriptional regulatory elements;
 - (4) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01325-x/figures/8>, Extended Data Fig. 3.a from [14]—molecular engineering, phylogeny, population genetics;
 - (5) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01261-w/figures/2>, Fig. 2.a from [15]—membrane proteins, single-molecule biophysics;
 - (6) <https://www.nature.com/articles/s41398-021-01698-9/figures/3>, Fig. 3 from [16]—ADHD, psychology;
 - (7) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04011-2/figures/2>, Fig. 2.e from [17]—Bose–Einstein condensates, quantum simulation. (The similarity will be more obvious if the points of the interval from 100 to 300 fig. 2. straighten into a horizontal strip.)
- In the following three examples, it is important to note the presence of ‘standing’ values in both the article and DR graphs of functions $f_{12} - f_{14}$, f_{20} , and f_{21} . To increase the number of vertical points in the diversities, we only need to decrease the increment of the argument. This effect can be seen in the DR graph of the function f_{21} (f_{21B} is f_{21A} with Δx reduced).
 - (8) <https://www.nature.com/articles/s43587-021-00134-3/figures/15>, Extended Data Fig. 9.b from [18]—ageing, predictive markers;
 - (9) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04064-3/figures/4>, Extended Data Fig. 1 from [19]—computational models, genome-wide association studies, preventive medicine, risk factors;
 - (10) <https://www.nature.com/articles/s41477-021-01003-y/figures/3>, Extended Data Fig. 1 from [20]—genomics, natural variation in plants.
- The values of f_{10}, f_{11} are distributed by squares. If you vary the parameters, you can achieve a simulation of the random arrangement of the squares. The plots can then be combined to obtain a block structure, akin to

⁵The author points out that the DR-graphs were obtained blindly, many months before the appearance of these articles. This is evidenced by the date of publication of the first version of the preprint (April 30, 2021). Purposeful work, perhaps, would have produced a better resemblance.

- (11) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03923-3/figures/10>,
Extended Data Fig. 7.d from [21]—heterogeneous catalysis, materials for
energy and catalysis, process chemistry.
- Finally, the resemblance of the diversity graphs of the functions f_{15A} to f_{18}
with the graph from
- (12) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01329-7/figures/14>,
Extended Data Fig. 8.c–f from [22]—Ca²⁺ imaging, mouse, neurophysiology,
visual system.

Providing new patterns to researchers. The researcher notices patterns that are known to some extent, because it is convenient to expand knowledge from them. Unknown patterns can slip away due to the lack of new mathematical ones. In order to obtain them by means of familiar functions like the Riemann zeta function, such a change is required in which $\zeta \neq \zeta_{NCA}$. In other words, non-isomorphism is preferred in this context. The change in arithmetic was chosen as a way to obtain the inequality. In order for the found dependencies on real data to be reproduced by more compact algorithms, p-nonclassical arithmetic is not limited to the usual properties of operations such as commutativity, associativity, etc., although this is not prohibited. Libraries of patterns generated by the means of p-nonclassical arithmetics will allow scientists to pay attention to things in real data with relatively simple mathematics. This is the promised explanation why it is sometimes desirable to obtain analogues other than the classical ones.

1.4. DR_+ arithmetic. This work contains the p-nonclassical DR_+ arithmetic (in Russian). DR_+ is defined for non-negative real numbers. There are six algorithms — addition, left and right subtraction, multiplication, left and right division.

(Simplified) The addition algorithm takes right and left arguments and a user-defined addition table. Different tables mean different additions, even though the algorithm is the same. It is mathematically correct to say that DR_+ involves set of additions. The possible number of pairwise different addition tables is the possible number of additions of DR_+ arithmetic. The situation with other algorithms is similar, with the difference that multiplication and division will need two table — an addition table and a multiplication table.

If invertibility is not necessary, we do not impose restrictions on the tables of direct operations. Subtraction and division, however, require tables, with some conditions for the reversibility of addition and multiplication. Nevertheless, there are still many tables, and thus many operations.

Calculations are performed from the initial digits of a decimal number to the final digits. Preliminary work⁶ with functions shows some advantages of this arrangement, among which the relative simplicity of:

- (1) examination of functions for continuity;
- (2) definite integration;
- (3) calculating the dimensions of point sets given by functions;
- (4) identification of the global behavior of functions;
- (5) numerical solutions.

That the operation algorithm uses replaceable tables allows us to work with such an entity as an operational equation — an equation in which an unknown operation

⁶This is not shown in the current version of the preprint.

is found, e.g., $+$ in the entry $123.45 +_i 6.789 = 10.1112$. Conceptually, this is just a suitable table filling-in.

1.5. Limitations of the theory. Due to the lack of a more detailed study, the author is not able to clearly indicate the limitations, excluding limitations of a general nature. 'Simple versus complex' promises the benefits of suggesting that the simple means of one arithmetic can produce objects that only the complex means of another can produce. However, it is usually much easier to propose an algorithm that generates some complex structures than to find a simple algorithm for real ones — an algorithm that, moreover, may not exist. The ANMU argument promises the benefits of reusing known constructions with other arithmetics, however, neither the possibility of reuse nor the complexity are known in advance. For example, it is easy to develop arithmetic that allows mechanical recalculation of the matrix determinant formula, but will the resulting number perform the same role as the determinant of classical arithmetic performs?

2. DR_+ и ПОДСТАНОВОЧНАЯ АРИФМЕТИКА

2.1. Краткое неформальное описание. Еще больше осязаемости идее добавим определением конкретной арифметики, обозначаемой DR_+ , которая не должна быть слишком простой, чтобы не быть лишенной силы, но и не слишком сложной, чтобы нам не утонуть в ней, так и не дойдя до обнаружения применений. DR_+ представляет собой конечное, но очень большое множество сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений, определенных для неотрицательных вещественных чисел (знак $+$ в обозначении).

Сложения и умножения выполнимы для любых неотрицательных вещественных чисел и \mathbb{R}_+ замкнуто относительно данных действий. Имеются всегда выполнимые левые и правые вычитания и деления на всем \mathbb{R}_+ , с тем чтобы результат был снова в \mathbb{R}_+ . Разумеется, от обратных действий ожидается восстановление аргументов прямых действий. Мы достигли этой цели в несколько специфическом смысле. В DR_+ возможно сложение $4.5 +_i 39.43 = 6.12$. Вычитание из 6.12 правого слагаемого 39.43 восстановит левое слагаемое 4.5 : $6.12 \neg_i 39.43 = 4.5$. Этого не случится с восстановлением правого слагаемого посредством вычитания из суммы левого: $6.12 \neg_i 4.5 = 3.43 \neq 39.43$. Тем не менее, дописав один незначащий ноль к целым частям, мы получим аргументы сложения в точности — $06.12 \neg_i 04.5 = 39.43$. Это связано с зависимостью результата от обрамления незначащими нулями, которая выражается и в прямых действиях. Для примера $4.5 +_i 39.43 \neq 0004.500 +_i 0039.43000$. Аналогично обстоит дело с умножением/делением.

Данное обстоятельство не может быть основанием для дискредитации арифметики, поскольку классическая математическая практика не изгоняет, например, многозначный комплексный логарифм, но выделяет главное его значение и не запрещает пользоваться другими значениями логарифма для данного аргумента.

В общем случае действия некоммутативны, неассоциативны, умножения не дистрибутивны относительно сложения и не являются сокращенным сложением

$$a *_k^i n \neq \underbrace{a +_k a +_k \cdots +_k a}_n$$

Существуют ли действия с противоположными свойствами, мы не отвечаем.

Определения действий устроены так, что для получения, например, сложения \vdash_j , отличного от сложения \vdash_k , нам достаточно лишь сменить таблицу ϕ_j подстановок сложения \vdash_j на таблицу ϕ_k сложения \vdash_k . Таблицы действий вводимой арифметики похожи на таблицы обычных сложения $+$ и умножения \cdot . Сходство в смысле техники вычисления сложений из DR_+ со сложением $+$ будет и в сложении цифр одного разряда, и в наличии переносов из разряда предшествующего вычисления; принципиально отличие в порядке прохождения вычисляемых разрядов — слева направо, а не справа налево. Такой порядок продиктован выполнимостью деления для данного умножения $*_a^m$ (m и a — идентификаторы таблиц умножения и сложения в умножении соответственно). Деление, как действие обратное умножению, оказалось легче организовать от начала чисел к концу. Соответственно оно задало, каким быть умножению.

От порядка прохождения разрядов ожидаются преимущества, например, в численных решениях, исследовании глобального поведения функций, определенном интегрировании, исследовании функций на непрерывность, измерении размерностей множеств, заданных функциями.

Порядок прохождения разрядов позволил налагать на таблицы подстановок очень немного ограничений для целей обратимости операций. Каждую таблицу T можно получить так: составим латинский квадрат F порядка 10 из цифр, затем составим квадрат F' того же порядка, но без требования быть латинским; теперь из значения a ячейки xy таблицы F и из значения b той же ячейки xy таблицы F' составим упорядоченное значение ab и внесем его в ячейку xy таблицы T ; произведя процедуру для всех ячеек, мы получим таблицу T , которую назовем *полулатинской*⁷. На каждую таблицу F есть большое количество таблиц F' , а всех таблиц T — колоссальное число. Оно и есть мощность множества сложений (вычитаний, умножений, делений) арифметики DR_+ . Следует упомянуть: определения действий таковы, что, заменив в них слово «цифра» на слово «2-слог», и заменив значения ячеек таблиц F , F' на упорядоченные пары цифр, затем, составив из них упорядоченную пару $acbd$ «двойных цифр» для таблицы $T^{(2)}$ мы легко получаем расширение арифметики на действия по таблицам типа $T^{(2)}$; аналогичным образом возможно получить действия по таблицам $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ и вообще $T^{(k \rightarrow \infty)}$. Иначе говоря, наша арифметика допускает расширение на счетное число сложений и каждого из других действий⁸.

Чтобы арифметику сделать понятной широкому кругу, мы воспользовались способом наподобие школьных действий в «столбик». Это позволяет заинтересованному читателю не зависеть от знания конкретного математического формализма (машины Тьюринга, нормального алгорифма, конкретного языка программирования и пр.). Табличный формализм визуальностью, кажется, неплохо подошел для целей определения DR_+ .

Ради избежания путаницы, далее будем словом «таблица» называть таблицу подстановок, а таблицу–«столбик», в которой выполняется действие будем называть *сеткой*.

Преимуществом определений действий можно считать тот факт, что вычитание (деление) выполняется ровно в той же сетке и по той же таблице, что и

⁷Для необратимых сложения и умножения требование быть полулатинской является лишним.

⁸В данной работе мы ограничились типом $T^{(1)}$.

ТАБЛИЦА 2.1. Таблица T арифметического действия \diamond_a .

\diamond_a	0	...	y	...	9
0	$g_{r_0}\bar{g}_{r_0}$...	$g_{r_1}\bar{g}_{r_1}$...	$g_{r_2}\bar{g}_{r_2}$
...
x	$g_{r_3}\bar{g}_{r_3}$...	$g_{r_4}\bar{g}_{r_4}$...	$g_{r_5}\bar{g}_{r_5}$
...
9	$g_{r_6}\bar{g}_{r_6}$...	$g_{r_7}\bar{g}_{r_7}$...	$g_{r_8}\bar{g}_{r_8}$

сложение (умножение). Это, по мнению автора, позволяет существенно экономить на изучении арифметики и доказательствах выполнимости действий.

Арифметические действия определены в работе явно. Никаких алгебраических или категорных подробностей не излагается. Заинтересованный читатель может взять любую функцию/уравнение по классической арифметике, и если они имеют смысл при замене обычного действия на действие из DR_+ , он получит функцию/уравнение разнообразия. Скажем, квадратичная функция одной переменной в смысле функции разнообразия может выглядеть так:

$$y = a *^3_1 x^2 +_1 b *^3_2 x +_2 c,$$

где a, b, c могут равняться 0.

По ссылке —

https://youtube.com/playlist?list=PLPaIMHkSBU4VwXm92075wonmAJ7P_2k9

— читатель найдет видеопримеры операций. Может, кто-то найдет удобным изучение формализма DR_+ предварить просмотром неформального видео для уяснения логики операций.

2.2. Определение DR_+ и подстановочной арифметики.

Определение 2.1. (неперенос и перенос) Если $G = \{0, \dots, 9\}$ — алфавит цифр, $G'' = \{g_0\bar{g}_0, \dots, g_{10^2}\bar{g}_{10^2}\}$ — множество пар цифр в алфавите G и $g\bar{g} \in G''$, тогда g называется непереносом, а \bar{g} — переносом (в младший (правый) разряд). \triangleleft

Определение 2.2. (таблица арифметического действия \diamond_a)

- (1) Положим в общем случае $g_r \neq \bar{g}_r$. Таблицей T арифметического действия $g_x \diamond_a g_y = g_{r_j} \bar{g}_{r_j} \in G''$ будет таблица 2.1 на странице 10.
- (2) В случае, когда непереносы каждой строки (столбца) таблицы действия образуют все множество G , такая таблица называется полулатинской и обозначается SL .

Все таблицы В.1 страницы 63 — полулатинские. \triangleleft

Определение 2.3. (DR_+ как операции алгебраической системы) Арифметика DR_+ — это конечное семейство O бинарных операций алгебраической системы

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbb{R}_+ \text{ (как десятичные дроби)}, \\ &\quad O = \{O_+, O_-, O_*, O_\setminus, O_\setminus\}, \\ &\quad R = \{<, >, \leq, \geq, =\}), \end{aligned}$$

— семейство состоящее из:

$$\begin{aligned}
O_+ &= \{+_p \mid "+_p": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, p \in P & \text{— множества сложений,} \\
O_- &= \{-_u \mid "-_u": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, u \in U \subset P & \text{— множества левых вычитаний,} \\
O_{\neg} &= \{\neg_u \mid "\neg_u": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, u \in U & \text{— множества левых вычитаний,} \\
O_* &= \{*_w^v \mid "*_w^v": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, v, w \in P & \text{— множества умножений,} \\
O_{\setminus} &= \{\setminus_y^x \mid "\setminus_y^x": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, x, y \in U & \text{— множества левых делений,} \\
O_{/} &= \{/_y^x \mid "/_y^x": \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+\}, x, y \in U & \text{— множества правых делений,}
\end{aligned}$$

где P индексирует таблицы сложения и умножения из множества B таблиц T 2.1, а U — множество индексов, соответствующих таблицам, по которым возможны вычитания и деления (полулатинским). \triangleleft

\mathbf{A} имеет тип $\langle \{2_1, \dots, 2_{|O|}\}, \{2, 2, 2, 2, 2\} \rangle$, $|O| = |P| + 2|U| + |P|^2 + 2|U|^2$. Это огромное число в точности будет известным, когда станет известно число латинских квадратов 10×10 .

Кроме сказанного выше, мы хотим подчеркнуть, что наша арифметика состоит из шести алгоритмов операций (алгоритма сложения, ..., алгоритма правого деления), принимающих на вход аргументы-вещественные числа и таблицы операций, т. е. DR_+ будет частным случаем *подстановочной арифметики*. В определении ниже мы вместо алгоритма будем пользоваться понятием функции и предварим его

Определение 2.4. (таблица подстановок) Пусть имеем множество A всех слов $a = a_0 a_1 \dots a_{l_1}$ длины l_1 , множество B всех слов $b = b_0 b_1 \dots b_{l_2}$ длины l_2 и произвольное подмножество C слов $c = c_0 c_1 \dots c_{l_3}$ множества C' всех слов $c'_0 c'_1 \dots c'_{l_3}$ длины l_3 — все они в алфавите \mathcal{A} , — тогда множество $A \times B \times C$ есть *таблица подстановок*, слова a — строки, b — столбцы, c — значения ячеек ab . \triangleleft

Определение 2.5. (подстановочная арифметика) Подстановочная арифметика — это кортеж

$$(2.1) \quad \mathfrak{A} = (X, Y, D, F_{\mathfrak{A}})$$

из X — области определения арифметики, Y — области значений арифметики D — множества таблиц подстановок определения 2.4 и множества функций

$$F_{\mathfrak{A}} = \{f_i \mid f_i: S_i \times X \rightarrow Y\}, \quad i = 1, \dots, N \in \mathbb{N},$$

$S_i = \{(s_1^i, \dots, s_{q(i)}^i) \mid s_j^i \in A \subseteq D\}$, $q(i) = 1, \dots, Q \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq q(i)$, каждая из которых принимает индивидуальное число $q(i)$ таблиц и элемент из X . \triangleleft

Подстановочная в определении сообщает о подстановке таблиц операций в функцию f_i . Введение $A \subseteq D$ в определение множества S_i продиктовано выделением в D подмножества таблиц для обратных операций, чтобы улучшить совместимость с подстановочными арифметиками определения DR_+ и других арифметик с обратными операциями.

Определение 2.6. (DR_+ как подстановочная арифметика) Арифметика DR_+ — это кортеж

$$\text{DR}_+ = (\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+, B, F_{\mathfrak{A}}),$$

где B — множество всех таблиц 2.1 с подмножеством L полулатинских таблиц и $F_{\mathfrak{A}} = \{f_+, f_-, f_*, f_{\setminus}, f_{/}\}$ с

$$\begin{aligned} f_+ : B \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+, & f_* : B^2 \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ f_- : L \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+, & f_{\setminus} : L^2 \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ f_{\neg} : L \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+, & f_{/} : L^2 \times \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

<

В DR_+ есть шесть алгоритмов, поэтому $i = 1, \dots, 6$, число соответственных таблиц — $q(1) = 1, q(2) = 1, q(3) = 1, q(4) = 2, q(5) = 2, q(6) = 2$. Рассмотрим сложение $+_p$ арифметики DR_+ по таблице с номером $p \in P$. Положим, отображение $\sigma : P \rightarrow B$ индексирует таблицы и $s_1^1 = \sigma(p)$, тогда $+_p$ в подстановочном определении будет сужением $f_+|_{\Psi}$ функции $f_1 = f_+$, $\Psi = \sigma(p) \times \mathbb{R}_+^2$, поскольку работает с одной фиксированной таблицей и всевозможными парами чисел, а сложение $+_q = f_+|_{\Xi}$ при $\Xi = \sigma(q) \times \mathbb{R}_+^2$, $s_1^1 = \sigma(q)$. Пусть $\lambda : U \rightarrow L$ индексирует таблицы, по которым возможно правое деление и $s_1^6 = \lambda(x), s_2^6 = \lambda(y)$ тогда $\frac{x}{y}$ во втором определении — это сужение $f_{/}|_{\Phi}$ функции $f_6 = f_{/}$, $\Phi = \lambda(x) \times \lambda(y) \times \mathbb{R}_+^2$, т. к. принимает две фиксированных таблицы и два числа, пробегающие все пары из \mathbb{R}_+^2 .

Процедуры вычисления значений операций DR_+ будут определены в разделе «Действия» после необходимых общих соглашений и определений.

3. ОБЩИЕ СОГЛАШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Соглашение 3.1. (десятичная запись) Под десятичной записью неотрицательного действительного числа x будем понимать запись

$$x = x_n \dots x_1 x_0 . x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots,$$

в которой $x_n \dots x_1 x_0$ — цифры целой части, нумеруемые справа налево неотрицательными целыми числами, а $x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots$ — цифры дробной части, нумеруемые слева направо отрицательными числами, с минусом перенесенным для компактности наверх. Полагаем, что число 0 может записываться как конечная и как бесконечная десятичная дробь. <

Соглашение 3.2. (целая, дробная части числа) В пределах данной работы «целая часть числа» и «дробная часть числа» — это сокращение для «усечение до целой части числа» и «усечение до дробной части числа». <

Для регулярного использования в нашей работе обозначим действительные числа

$$(3.1) \quad \mathbb{R}_+ \ni \begin{cases} g = g_{a'} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_{b'} \dots, \\ h = h_{c'} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_{d'} \dots, \\ p = p_{n'} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots, \\ q = q_{e'} \dots q_0 . q_{\bar{1}} \dots q_{f'} \dots, \end{cases}$$

могущие начинаться незначащими нулями.

Соглашение 3.3. (употребления слов «таблица», «сетка») Если в дальнейшем изложении мы будем подразумевать таблицу T действия, то будем говорить «таблица», а к ряду других таблиц, используемых в определениях сложений и умножений будем применять слово «сетка». <

Определение 3.4. (выполнимая сетка) Сетка называется выполнимой, если она может быть заполнена по правилам заполнения данной сетки. \triangleleft

Определение 3.5. (члены арифметического действия) Действительные числа g, h, p в выражении

$$g \diamond_a h = p$$

называются членами действия \diamond_a , первым, вторым и третьим соответственно. \triangleleft

Определение 3.6. (атом действия, атомарные уравнения) Выражение

$$r \diamond_a s = (t\bar{t})_{rs} = t\bar{t},$$

где $r, s \in G$ и $(t\bar{t})_{rs}$ — элемент ячейки rs таблицы T действия a называется атомом действия a (по таблице T). Если в данном выражении есть неизвестные, быть может, все, то имеем атомарное уравнение, при этом варианты

$$(3.2) \quad r \diamond_a s = x\bar{x},$$

$$(3.3) \quad y \diamond_a s = t\bar{x},$$

$$(3.4) \quad r \diamond_a z = t\bar{x},$$

с неизвестными x, \bar{x}, y, z называются прямым атомарным уравнением, левонеизвестным атомарным и правонеизвестным атомарным уравнениями соответственно. \triangleleft

По первому мы будем находить сумму или произведение цифр, по второму будем находить левую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель, по третьему — правую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель.

Определение 3.7. (решение атомарных уравнений) Решением уравнения 3.2 будет единственное $(t\bar{t})_{rs}$, т.е. $t\bar{t} = x\bar{x}$. Решением уравнения 3.3 будет всякое $(t\bar{t}')_{r's}$, которое найдется в столбце s , т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $y = r'$; иначе решения не существует. Решением уравнения 3.4 будет всякое $(t\bar{t}')_{rs'}$, которое найдется в строке r , т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $z = s'$; иначе решения не существует. \triangleleft

Предложим явный алгоритм решения двух последних уравнений тройки для случая, когда существует единственное решение.

Процедура 3.8. Для единственного решения уравнения 3.3 по таблице T :

- (1) зайти в столбец s таблицы T ;
- (2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с переносом t ;
- (3) \bar{t} положить решением переноса x ;
- (4) строку r , в которой находится найденное значение положить решением левой неизвестной цифры y . \triangleleft

Процедура 3.9. Для единственного решения уравнения 3.4 по таблице T :

- (1) зайти в строку r таблицы T ;
- (2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с переносом t ;
- (3) \bar{t} положить решением переноса x ;
- (4) столбец s , в котором находится найденное значение положить решением правой неизвестной цифры z . \triangleleft

Предложение 3.10. Уравнения 3.3, 3.4 разрешимы для любых r, s, t , если T есть SL -таблица. Кроме того, левонеизвестное и правонеизвестное уравнения точно восстанавливают аргументы прямого действия.

Доказательство. Доказательство следует прямо из определения: если в каждой строке и каждом столбце таблицы T существует любое $t \in G$, то уравнения разрешимы для любых r, s, t . Что касается восстановления аргументов прямого действия, то ясно: если выполняется условие полулатинской таблицы, то значение с таким началом находится только в строке r , и ни в какой другой, и в столбце s , и никаком другом. Следовательно, для левонеизвестного уравнения восстановится именно r , а для правонеизвестного — единственно s . \square

4. Действия

4.1. Сложения. Для сложения чисел нам потребуются подготовленные слагаемые.

Определение 4.1. (подготовленные для сложения слагаемые) Слагаемые g, h подготовлены для сложения, если для них выполнено:

- (1) в g, h отброшены незначащие нулевые цифры;
- (2) целые и дробные части выровнены нулевыми цифрами. \triangleleft

Например, имеем $g = 99.400000, h = 002.13$. Тогда (1) $g = 99.4, h = 2.13$, (2) $g = 99.40, h = 02.13$. Заметим, если бы мы не отбросили нули на первом шаге, то результат был бы другим: $g = 099.400000, h = 002.130000$.

Зачем числа подготовливаются? Если для обычного сложения верно

$$99.40 + 02.13 = 099.400000 + 002.130000,$$

то для вводимых сложений равенство может нарушиться, поскольку результат зависит от обрамления нулями:

$$99.40 \vdash_a 02.13 \neq 099.400000 \vdash_a 002.130000.$$

Это означало бы, вообще говоря, бесконечнозначность новых сложений, а подготовка дает нам однозначный результат.

На странице 63 находятся таблицы, используемые в дальнейших примерах. Их переносы — в точности латинские диагональные квадраты взятые из [23], а переносы — произвольные перестановки их строк. Собственно говоря, ячейки можно заполнять произвольными парами цифр, но для целей вычитания, выполнимого для любых неотрицательных действительных чисел, нам нужно, чтобы в каждой строке и каждом столбце существовал любой перенос из G .

Определение 4.2. (сложение начальных цифр) Пусть в последовательности сеток ниже: символ E_r — сетка, находящаяся с справа от него, черта $|$ в символе $= |$ показывает, что справа находится сетка, ϕ — таблица действия, $r, r-1$ — номера разрядов, g_r, h_r — начальные цифры подготовленных к сложению чисел g, h из 3.1, точки «.» обозначают неизвестные цифры, необязательно равные, символ $| = |$ обозначает равенство сеток слева и справа от него и $p_r m_{r-1} = g_r \vdash_i h_r$ — решение прямого атомарного уравнения. Тогда последовательное заполнение сеток ниже есть сложение начальных цифр:

$$(4.1) \quad E_r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline r & | r-1 \\ \hline g_r & | \\ h_r & | \\ \hline & | . \\ . & | \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline r & | r-1 \\ \hline g_r & | \\ h_r & | \\ \hline & | m_{r-1} \\ p_r & | \end{array} \right|$$

<

Определение 4.3. (сложение неначальных цифр) Пусть символы сеток ниже, совпадающие с символами из 4.1, обозначают то же самое, что и в 4.1, и, кроме того: g_n, h_n — неначальные цифры подготовленных чисел из 3.1, m_n — перенос из предыдущего разряда, а $l_n \bar{l}_{n-1} = g_n +_i h_n$, $p_n \bar{p}_{n-1} = l_n +_i m_n$, $m_{n-1} \bar{m}_{n-2} = \bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1}$ — решенные прямые атомарные уравнения, причем \bar{m}_{n-2} отброшен. Тогда последовательное заполнение указанными решениями сеток ниже есть сложение неначальных цифр:

$$(4.2) \mathcal{D}_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \\ \hline \end{array} \right|$$

<

Дополнительно введем для неначального разряда равенство

$$\mathcal{D}_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline m_n & m_{n-1} \\ \hline p_n & \\ \hline \end{array} \right| = \mathcal{E}_n.$$

Пример:

$$\mathcal{D}_1 = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline 6 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & 3 \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \right| = \mathcal{E}_1.$$

Предложение 4.4. *Сетки 4.3 ниже выполнимы.*

$$(4.3) \quad E_r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ \hline & . \\ . & \end{array} \right|, \quad \mathcal{D}_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ . & . \\ m_n & \\ \hline . & . \\ . & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ m_n & . \\ \hline . & \end{array} \right| = \mathcal{E}_n.$$

Это следует из разрешимости прямого атомарного уравнения: если известны аргументы действия, то результат определен.

Определение 4.5. (сетка сложения) Сеткой сложения подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип сложения цифр		E_r	\mathcal{E}_{r-1}	\mathcal{E}_{r-2}	\dots	\mathcal{E}_0	$\mathcal{E}_{\bar{1}}$	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$	\dots
Левое слагаемое g	\vdash_i	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	\dots	g_0	$g_{\bar{1}}$	\dots
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$	\dots
Строка переносов			m_{r-1}	m_{r-1}	\dots	m_0	$m_{\bar{1}}$	\dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	$p_{\bar{1}}$	\dots

где тип сложения — сложение начальных цифр (E_r) или сложение неначальных (\mathcal{E}_n) цифр. \triangleleft

Определение 4.6. (сложение действительных чисел, их сумма) Сложением \vdash_i действительных чисел $g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

- (1) подготовить числа g, h ;
- (2) выполнить по таблице ϕ_j сложение начальных цифр $E_r = g_r \vdash_i h_r = p_r m_{r-1}$; перенос p_r есть r -ая цифра результата p ; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
- (3) для всех следующих вправо цифр $g_{n < r}, h_{n < r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j сложение неначальных цифр $\mathcal{E}_n = \mathcal{D}_n = (g_n \vdash_i h_n) \vdash_i m_n = p_n m_{n-1}$; с переносами p_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
- (4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $p = p_r p_{r-1} \dots p_0 \cdot p_{\bar{1}} \dots$ есть сумма $g \vdash_i h$. \triangleleft

Приведем пример сложения $99.8000 \vdash_2 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $99.8 \vdash_2 4.57$ (отбросили незначащие нули), $99.80 \vdash_2 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.7. Сложение чисел $99.8 +_2 4.57 = 31.19$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \overline{E_1 \mathcal{E}_0 | \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad \bar{1} \quad \bar{2} \\ \hline 9 \quad 9 \quad | \quad 8 \quad 0 \\ +_2 \quad 0 \quad 4 \quad | \quad 5 \quad 7 \\ \hline \cdot \quad | \quad \cdot \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad \cdot \quad | \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \\ \begin{array}{c} \overline{E_1} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 1 \quad | \quad 0 \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 0 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 9 \\ \hline \quad | \quad 6 \end{array} \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_1} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} \bar{1} \quad | \quad \bar{2} \\ \hline 8 \quad | \\ \hline 5 \quad | \\ \hline 6 \quad | \quad 9 \\ \hline 6 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 6 \\ \hline \quad | \quad 4 \end{array} \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_2} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} \bar{2} \quad | \quad \bar{3} \\ \hline 0 \quad | \\ \hline 7 \quad | \\ \hline 5 \quad | \quad 2 \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 9 \quad | \quad 7 \\ \hline \quad | \quad 1 \end{array} \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{E_1 \mathcal{E}_0 | \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad \bar{1} \quad \bar{2} \\ \hline 9 \quad 9 \quad | \quad 8 \quad 0 \\ +_2 \quad 0 \quad 4 \quad | \quad 5 \quad 7 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad 2 \quad 6 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad 9 \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Или подробнее для E_1 , \mathcal{E}_0 в терминах преобразований сеток:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overline{E_1} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 0 \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 0 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{E_1} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 0 \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 0 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \\ \hline 3 \quad | \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overline{\mathcal{E}_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 2 \quad | \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \quad \cdot \\ \hline 2 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 2 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 9 \\ \hline \quad | \quad \cdot \\ \hline \quad | \quad 6 \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{D_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \quad 9 \\ \hline \quad | \quad \cdot \\ \hline \quad | \quad 6 \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{\mathcal{E}_0} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad | \\ \hline 0 \quad | \quad \bar{1} \\ \hline 9 \quad | \\ \hline 4 \quad | \\ \hline 2 \quad | \quad 6 \\ \hline 1 \quad | \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Во избежание недоразумений приведем сложение одноразрядных чисел g и h . Если $p\bar{r}$ значение ячейки gh , то имеем сумму $g +_i h = p$. Вместе с примером по таблице 2 это выглядит так:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} g \quad | \\ \hline h \quad | \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} g \quad | \\ \hline h \quad | \\ \hline p \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 0 \quad | \\ \hline 2 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 0 \quad | \\ \hline 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} g \quad | \\ \hline h \quad | \\ \hline p \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} g \quad | \\ \hline h \quad | \\ \hline p \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 0 \quad | \\ \hline 2 \quad | \\ \hline \cdot \quad | \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \overline{0 \quad |} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 0 \quad | \\ \hline 2 \quad | \\ \hline 1 \quad | \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Теорема 4.8. Сложение $+_i$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g +_i h = p \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Из 4.4 следует выполнимость E_r . Мы получили перенос m_{r-1} для разряда $r-1$, следующего за начальным r , таким образом, у нас есть все аргументы для выполнимости \mathcal{E}_n при $n = r-1$. Предположим, что выполнены сетки по разряд d . Это значит, что известен перенос m_{d-1} . Следовательно сетка \mathcal{E}_{d-1} выполнима. И наконец, процедура сложения любой паре цифр g_f, h_f слагаемых всегда сопоставляет цифру $p_f \in G$, давая запись—действительное число. \square

4.2. Вычитания. Введем обозначения для вычитаний, если $g +_i h = p$:

- $p \neg_i g = h$ — левое вычитание или вычитание левого слагаемого,
- $p \neg_i h = g$ — правое вычитание или вычитание правого слагаемого,
- $p \neg_i a = b$ — вычитание без различия стороны.

Мы перенесли привычный порядок членов обычного вычитания на наши вычитания; терминологию построили по принципу теории бинарных систем, но обращаем внимание, что в литературе используется другой порядок членов. Например, BRUCK [24] приводит:

In a halfquasigroup G , left-division (\backslash) and right-division ($/$) are defined by the requirement that the equations $ab = c$, $a \backslash c = b$, $c/b = a$ are equivalent; all hold or none hold.

Нам представляется более важным сохранить преемственность с обычным вычитанием, в перспективе использования вычитаний во всех алгебраических выражениях с обычным сложением и умножением, хотя бы это и вносило некоторую долю разночтения.

Определение 4.9. (подготовленные члены вычитания) Числа p , и $f = g \vee h$ называются подготовленными к вычитанию \neg_i по сложению $+$, если они прошли подготовку в определении 4.1, в которой символы g, h заменены символами p, f . \triangleleft

Начнем определения с вычитания левых начальных и неначальных цифр.

Определение 4.10. (левое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$(4.4) \quad F_r^l = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \\ \hline p_r & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ \hline h_r & \\ \hline & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array} \right| = E_r$$

решением правонезвестного уравнения $g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание левых начальных цифр. \triangleleft

Определение 4.11. (левое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$S_n^l = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline \cdot & \\ \hline l_n & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \end{array} \right|$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n +_i m_n = p_r \bar{p}_{n-1}$, правонеизвестного $g_n +_i h_n = l_r \bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1} = m_{n-1} \bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание левых неначальных цифр. \triangleleft

Пример

$$\mathcal{S}_1^l = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & \cdot \\ \hline \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline \cdot & \\ \hline 0 & \cdot \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & 3 \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \right| = \mathcal{E}_1.$$

Аналогично сложению вводим

$$(4.5) \quad \mathcal{S}_n^l = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \hline \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline \cdot & \\ \hline m_n & \cdot \\ \hline p_n & \\ \hline \cdot & \end{array} \right| = \mathcal{F}_n^l.$$

Предложение 4.12. Сетки 4.4, 4.5 для любых $p_u, m_u, g_u, u = r \vee n$ выполняемы если ϕ является *SL*-таблицей.

Это тривиально следует из условий разрешимости атомарных уравнений.

Определение 4.13. (сетка вычитания левого слагаемого) Сеткой левого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр		F_r^l	F_{r-1}^l	F_{r-2}^l	\dots	F_0^l	F_1^l	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$	\dots
Левое слагаемое g	$+_i$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	\dots	g_0	g_1	\dots
Правое слагаемое h		\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots
Строка переносов			\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	p_1	\dots

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F_r^l) или вычитание неначальных (F_n^l) цифр. \triangleleft

Определение 4.14. (левое вычитание действительных чисел, их разность) Левым вычитанием (вычитанием левого слагаемого) $p \frown_i g = h$ для действительных чисел $p, g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

- (1) подготовить числа p, g ;
- (2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $F_r^l = g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра h_r есть r -ая цифра результата h ; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;

- (3) для всех следующих вправо цифр $p_{n<r}$, $g_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}_n^l = \mathcal{S}_n^l = (g_n \dot{+}_i h_n) \dot{+}_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами h_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
- (4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $h = h_r h_{r-1} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \dot{-}_i g = h$. \triangleleft

Приведем пример вычитания $31.1900 \dot{-}_i 99.8000$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \dot{-}_i 99.8$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \dot{-}_i 99.80$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.15. *Левое вычитание чисел $31.19 \dot{-}_i 99.80 = 04.57$.*

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \mathcal{F}_1^l \mathcal{F}_0^l | \mathcal{F}_{\bar{1}}^l \mathcal{F}_{\bar{2}}^l \\ \hline 2 \ 1 \ 0 | \bar{1} \ \bar{2} \\ \hline \dot{+}_i \quad \cdot \quad \cdot | \cdot \quad \cdot \\ \hline \quad \cdot \quad \cdot | \cdot \quad \cdot \\ \hline 3 \ 1 | 1 \ 9 \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{F}_1^l \\ \hline 1 | 0 \\ \hline 9 | \\ \hline 0 | \\ \hline 2 | \\ \hline 3 | \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{S}_0^l \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline 4 | \\ \hline 0 | 6 \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 9 \\ \hline \quad | 6 \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{S}_{\bar{1}}^l \\ \hline \bar{1} | \bar{2} \\ \hline 8 | \\ \hline 5 | \\ \hline 6 | 9 \\ \hline 6 | \\ \hline 1 | 6 \\ \hline \quad | 4 \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{S}_{\bar{2}}^l \\ \hline \bar{2} | \bar{3} \\ \hline 0 | \\ \hline 7 | \\ \hline 5 | 2 \\ \hline 4 | \\ \hline 9 | 7 \\ \hline \quad | 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{F}_1^l \mathcal{F}_0^l | \mathcal{F}_{\bar{1}}^l \mathcal{F}_{\bar{2}}^l \\ \hline 2 \ 1 \ 0 | \bar{1} \ \bar{2} \\ \hline \dot{+}_i \quad 9 \ 9 | 8 \ 0 \\ \hline \quad 0 \ 4 | 5 \ 7 \\ \hline \quad \quad 2 | 6 \ 4 \\ \hline 3 \ 1 | 1 \ 9 \end{array}
 \end{array}$$

Или подробнее для \mathcal{F}_1^l , \mathcal{F}_0^l в терминах преобразований сеток:

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}_1^l \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 0 \\ \hline 9 | \\ \hline \cdot | \\ \hline 3 | \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{F}_1^l \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 0 \\ \hline 9 | \\ \hline 0 | \\ \hline 2 | \\ \hline 3 | \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline \cdot | \\ \hline 2 | \cdot \\ \hline 1 | \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{S}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline \cdot | \\ \hline 2 | \cdot \\ \hline 1 | \cdot \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{S}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline 0 | \cdot \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 9 \\ \hline \quad | \cdot \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{S}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline 4 | \\ \hline 0 | 6 \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 9 \\ \hline \quad | \cdot \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{S}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline 4 | \\ \hline 0 | 6 \\ \hline 2 | \\ \hline 1 | 9 \\ \hline \quad | 6 \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{F}_0^l \\ \hline 2 | \\ \hline 0 | \bar{1} \\ \hline 9 | \\ \hline 4 | \\ \hline 2 | 6 \\ \hline 1 | \end{array}$$

Определение 4.16. (правое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.1. Тогда восстановление сетки

сложения начальных цифр

$$(4.6) \quad F_r^r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline \cdot & \\ h_r & \\ \hline & \cdot \\ p_r & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ \hline & m_{r-1} \\ p_r & \end{array} \right| = E_r$$

решением левонеизвестного уравнения $g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание правых начальных цифр. \triangleleft

Определение 4.17. (правое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$S_n^r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline \cdot & \\ h_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline \cdot & \\ h_n & \\ \hline l_n & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \end{array} \right|$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n +_i m_n = p_r \bar{p}_{n-1}$, левонеизвестного $g_n +_i h_n = l_r \bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1} = m_{n-1} \bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание правых неначальных цифр. \triangleleft

Пример

$$S_1^r = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \cdot & \\ 0 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & \cdot \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \cdot & \\ 0 & \\ \hline 0 & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline & \end{array} \right| = \mathcal{E}_1.$$

Как для сложения и левого вычитания нам понадобится

$$(4.7) \quad S_n^r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline \cdot & \\ h_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \hline & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline \cdot & \\ h_n & \\ \hline m_n & \cdot \\ p_n & \end{array} \right| = \mathcal{F}_n^r.$$

Предложение 4.18. *Сетки 4.6, 4.7 для любых p_u, m_u, h_u , $u = r \vee n$ выполняемы если ϕ является SL -таблицей.*

Почему так происходит, мы объясняли в левом случае.

Определение 4.19. (сетка вычитания правого слагаемого) Сеткой правого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр	F_r^r	\mathcal{F}_{r-1}^r	\mathcal{F}_{r-2}^r	\dots	\mathcal{F}_0^r	\mathcal{F}_1^r	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$ \dots
Левое слагаемое g	\vdash_i	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\dots
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$ \dots
Строка переносов			\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	$p_{\bar{1}}$ \dots

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F_r^r) или вычитание неначальных (\mathcal{F}_n^r) цифр. \triangleleft

Определение 4.20. (правое вычитание действительных чисел, их разность) Правым вычитанием (вычитанием правого слагаемого) $p \vdash_i h = g$ для действительных чисел $p, h, g \geq 0$ будет выполнение шагов:

- (1) подготовить числа p, h ;
- (2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $F_r^r = g_r \vdash_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра g_r есть r -ая цифра результата g ; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
- (3) для всех следующих вправо цифр $p_{n < r}, h_{n < r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}_n^r = \mathcal{S}_n^r = (g_n \vdash_i h_n) \vdash_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами g_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
- (4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $g = g_r g_{r-1} \dots g_0 g_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \vdash_i h = g$. \triangleleft

Приведем пример вычитания $31.1900 \vdash_2 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \vdash_2 4.57$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \vdash_2 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.21. *Правое вычитание чисел $31.19 \vdash_2 04.57 = 99.80$.*

$F_1^r \mathcal{F}_0^r \mathcal{F}_1^r \mathcal{F}_2^r$	F_1^r	\mathcal{S}_0^r	\mathcal{S}_1^r	\mathcal{S}_2^r	$F_1^r \mathcal{F}_0^r \mathcal{F}_1^r \mathcal{S}_2^r$
$\begin{array}{c c} 2 & 1 \ 0 \end{array} \begin{array}{c c} \bar{1} & \bar{2} \end{array}$	$\begin{array}{c c} 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & \bar{1} \end{array}$	$\begin{array}{c c} \bar{1} & \bar{2} \end{array}$	$\begin{array}{c c} \bar{2} & \bar{3} \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & 1 \ 0 \end{array} \begin{array}{c c} \bar{1} & \bar{2} \end{array}$
$\vdash_2 \begin{array}{c c} \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c c} \cdot & \cdot \end{array}$	$\begin{array}{c c} 9 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 9 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 8 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & \end{array}$	$\vdash_2 \begin{array}{c c} 9 & 9 \end{array} \begin{array}{c c} 8 & 0 \end{array}$
$\begin{array}{c c} 0 & 4 \end{array} \begin{array}{c c} 5 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 4 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 5 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 7 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 4 \end{array} \begin{array}{c c} 5 & 7 \end{array}$
$\begin{array}{c c} \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c c} \cdot & \cdot \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 6 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 5 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & 6 \end{array} \begin{array}{c c} 4 & \end{array}$
$\begin{array}{c c} 3 & 1 \end{array} \begin{array}{c c} 1 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 3 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 6 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 4 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 3 & 1 \end{array} \begin{array}{c c} 1 & 9 \end{array}$
		$\begin{array}{c c} 1 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 1 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 9 & 7 \end{array}$	
		$\begin{array}{c c} \bar{6} & \end{array}$	$\begin{array}{c c} \bar{4} & \end{array}$	$\begin{array}{c c} \bar{1} & \end{array}$	

Или подробнее для F_1^r, \mathcal{F}_0^r в терминах преобразований сеток:

$$\begin{array}{c} F_1^r \\ \hline 2| \\ \hline 1|0 \\ \hline .| \\ \hline 0| \\ \hline .| \\ \hline 3| \end{array} = \begin{array}{c} F_1^r \\ \hline 2| \\ \hline 1|0 \\ \hline 9| \\ \hline 0| \\ \hline 2| \\ \hline 3| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline .| \\ \hline 4| \\ \hline 2|. \\ \hline 1| \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline .| \\ \hline 4| \\ \hline .|. \\ \hline 2| \\ \hline 1|. \\ \hline .| \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline .| \\ \hline 4| \\ \hline 0|. \\ \hline 2| \\ \hline 1|9 \\ \hline .| \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline 9| \\ \hline 4| \\ \hline 0|6 \\ \hline 2| \\ \hline 1|9 \\ \hline .| \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline 9| \\ \hline 4| \\ \hline 0|6 \\ \hline 2| \\ \hline 1|9 \\ \hline |6 \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{F}_0^r \\ \hline 2| \\ \hline 0|\bar{1} \\ \hline 9| \\ \hline 4| \\ \hline 2|6 \\ \hline 1| \end{array}$$

- Теорема 4.22.** (1) Если для любых $p, f \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $p \bar{-} f = d$, то $d \in \mathbb{R}_+$.
(2) Если таблица ϕ — полулатинская (SL), то $p \bar{-} f = d_1$ и $p \bar{-} f = d_2$ выполнимы одновременно для любых $p, f \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Если вычитание выполнимо, то оно цифрам аргументов p, f разряда k ставит в соответствие цифру результата d того же разряда, а поскольку $p, f \in \mathbb{R}_+$, то $d \in \mathbb{R}_+$.

(2) Условия выполнимости F, \mathcal{F} -сеток рассмотрены в предложениях 4.12, 4.18. Так как вычитание интерпретируется как восстановление сложения, то принцип доказательства выполнимости сложения переносим в данное доказательство, следовательно теорема доказана. \square

В каком отношении находятся сложение $+$ и вычитание $\bar{-}$? Рассмотрим сложение $04.50 +_2 39.43 = 06.12$ по таблице 2 с левым и правым вычитанием для него, представленными в примерах 4.23, 4.24

Пример 4.23. Вычитание левого слагаемого $6.12 \bar{-}_2 4.5 = 3.43$.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \ 3210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \\ \hline +_2 \ 4|50 \\ \hline .|. \\ \hline .|. \\ \hline 6|12 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0|\bar{1} \\ \hline 3| \\ \hline |8 \\ \hline 6| \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{1}|\bar{2} \\ \hline 4| \\ \hline 9|7 \\ \hline 8| \\ \hline 1|\bar{5} \\ \hline |0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{2}|\bar{3} \\ \hline 0| \\ \hline 3| \\ \hline 0|7 \\ \hline 0| \\ \hline 2|0 \\ \hline |7 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \ 3210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \\ \hline +_2 \ 4|50 \\ \hline 3|43 \\ \hline |80 \\ \hline 6|12 \end{array} \end{array}$$

Когда подготовка главных аргументов вычитания дает более короткие, чем в сложении, целые части (первые две сетки) —

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cccccc}
 & \phi & r & r-1 & \dots & k & \dots & 0 \\
 \hline
 +_i & g_r & g_{r-1} & \dots & g_k & \dots & g_0 \\
 & h_r & h_{r-1} & \dots & h_k & \dots & h_0 \\
 \hline
 & m_{r-1} & \dots & m_k & \dots & m_0 \\
 \hline
 & p_r & p_{r-1} & \dots & p_k & \dots & p_0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|cccccc}
 & \phi & k & k-1 & \dots & 0 \\
 \hline
 +_i & g_k & g_{k-1} & \dots & g_0 \\
 & . & . & \dots & . \\
 \hline
 & . & \dots & . \\
 \hline
 & p_k & p_{k-1} & \dots & p_0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|cccccc}
 & \phi & r & r-1 & \dots & k & \dots & 0 \\
 \hline
 +_i & 0_r & 0_{r-1} & \dots & g_k & \dots & g_0 \\
 & h_r & h_{r-1} & \dots & h_k & \dots & h_0 \\
 \hline
 & m_{r-1} & \dots & m_k & \dots & m_0 \\
 \hline
 & 0_r & 0_{r-1} & \dots & p_k & \dots & p_0
 \end{array}
 \end{array}$$

— то p и g начинаются нулями (третья сетка). Значит, дописав нужное число нулей спереди к подготовленным главным аргументам вычитания, мы получим записи, идентичные записям одноименных членов сложения; для них мы повторяем доказательство первой части.

Повтором имеющихся приемов к дробным частям и правому вычитанию мы завершим доказательство теоремы. \square

4.3. Умножения. Умножение будет обозначаться либо символом $*_j^i$, либо \cdot_j^i , когда последний будет удобнее для чтения.

4.3.1. Подготовка чисел к умножению. Подготовка определит, сколько будет цифр в сомножителях перед умножением и количество цифр в будущем произведении и из множества представлений сомножителей, обрамленных незначащими нулями, выберет одно, чем задаст однозначность умножения.

Процедура 4.26. Для чисел 3.1:

- (1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей сомножителей, получив $g_{a \leq a'}, h_{c \leq c'}$ — старшие значащие цифры, $g_{b'' \geq b'}, h_{d'' \geq d'}$ — младшие значащие цифры конечных дробей;
- (2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q :

$$e = a + c + 1;$$

- (3) если хотя бы один сомножитель является бесконечной дробью, перейти к шагу 5, иначе посчитать длину L выравнивания подготовленных членов как

$$L = \max\{a + |b''| + 1, c + |d''| + 1, e + 1 = a + c + 2\};$$

- (4) выровнять второй сомножитель по длине L , в дробной части дописывая незначащие нули, получив

$$(4.8) \quad \begin{cases} g = \underbrace{g_a \dots g_0 \cdot g_{\bar{1}} \dots g_b}_L, \\ h = \underbrace{h_c \dots h_0 \cdot h_{\bar{1}} \dots h_d}_L, \\ q = \underbrace{q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots q_f}_{L} \end{cases}$$

и остановив подготовку членов умножения;

- (5) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$(4.9) \quad \begin{cases} g = g_a \dots g_0 \cdot g_{\bar{1}} \dots, \\ h = h_c \dots h_0 \cdot h_{\bar{1}} \dots, \\ q = \underbrace{q_e \dots q_0}_{a+c+2} \cdot q_{\bar{1}} \dots \end{cases}$$

завершить подготовку членов умножения. \triangleleft

Определение 4.27. (символы подготовки) Символы a, b, c, d, e, f из процедуры 4.26 называются символами подготовки к умножению, L — длиной выравнивания, а числа g, h, q после данной процедуры — подготовленными членами умножения. \triangleleft

Пусть требуется умножить $g *_j^i h = 00.120 *_j^i 034.5670 = q$. Запишем в таблицах ниже левый сомножитель вверху, правый посередине, результат будет размещаться ниже под чертой:

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g *_j^i & 00 120 \\ h *_j^i & 034 5670 \\ \hline q & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline *_j^i & 0 12 \\ *_j^i & 34 567 \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline *_j^i & 0 12 \\ *_j^i & 34 567 \\ \hline \dots & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline *_j^i & 0 1200 \\ *_j^i & 34 567 \\ \hline \dots & \dots \end{array}$

Выполняем отбрасывание незначащих нулей, получая в примере $0.12 *_j^i 34.567$ (колонка B). Следующим шагом будет вычисление номера разряда старшей цифры целой части произведения сложением $2 = 1 + 0 + 1$ (в примере в колонке C отметили ее и всю целую часть точками). Длина выравнивания равняется $L = \max\{0 + |-2| + 1, 1 + |-3| + 1, 2 + 1\} = 5$. В D подготовка конечных дробей закончена дописыванием 00 у g , дописыванием двух точек у q .

Если бы хотя бы один сомножитель был бесконечной дробью, например, $00.12 *_j^i 034.(5)$, то после вычисления e мы перешли бы к дополнению другого сомножителя до бесконечной дроби дописыванием незначащих нулей с получением

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ \hline g *_j^i & 00 12 \\ h *_j^i & 034 555 \dots \\ \hline q & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ \hline *_j^i & 0 12 \\ *_j^i & 34 555 \dots \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ \hline *_j^i & 0 12 \\ *_j^i & 34 555 \dots \\ \hline \dots & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ \hline *_j^i & 0 120 \dots \\ *_j^i & 34 555 \dots \\ \hline \dots & \dots \dots \end{array}$

Произведение q тоже будет бесконечной дробью. А подготовленные к умножению одноразрядные сомножители-числа не требуют отбрасывания незначащих нулей — пустая B — и дадут

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g *_j^i & 0 \\ h *_j^i & 4 \\ \hline q & \end{array}$		$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline *_j^i & 0 \\ *_j^i & 4 \\ \hline \dots & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline *_j^i & 0 0 \\ *_j^i & 4 0 \\ \hline \dots & \end{array}$

поскольку $e = 0 + 0 + 1$, $L = \max\{0 + |0| + 1, 0 + |0| + 1, 1 + 1\} = 2$

4.3.2. Умножение. Как в обычном умножении, мы сначала будем перемножать цифры одного слагаемого на второе слагаемое, а затем складывать полученные произведения, используя модификацию сложения.

Определение 4.28. (сетка c -сложения) Пусть c, d, m, p — (непрерывные) последовательности десятичных цифр, занумерованных целыми числами, представленные в таблице ниже:

Тип сложения цифр					E_{u-1}	\mathcal{E}_{u-2}	\mathcal{E}_{u-3}	\dots	
Таблица, номера разрядов		ϕ	$t \in \mathbb{Z}$	\dots	u	$u-1$	$u-2$	$u-3$	\dots
Запись c		\vdash_ϕ	c_t	\dots	c_u	c_{u-1}	c_{u-2}	c_{u-3}	\dots
Запись d						d_{u-1}	d_{u-2}	d_{u-3}	\dots
Переносы m							m_{u-2}	m_{u-3}	\dots
Запись p			c_t	\dots	c_u	p_{u-1}	p_{u-2}	p_{u-3}	\dots

Тогда таблица выше называется сеткой c -сложения $c +_{\phi} d$ записей c и d . \triangleleft

Примечание 4.29. (о сносимых цифрах) Сносимые цифры будут иметь другие обозначения, продиктованные именем строки, в которой они находятся. \triangleleft

Определение 4.30. (c -сложение, c -сумма) Заполнение сетки c -сложения по шагам:

- (1) символы $c_t \dots c_u$, из которых все или некоторые, быть может, равны нулю, для которых нет соответственных символов $d_t \dots d_u$ записать в строку p ;
- (2) для разряда $u-1$ выполнить сложение начальных цифр E_{u-1} , записывая результат $c_{u-1} +_{\phi} d_{u-1} = p_{u-1} m_{u-2}$ в строки p, m , столбцы $u-1, u-2$ соответственно;
- (3) начиная с разряда $u-2$ выполнить сложение неначальных цифр \mathcal{E} , записывая результат $c_{u-n} +_{\phi} d_{u-n} = p_{u-n} m_{u-n-1}$ в строки p, m , столбцы $u-n, u-n-1$ соответственно;

— называется c -сложением записей c, d , запись p называется c -суммой данных записей, а символы $c_t \dots c_u$ — сносимые (в c -сумму) цифры, называемые так же поднимаемыми (из c -суммы) цифрами. \triangleleft

Оно определено не только для чисел, но и для «псевдоцифр» — непрерывных последовательностей десятичных цифр, с начальным разрядом-целым числом.

Примеры этого действия будут в примере умножения.

Определение 4.31. (умножение цифр сомножителей, их произведение) Если g_v, h_w — цифры правого и левого сомножителей g и h из 3.1, то взятие значения $(Q\bar{Q})_{g_v h_w}$ из ячейки $g_v h_w$ таблицы T и присвоение подындкса $v + w + 1$ для Q , подындкса $v + w$ для \bar{Q} и надындкса v обоим цифрам значения ячейки называется умножением данных цифр, а значение ячейки — их произведением. Все вместе обозначается

$$(4.10) \quad g_v *_j^i h_w = (Q\bar{Q})_{g_v h_w} = Q_{v+w+1}^v \bar{Q}_{v+w}^v.$$

Например, имеем $4.5 = 4_0.5_1$, $39 = 3_1 9_0$. Тогда \triangleleft

$$5_1 *_j^3 3_1 = (06)_{53} = 0_{-1+1+1}^1 6_{-1+1}^1 = 0_1^1 6_0^1.$$

Определение 4.32. (сетка умножения цифры на сомножитель) Если g_v цифра левого сомножителя g и h из 3.1 — правый сомножитель, c — номер старшей цифры числа h , $t = v + c$ то таблица ниже

	Тип сложения цифр	$t+1$	E_t	\mathcal{E}_{t-1}	\mathcal{E}_{t-2}	...
	Номера разрядов		t	$t-1$	$t-2$...
блок v	q^v — непереносы по $*_j^i$	Q_{t+1}^v	Q_t^v	Q_{t-1}^v	Q_{t-2}^v	...
	\bar{q}^v — переносы по $*_j^i$		\bar{Q}_t^v	\bar{Q}_{t-1}^v	\bar{Q}_{t-2}^v	...
	m^v — переносы по $+$			M_{t-1}^v	M_{t-2}^v	...
	$p^v = q^v + \bar{q}^v = g_v *_j^i h$	Q_{t+1}^v	P_t^v	P_{t-1}^v	P_{t-2}^v	...

называется сеткой умножения $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h .¹⁰ \triangleleft

Определение 4.33. (умножение цифры на сомножитель) Умножением $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h называется заполнение сетки умножения из определения 4.32 по шагам:

- (1) умножить цифру g_v на каждую цифру $h_{w \leq c}$ правого сомножителя h и неперенос Q_{v+w+1}^v произведения 4.10 записать в строку q^v , столбец $v + w + 1$ сетки, а перенос \bar{Q}_{v+w}^v — в строку \bar{q}^v , в столбец $v + w$;
- (2) выполнить c -сложение строк q^v, \bar{q}^v ;

Строка $p^v = Q_{t+1}^v P_t^v P_{t-1}^v P_{t-2}^v \dots$ есть произведение $g_v *_j^i h$ (незначащие нули сохраняются). \triangleleft

Пример 4.34. Умножение $5_1 *_1^3 1_1 9_0.7_1 5_2$ по таб. 3 со сложением по таб. 1.

	Номера разрядов	3	2	1	0
1	q^1	6	1	2	9
	\bar{q}^1		1	2	9
	m^1			4	7
	$p^1 = 5_1 *_1^3 1_1 9_0.7_1 5_2$	= 6	1	3	3

Далее определяем сетку умножения чисел.

Определение 4.35. (сетка умножения чисел-конечных дробей) Сетка 4.1 на странице 29 умножения $g *_j^i h$ чисел-конечных дробей состоит:

- (1) строка -1 — идентификаторы таблицы умножения λ и таблицы сложения ϕ , номера разрядов; строка 0 — символы подготовки; строки $1 - 3$ — подготовленные члены умножения (цифры q_s произведения q неизвестны); строка 3 носит вспомогательную функцию, предназначенную, прежде всего, для деления;
- (2) ниже идет блок 2 вычислений произведений цифр $g_k *_j^i h = p^k$, $a \geq k \geq b$; блок 2 — это последовательность сверху вниз подблоков $a, a-1, \dots, b+1, b$ из определения 4.32;
- (3) ниже идет блок Σ последовательного суммирования произведений $g_k *_j^i h = p^k$ из блока 2; верхняя его строка $\Sigma^a = p^a$ составляет однострочный блок $\binom{a}{a}$, а всякий остальной блок $\binom{a}{k}$, $k < a$, состоит из трех строк: p^k —

¹⁰Иногда идентификатором i умножения будет выступать идентификатор таблицы умножения, используемого в данном умножении $*_j^i$.

копии одноименной строки блока 2, n^k — строки переносов c -сложения $\Sigma^{k+1} +_i p^k = \Sigma^k$, и, собственно, Σ^k — строки упомянутой c -суммы.

Символы разрядов $u < f$ всех строк блоков 2, Σ не записываются. \triangleleft

ТАБЛИЦА 4.1. Сетка умножения к определению 4.35 на странице 28

-1	λ, ϕ	e	$e-1$	$e-2$...	c	...	a	...	f	...	d	...	b
0		e				c		a		f		d		b
1		g						g_a	...	g_f	...	g_d	...	g_b
2		h				h_c	...	h_a	...	h_f	...	h_d		
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	...	q_c	...	q_a	...	q_f			
2	a	q^a	Q_e^a	Q_{e-1}^a	Q_{e-2}^a	...	Q_c^a	...	Q_a^a	...	Q_f^a			
		\bar{q}^a		\bar{Q}_{e-1}^a	\bar{Q}_{e-2}^a	...	\bar{Q}_c^a	...	\bar{Q}_a^a	...	\bar{Q}_f^a			
		m^a			M_{e-2}^a	...	M_c^a	...	M_a^a	...	M_f^a			
		p^a	P_e^a	P_{e-1}^a	P_{e-2}^a	...	P_c^a	...	P_a^a	...	P_f^a			
	$a-1$	q^{a-1}		Q_{e-1}^{a-1}	Q_{e-2}^{a-1}	...	Q_c^{a-1}	...	Q_a^{a-1}	...	Q_f^{a-1}			
		\bar{q}^{a-1}			\bar{Q}_{e-2}^{a-1}	...	\bar{Q}_c^{a-1}	...	\bar{Q}_a^{a-1}	...	\bar{Q}_f^{a-1}			
		m^{a-1}				...	M_c^{a-1}	...	M_a^{a-1}	...	M_f^{a-1}			
		p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	...	P_c^{a-1}	...	P_a^{a-1}	...	P_f^{a-1}			
	$a-2$	q^{a-2}			Q_{e-2}^{a-2}	...	Q_c^{a-2}	...	Q_a^{a-2}	...	Q_f^{a-2}			
		\bar{q}^{a-2}				...	\bar{Q}_c^{a-2}	...	\bar{Q}_a^{a-2}	...	\bar{Q}_f^{a-2}			
		m^{a-2}				...	M_c^{a-2}	...	M_a^{a-2}	...	M_f^{a-2}			
		p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	...	P_c^{a-2}	...	P_a^{a-2}	...	P_f^{a-2}			
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	b	q^b									Q_f^b			
		\bar{q}^b												
		m^b												
		p^b									P_f^b			
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ_e^a	Σ_{e-1}^a	Σ_{e-2}^a	...	Σ_c^a	...	Σ_a^a	...	Σ_f^a			
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	...	P_c^{a-1}	...	P_a^{a-1}	...	P_f^{a-1}			
		n^{a-1}			N_{e-2}^{a-1}	...	N_c^{a-1}	...	N_a^{a-1}	...	N_f^{a-1}			
		Σ^{a-1}	Σ_e^{a-1}	Σ_{e-1}^{a-1}	Σ_{e-2}^{a-1}	...	Σ_c^{a-1}	...	Σ_a^{a-1}	...	Σ_f^{a-1}			
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	...	P_c^{a-2}	...	P_a^{a-2}	...	P_f^{a-2}			
		n^{a-2}				...	N_c^{a-2}	...	N_a^{a-2}	...	N_f^{a-2}			
		Σ^{a-2}	Σ_e^{a-2}	Σ_{e-1}^{a-2}	Σ_{e-2}^{a-2}	...	Σ_c^{a-2}	...	Σ_a^{a-2}	...	Σ_f^{a-2}			
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$\binom{a}{b}$	p^b									P_f^b			
		n^b												
		Σ^b	Σ_e^b	Σ_{e-1}^b	Σ_{e-2}^b	...	Σ_c^b	...	Σ_a^b	...	Σ_f^b			

На странице 30 приводим сетку 4.2 вместе с примером умножения.

ТАБЛИЦА 4.2. Сетка и пример умножения для случая $g_1 g_0 \cdot g_{\bar{1}} g_{\bar{2}} *^i_j h_0 \cdot h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} h_{\bar{3}}$

-1		$2, 0$	$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$						$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$
0			$e \ a \ c \mid f \ b \ d$						$e \ a \ c \mid f \ b \ d$
1		g	$g_1 \ g_0 \mid g_{\bar{1}} \ g_{\bar{2}}$						$6 \ 0 \mid 2 \ 1$
2		h	$h_0 \mid h_{\bar{1}} \ h_{\bar{2}} \ h_{\bar{3}}$						$0 \mid 2 \ 4 \ 3$
3		x	$x_2 \ x_1 \ x_0 \mid x_{\bar{1}}$						$x_2 x_1 x_0 \mid x_{\bar{1}}$
4	2	1	q^1	$Q_2^1 Q_1^1 Q_0^1 \mid Q_{\bar{1}}^1$					$9 \ 4 \ 3 \mid 5$
5			\bar{q}^1	$\bar{Q}_1^1 \bar{Q}_0^1 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^1$					$5 \ 7 \mid 0$
6			m^1	$M_0^1 \mid M_{\bar{1}}^1$					$1 \mid 0$
7			$p^1 = g_1 *^2_0 h$	$P_2^1 P_1^1 P_0^1 \mid P_{\bar{1}}^1$					$9 \ 7 \ 4 \mid 7$
8		0	q^0	$Q_1^0 Q_0^0 \mid Q_{\bar{1}}^0$					$2 \ 1 \mid 8$
9			\bar{q}^0	$\bar{Q}_0^0 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^0$					$0 \mid 9$
10			m^0	$\mid M_{\bar{1}}^0$					$\mid 5$
11			$p^0 = g_0 *^2_0 h$	$P_1^0 P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$					$2 \ 3 \mid 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	$Q_0^{\bar{1}} \mid Q_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$6 \mid 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	$\mid \bar{Q}_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$\mid 7$
14			$m^{\bar{1}}$	\mid					\mid
15			$p^{\bar{1}} = g_{\bar{1}} *^2_0 h$	$P_0^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$6 \mid 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	$\mid Q_{\bar{1}}^{\bar{2}}$					$\mid 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	\mid					\mid
18			$m^{\bar{2}}$	\mid					\mid
19			$p^{\bar{2}} = g_{\bar{2}} *^2_0 h$	$\mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$					$\mid 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1 = p^1$	$\Sigma_2^1 \Sigma_1^1 \Sigma_0^1 \mid \Sigma_{\bar{1}}^1$					$9 \ 7 \ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^0	$P_1^0 P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$					$2 \ 3 \mid 5$
22			n^0	$N_0^0 \mid N_{\bar{1}}^0$					$3 \mid 9$
23			$\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$	$\Sigma_2^0 \Sigma_1^0 \Sigma_0^0 \mid \Sigma_{\bar{1}}^0$					$9 \ 4 \ 7 \mid 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	$P_0^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$6 \mid 3$
25			$n^{\bar{1}}$	$\mid N_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}}$	$\Sigma_2^{\bar{1}} \Sigma_1^{\bar{1}} \Sigma_0^{\bar{1}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{1}}$					$9 \ 4 \ 5 \mid 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$	$\mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$					$\mid 8$
28			$n^{\bar{2}}$	\mid					\mid
29			$\Sigma^{\bar{2}} = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^{\bar{2}}$	$\Sigma_2^{\bar{2}} \Sigma_1^{\bar{2}} \Sigma_0^{\bar{2}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{2}}$					$9 \ 4 \ 5 \mid 1$

Определение 4.36. (умножение чисел-конечных дробей, их произведение)
 Умножение конечных дробей $g *^i_j h = q$ — это выполнение шагов:

- (1) подготовить члены-конечные дроби умножения g, h, q ;
- (2) определить таблицы λ, ϕ ;
- (3) выполнить умножение $g_k *^i_j h$, $a \leq k \leq b$ цифры g_k левого сомножителя g на правый сомножитель h для всех k и вписать результат в блок k ;

- (4) последовательно в блоках $\binom{a}{a-1}, \dots, \binom{a}{b}$ выполнить c -сложения полученных произведений p^a, \dots, p^b :

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots, \quad \Sigma^b = \Sigma^{b+1} +_i p^b.$$

Число $\Sigma^b = q$ есть произведение чисел-конечных дробей g, h . ◁

Разбираем пример $0060.21 *_j^i 0.243$ страницы 30. Подготовка:

A	B	C	D
$\begin{array}{c c} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & 0060 21 \\ h *_j^i & 0 243 \\ \hline q & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 60 21 \\ *_j^i & 0 243 \\ \hline & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 60 21 \\ *_j^i & 0 243 \\ \hline \dots & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 60 21 \\ *_j^i & 0 243 \\ \hline \dots & \end{array}$

— отбросили незначащие нули (B); посчитали $e = a + c + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ — разряд старшей цифры произведения и отметили целую его часть точками (C); посчитали длину выравнивания $L = 4 = \max\{1 + |-2| + 1, 0 + |-3| + 1, 2 + 1\}$, выравнивали все члены по ней (D).

Определим таблицу умножения $\lambda = 2$ и таблицу сложения $\phi = 0$. Производим умножение $6_1 *_0^2 0_0.2_{\bar{1}}4_{\bar{2}}3_{\bar{3}}$. Индекс 1 при 6 определяет номер v блока. Перемножаем цифры $6_1 *_0^2 0_0$:

$$6_1 *_0^2 0_0 = (95)_{60} = 9_{1+0+1}^1 5_{1+0}^1 = 9_2^1 5_1^1 = Q_2^1 \bar{Q}_1^1.$$

Неперенос $9 = 9_2^1 = Q_2^1$ записываем в строку q^1 , столбец 2, определяемый подындексом 2; перенос $\bar{5} = \bar{5}_1^1 = \bar{Q}_1^1$ — в строку \bar{q}^1 . В таблице примера надчеркивания и индексы опущены, чтобы не загромождать значения ячеек. Аналогично с другими цифрами:

$$\begin{aligned} 6_1 *_0^2 2_{\bar{1}} &= (47)_{62} = 4_{1-1+1}^1 7_{1-1}^1 = 4_1^1 7_0^1 = Q_1^1 \bar{Q}_0^1 \\ 6_1 *_0^2 4_{\bar{2}} &= (30)_{64} = 3_{1-2+1}^1 0_{1-2}^1 = 3_0^1 0_{\bar{1}}^1 = Q_0^1 \bar{Q}_{\bar{1}}^1 \\ 6_1 *_0^2 3_{\bar{3}} &= (51)_{63} = 5_{1-3+1}^1 1_{1-3}^1 = 5_{\bar{1}}^1 1_2^1 = Q_{\bar{1}}^1 \bar{Q}_2^1. \end{aligned}$$

Перенос 1 последнего произведения цифр отбрасываем, поскольку его разряд -2 правее $f = -1$.

Выполняем c -сложение полученных строк $q^1 +_0 \bar{q}^1 = 9_2^1 4_1^1 3_0^1 5_{\bar{1}}^1 + 5_{\bar{1}}^1 7_0^1 0_{\bar{1}}^1 = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_{\bar{1}}^1$. Произведение $6_1 *_0^2 0_0.2_{\bar{1}}4_{\bar{2}}3_{\bar{3}} = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_{\bar{1}}^1$ готово.

Выполнив аналогичные вычисления для умножений других цифр левого сомножителя на правый сомножитель, мы заполним оставшиеся блоки 1 — 2. Скопируем строки 7, 11, 15, 19 в строки 20, 21, 24, 27 соответственно и перейдем к блокам строк 20 — 29. Последовательно произведя уже знакомые нам c -сложения для $\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$, $\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}}$, $\Sigma^2 = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^2 = g *_0^2 h$, мы завершим умножение $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$.

Приведем пример умножения одноразрядных чисел, поскольку оно не является простым взятием значения ячейки таблицы подстановок, как это имеет место в классической арифметике. Для этого продолжим пример подготовки на странице 26, заменив 4 на 5, выполнив его по таблицам: 2 — для умножения, 0 — сложения (для экономии высоты таблицы символы внесены слева от знака

умножения):

	210		12345
$*_0^2$	0		0
	5		0
	..		
	92		
	6		
	93		
	9		
	9		
	93		
	9		
	92		

Таким образом, имеем $0 *_0^2 5 = 92$ вместо 96, если бы просто взяли значение ячейки 05.

Известные определения умножения конечных дробей изменим на бесконечный случай

Определение 4.37. (сетка умножения бесконечных дробей) Таблица 4.3 на странице 33 повторяющая сетку умножения конечных дробей из определения 4.35 страницы 28, но продолженная бесконечно вправо и вниз, называется сеткой умножения бесконечных дробей. \triangleleft

Определение 4.38. (умножение чисел-бесконечных дробей, их произведение) Умножением $g *_j^i h = q$ бесконечных дробей называется выполнение шагов:

- (1) подготовить члены-бесконечные дроби умножения g, h, q ;
- (2) выполнить умножение $g_k *_j^i h_c h_{c-1} \dots h_0 . h_1 \dots$, где $k = a, a-1, \dots$ цифры g_k левого сомножителя на правый сомножитель h и вписать результат в блок k ;
- (3) последовательно выполнить в блоках $\binom{a}{a}, \binom{a}{a-1}, \dots$ c -сложения полученных произведений p^a, p^{a-1}, \dots :

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots$$

Предел $\lim_{k \rightarrow -\infty} \Sigma^k = q$ последовательности $\{\Sigma^k\}$ сумм выше есть произведение бесконечных дробей g, h . \triangleleft

Теорема 4.39. Умножение $*_j^i$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g *_j^i h = q \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Для любых цифр-сомножителей g_k, h_j , выполнимо умножение $g_k *_j^i h_j$, следовательно, можно получить любые строки q^k, \bar{q}^k . c -сложение $q^k +_i \bar{q}^k = p^k$ выполнимо в силу выполнимости сложения $+_i$. Это же верно для сложения $\Sigma^k = \Sigma^{k+1} +_i p^k$, при любом $k < a$. Для конечных дробей получаем неотрицательное действительное число.

Покажем, что предел $\lim_{k \rightarrow -\infty} \Sigma^k = q$ существует для любых g, h . В самом деле, мы видим, что в частичную сумму Σ^k сносится $a - k$, $k < a$, начальных

ТАБЛИЦА 4.3. Сетка умножения к определению 4.37 на странице 32

-1	λ, ϕ	e	$e-1$	$e-2$	\dots	c	\dots	a	\dots	0	$\bar{1}$		
0		e				c		a					
1		g						g_a	\dots	g_0	$g_{\bar{1}}$	\dots	
2		h				h_c	\dots	h_a	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$	\dots	
<hr/>													
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	\dots	q_c	\dots	q_a	\dots	q_0	$q_{\bar{1}}$ \dots	
<hr/>													
2	a	q^a	Q_e^a	Q_{e-1}^a	Q_{e-2}^a	\dots	Q_c^a	\dots	Q_a^a	\dots	Q_0^a	$Q_{\bar{1}}^a$ \dots	
		\bar{q}^a		\bar{Q}_{e-1}^a	\bar{Q}_{e-2}^a	\dots	\bar{Q}_c^a	\dots	\bar{Q}_a^a	\dots	\bar{Q}_0^a	$\bar{Q}_{\bar{1}}^a$ \dots	
		m^a			M_{e-2}^a	\dots	M_c^a	\dots	M_a^a	\dots	M_0^a	$M_{\bar{1}}^a$ \dots	
		p^a	P_e^a	P_{e-1}^a	P_{e-2}^a	\dots	P_c^a	\dots	P_a^a	\dots	P_0^a	$P_{\bar{1}}^a$ \dots	
	$a-1$	q^{a-1}		Q_{e-1}^{a-1}	Q_{e-2}^{a-1}	\dots	Q_c^{a-1}	\dots	Q_a^{a-1}	\dots	Q_0^{a-1}	$Q_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
		\bar{q}^{a-1}			\bar{Q}_{e-2}^{a-1}	\dots	\bar{Q}_c^{a-1}	\dots	\bar{Q}_a^{a-1}	\dots	\bar{Q}_0^{a-1}	$\bar{Q}_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
		m^{a-1}				\dots	M_c^{a-1}	\dots	M_a^{a-1}	\dots	M_0^{a-1}	$M_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
		p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_0^{a-1}	$P_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
	$a-2$	q^{a-2}			Q_{e-2}^{a-2}	\dots	Q_c^{a-2}	\dots	Q_a^{a-2}	\dots	Q_0^{a-2}	$Q_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
		\bar{q}^{a-2}				\dots	\bar{Q}_c^{a-2}	\dots	\bar{Q}_a^{a-2}	\dots	\bar{Q}_0^{a-2}	$\bar{Q}_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
		m^{a-2}				\dots	M_c^{a-2}	\dots	M_a^{a-2}	\dots	M_0^{a-2}	$M_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
		p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_0^{a-2}	$P_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	
	<hr/>												
	Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ_e^a	Σ_{e-1}^a	Σ_{e-2}^a	\dots	Σ_c^a	\dots	Σ_a^a	\dots	Σ_0^a	$\Sigma_{\bar{1}}^a$ \dots
		$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_0^{a-1}	$P_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
n^{a-1}					N_{e-2}^{a-1}	\dots	N_c^{a-1}	\dots	N_a^{a-1}	\dots	N_0^{a-1}	$N_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
Σ^{a-1}			Σ_e^{a-1}	Σ_{e-1}^{a-1}	Σ_{e-2}^{a-1}	\dots	Σ_c^{a-1}	\dots	Σ_a^{a-1}	\dots	Σ_0^{a-1}	$\Sigma_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots	
$\binom{a}{a-2}$		p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_0^{a-2}	$P_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
		n^{a-2}				\dots	N_c^{a-2}	\dots	N_a^{a-2}	\dots	N_0^{a-2}	$N_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
		Σ^{a-2}	Σ_e^{a-2}	Σ_{e-1}^{a-2}	Σ_{e-2}^{a-2}	\dots	Σ_c^{a-2}	\dots	Σ_a^{a-2}	\dots	Σ_0^{a-2}	$\Sigma_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots	
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	
		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	\dots	q_c	\dots	q_a	\dots	q_0	$q_{\bar{1}}$ \dots	

цифр. Это значит, мы каждый раз получаем увеличивающееся неизменяемое начало числа из k цифр, а предел q будет действительным неотрицательным числом. \square

4.4. **Деления.** Аналогично вычитаниям, мы переносим порядок членов обычного деления на наши. Введем обозначения для делений по умножению $g *_{\bar{j}}^i h = q$:

- $q \stackrel{i}{\setminus}_{\bar{j}} g = h$ — левое деление или деление на левый сомножитель,
- $q \stackrel{i}{/}_{\bar{j}} h = g$ — правое деление или деление на правый сомножитель.
- $q \stackrel{i}{|}_{\bar{j}} a = b$ — деление без различения стороны, q делится на a .

Первые два символа без индексов взяты из [24].¹¹

4.4.1. *Подготовка чисел к делению.* Как вычитание восстанавливает сетку сложения, так деление восстанавливает сетку умножения и требует подготовки членов для выполнимости и однозначности. Символы подготовки к делениям — те же символы определения 4.27, по-другому посчитанные, а подготовленные члены деления соответствуют подготовленным членам 4.8, и 4.9, с учетом замечаний о восстановлении на странице 43. Определим

Процедура 4.40. (Подготовка к делению) Для чисел 3.1 пусть

$$y = y_{t'} \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots y_{u'} \dots$$

— делитель числа q ,

$$x = x_{r'} \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots x_{s'} \dots$$

— частное от деления $q \mid_j x$ тогда:

- (1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей произведения и делителя, получив $q_{e'' \leq e'}$, $y_{t \leq t'}$ — старшие значащие цифры, $q_{f'' \geq f'}$, $y_{u'' \geq u'}$ — младшие значащие цифры, для конечных дробей;
- (2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q :

$$e = \begin{cases} e'', & \text{если } e'' > t, \\ t + 1, & \text{если } e'' \leq t; \end{cases}$$

- (3) посчитать номер старшей цифры частного

$$r = e - t - 1$$

- (4) если хотя бы один член из q или y — бесконечная дробь, перейти к шагу 6, иначе вычислить длину L подготовленных членов умножения

$$L = \max\{e + |f''| + 1, t + |u''| + 1\};$$

- (5) выровнять второй аргумент по длине L , в дробной части дописывая незначащие нули, и с получением

$$\begin{cases} q = \underbrace{q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots q_f}_L, \\ y = \underbrace{y_t \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots y_u}_L, \\ x = \underbrace{x_r \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots x_s}_L \end{cases}$$

остановить подготовку членов деления;

- (6) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$\begin{cases} q = \underbrace{q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots}_{t+r+2}, \\ y = y_t \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots, \\ x = x_r \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots \end{cases}$$

завершить подготовку членов деления. ◁

¹¹Там другой порядок следования членов деления, как упоминалось ранее.

Определение 4.41. (символы подготовки) Символы r, s, t, u, e, f из процедуры 4.40 называются символами подготовки к делению, L — длиной выравнивания, а числа x, y, q после данной процедуры — подготовленными членами деления. \triangleleft

Пример ниже показывает в колонке B отбрасывание незначащих нулей; в C — что номер старшей цифры делимого q остается без изменений, поскольку $3 > 0$, номер же старшей цифры частного равен $2 = 3 - 0 - 1$ (отмечена точкой вместе со всей целой частью); а выровненные по длине $L = 5 = \max\{3 + |-1| + 1, 0 + |-1| + 1\}$ члены мы находим в D : для g дописали 000, в h всего пять точек:

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ g \quad 00 \overline{) 1} \\ h \quad *^i_j \quad \\ q \quad 9870 \overline{) 40} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 0 \overline{) 1} \\ \\ 9870 \overline{) 4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 0 \overline{) 1} \\ \dots \quad \\ 9870 \overline{) 4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 0 \overline{) 1000} \\ \dots \quad \dots \\ 9870 \overline{) 4} \end{array}$

Взятые в другом порядке —

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ g \quad 9870 \overline{) 40} \\ h \quad *^i_j \quad \\ q \quad 00 \overline{) 1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 9870 \overline{) 4} \\ \\ 0 \overline{) 1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 9870 \overline{) 4} \\ \dots \quad \\ 00000 \overline{) 1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 12345} \\ *^i_j \quad 9870 \overline{) 40} \\ \dots \quad \dots \dots \\ 00000 \overline{) 1} \end{array}$

— дают другой результат подготовки: поскольку для номера старшей цифры делимого выполняется $e'' = 0 < 3$, то $e = 4 = 3 + 1$ (C); старшая цифра частного будет в разряде $0 = 4 - 3 - 1$ (там же); длина выравнивания $L = 6 = \max\{4 + |-1| + 1, 3 + |-1| + 1\}$ диктует дописать 0 для g и пять точек для h (колонка D).

Последовательность таблиц

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 123 \dots} \\ g \quad \\ h \quad *^i_j \quad 034 \overline{) 555 \dots} \\ q \quad 9999 \overline{) } \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 123 \dots} \\ *^i_j \quad \\ 34 \overline{) 555 \dots} \\ 9999 \overline{) } \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 123 \dots} \\ *^i_j \quad \dots \overline{) } \\ 34 \overline{) 555 \dots} \\ 9999 \overline{) } \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{) 123 \dots} \\ *^i_j \quad \dots \overline{) \dots \dots} \\ 34 \overline{) 555 \dots} \\ 9999 \overline{) 000 \dots} \end{array}$

показывает каким будет деление, если делимое — бесконечная дробь. Процедура отбрасывает незначащий ноль у h (см. B), оставляет без изменения номер $e = 3$, дает разряд $r = 1 = 3 - 1 - 1$ старшей цифры частного (C), дописывает для q бесконечное число нулей в дробную часть и обозначает бесконечную запись дробной части частного (D).

Делению однаразрядного числа на однаразрядное число соответствует последовательность

A		B	C	D
$\overline{43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}}$			$\overline{43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}}$	$\overline{43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}}$
g	$*^i_j$		$*^i_j$	$*^i_j$
h	0		0	$0 \mid 0$
q	0		00	00

Умножая числа, мы производили копирования цифр и начальные цифры произведения получаются последовательным копированием начал частичных сумм. Поскольку при делении произведение известно, то автоматически известными становятся соответственные начала всех частичных сумм и, кроме того, первая цифра P_e^a строки p^a , первая цифра Q_e^a строки q^a . Восстанавливается все это посредством

Процедура 4.42. (копирование известных цифр делимого) Пусть a, b, e — символы подготовки из сетки умножения, $o, w \in \mathbb{Z}$. Тогда:

- (1) в сетке умножения из строки делимого (произведения) q в ячейки Q_e^a , P_e^a строк q^a , p^a соответственно скопировать первую цифру q_e делимого;
- (2) установить $o = a$, $w = 1$;
- (3) в строку Σ^o , начиная со столбца e скопировать первые w цифр делимого q из строки 3;
- (4) уменьшить o на 1, увеличить w на 1;
- (5) если делимое — бесконечная дробь перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу;
- (6) (для конечной дроби) если $o \geq b$, перейти к шагу 3, иначе остановить копирование. \triangleleft

Соберем для удобства вместе выполнимые сетки сложения и вычитания цифр в сетки 4.13, 4.14, а также введенные для удобства разбора примеров деления выполнимые сетки умножения-деления цифр (не чисел) 4.11 и сетки копирования 4.12. Общими для всех указанных сеток обозначениями будут: A — номер колонки таблицы примера (см. верхнюю строку таблицы 4.5, например); z — номер столбца в данной колонке A ; v — номер подблока в блоке 2 примера; $\binom{a}{j}$ — номер подблока в блоке Σ примера. Символы $g, h, Q, \bar{Q}, M, P, \Sigma, N$, с опущенными над-, подындксами трактуются как цифры из определения сетки умножения, причем трактуются позиционно: Σ в разных строках могут быть не равными друг другу. Для экономии ширины, номер $z - 1$ опущен во всех сетках.

Определение 4.43. (сетки умножения-деления цифр¹²) С учетом абзаца на с. 36, сетки

$$(4.11) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline g_v *^i_j h_w \\ \hline z=v+w+1 \\ \hline z \\ \hline k \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \cdot v *^i_j h_w \\ \hline z=v+w+1 \\ \hline z \\ \hline k \end{array} Q \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline g_v *^i_j \cdot w \\ \hline z=v+w+1 \\ \hline z \\ \hline k \end{array} Q \\ \cdot \end{array}$$

называются выполнимыми сетками умножения-деления цифр и являются табличным представлением прямого, левонеизвестного и правонеизвестного атомарных уравнений 3.2–3.4, переписанных как

$$g_v *^i_j h_w = Q\bar{Q}, \quad \cdot v *^i_j h_w = Q \cdot, \quad g_v *^i_j \cdot w = Q \cdot$$

соответственно; точка заменяет неизвестную цифру уравнения; $z = v + w + 1$ — формула расчета столбца z , в который записывается неперенос произведения цифр. \triangleleft

Определение 4.44. (сетки копирования) Сетками копирования цифр будут таблицы

$$(4.12) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \text{П}q^v \\ \hline \downarrow \\ \hline \text{П}p^v \end{array} Q \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \text{П}q^v \\ \hline \uparrow \\ \hline \text{П}p^v \end{array} \cdot \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \text{П}p^v \\ \hline \downarrow \\ \hline \Sigma p^v \end{array} P \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \text{П}p^v \\ \hline \uparrow \\ \hline \Sigma p^v \end{array} \cdot \\ P \end{array}$$

в которых символы $\text{П}q^v, \text{П}p^v, \Sigma p^v$ указывают на строки q^v, p^v в блоках, обозначенных префиксами $\text{П}, \Sigma$. Стрелка указывает откуда и куда копируется цифра ячейки. \triangleleft

К двум группам сеток ниже определения и комментарии озвучивались; нижние сетки — это те же верхние, но данные для большей визуальной связи с блоком Σ .

$$(4.13) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{E} \\ \hline v \\ \hline Q \\ \hline \bar{Q} \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \end{array} z \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{E} \\ \hline v \\ \hline Q \\ \hline \bar{Q} \\ \hline M \cdot \\ \hline \cdot \end{array} z \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{F}^l \\ \hline v \\ \hline Q \\ \hline \cdot \\ \hline M \cdot \\ \hline P \end{array} z \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{F}^l \\ \hline v \\ \hline Q \\ \hline \cdot \\ \hline M \cdot \\ \hline P \end{array} z \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{F}^r \\ \hline v \\ \hline \cdot \\ \hline \bar{Q} \\ \hline \cdot \\ \hline P \end{array} z \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline \mathcal{F}^r \\ \hline v \\ \hline \cdot \\ \hline \bar{Q} \\ \hline M \cdot \\ \hline P \end{array} z \\ \cdot \end{array}$$

¹²Но не одноразрядных чисел!

(4.14)

A		A		A		A		A		A	
E	z	\mathcal{E}	z	F ^l	z	\mathcal{F}^l	z	F ^r	z	\mathcal{F}^r	z
	Σ		Σ		Σ		Σ		.		.
	P		P		.		.		P		P
$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N .	$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N .	$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N .
	.		.		Σ		Σ		Σ		Σ

Определение 4.45. (деление дробей, их частное) Пусть, если $y = g$, то $x = h$, и наоборот, если $y = h$, то $x = g$. Делением $q \stackrel{i}{|}_j y = x$ дробей по умножению $*_j^i$ будет выполнение шагов для заполнения сетки умножения

- (1) подготовить дроби q, y, x ;
- (2) построить сетку умножения подготовленных членов деления;
- (3) взять таблицы умножения и сложения для умножения $*_j^i$;
- (4) скопировать известные цифры произведения q в ячейки блока Σ сетки умножения процедурой 4.42 копирования;
- (5) если дроби бесконечны и существует выполнимая сетка из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 выполнять ее, иначе, если дроби конечны, перейти к шагу 6;
- (6) если дроби конечны, $z \geq f$ и существует выполнимая сетка разряда z из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, выполнять сетку.

Число в строке x будет частным от деления $q \stackrel{i}{|}_j y = x$. ◁

Это определение общее и для правого, и для левого деления. Тем не менее, они будут несколько отличаться в порядке восстановления сетки умножения.

Разбираем пример правого деления $q \stackrel{i}{|}_j h = 945.13 \text{ \% } 0.243 = x$ по умножению $x *_0^2 0.243 = 945.13$, представленный в таблицах 4.5, 4.6, 4.7 на страницах 45, 46, 47 соответственно. В них мы последовательно по колонкам отобрали ход деления. (Все это можно было бы выполнить в одной колонке.) В целом правое деление восстанавливает сетку умножения так: процедура копирования заполнит блок Σ «треугольником» начала частичных сумм, когда первая (самая верхняя) частичная сумма будет иметь одну цифру, вторая сумма — две, ..., последняя будет иметь $|a - b| + 1$ цифр; затем восстановится блок Πa и сумма Σ^a , блок $\Pi(a - 1)$ и сумма Σ^{a-1} , ..., $\Pi(b)$ (сумма Σ^b уже скопирована процедурой). Помним, что $\Sigma^a = (\Pi)p^a$.

Готовим члены умножения $0060.21 *_0^2 0.243 = 945.1$ к правому делению $945.1 \text{ \% } 0.243$.

A		B		C		D	
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & \\ h^{*2}_0 & 0 243 \\ \hline q & 945 1 \end{array}$		$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & \cdot\cdot \\ *^2_0 & 0 243 \\ \hline & 945 1 \end{array}$		$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & \cdot\cdot \cdot\cdot \\ *^2_0 & 0 243 \\ \hline & 945 1 \end{array}$		$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & \cdot\cdot \cdot\cdot \\ *^2_0 & 0 243 \\ \hline & 945 1 \end{array}$	

Отбрасывание незначащих нулей не нужно (пустая B). В силу $2 > 0$ верно $e = 2$ для старшей цифры произведения. Старшая цифра частного g будет находиться в разряде $1 = 2 - 0 - 1$. Длина: $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1, 0 + |-3| + 1\}$. По ней мы дописываем только две точки дробной части у частного.

Теперь построим сетку умножения и определим таблицы подстановок (это уже известно по умножению $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$) — колонка A . После копирования начал (колонка B) в блоке 1 мы имеем первую выполнимую сетку

$$\begin{array}{c|c} \hline B & \\ \hline .1 *_0^2 0_0 & \\ \hline 2=1+0+1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & . \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline C & \\ \hline 6_1 *_0^2 0_0 & \\ \hline 2=1+0+1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & 5 \\ \hline \end{array}$$

автоматически влекущую умножение $6 *_0^2 0.243 = 974.7$ (C) — комбинацию выполнимых сеток умножений и сложений цифр. Дальше, помня из умножения, мы копируем 974.7 в строку Σ^1 , что является серией выполнимых сеток копирования цифр. Это влечет выполнимость сетки вычитания и двух копирований

$$\begin{array}{c|c} \hline C & \\ \hline F^l & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \hline \binom{1}{0} & . \\ \hline & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline F^l & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \hline \binom{1}{0} & 3 \\ \hline & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Sigma p^0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Снова будем иметь выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline .0 *_0^2 0_0 & \\ \hline 1=0+0+1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline & . \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline E & \\ \hline 0_0 *_0^2 0_0 & \\ \hline 1=0+0+1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

с последующим перемножением $0 *_0^2 0.24 = 23.5$ ¹³ в блоке 0 и копированием его результата в строку Σp^0 (колонка E). Коль скоро у нас есть два произведения цифр (строки 20–21), мы их можем сложить в блоке $\binom{1}{0}$, колонке F . Это влечет выполнимое вычитание начальных цифр блоком ниже и копирования

$$\begin{array}{c|c} \hline F & \\ \hline F^l & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & . \\ \hline & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline F^l & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ \hline & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi q^{\bar{1}} & 6 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \end{array}$$

¹³Умножение на цифру 0 из 0.24 уже отражено в сетке; последнюю цифру 3 умножать не обязательно, т.к. это произведение лежит правее последнего разряда произведения. В дальнейшем аналогичные ситуации мы будем подразумевать.

Опять получим выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{r} G \\ \hline .\bar{1} *^2_0 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline \bar{1} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 6 \end{array} \right. \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} H \\ \hline 2\bar{1} *^2_0 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline \bar{1} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 6 \end{array} \right. \\ \hline 7 \end{array}$$

За ним последует перемножение $2 *^2_0 0.2 = 6.3$, копирование результата в блок Σ , строку $\Sigma p^{\bar{1}}$. Получаем новую частичную сумму $947.5 +_0 6.3 = 945.4$ в колонке I , строке $\Sigma^{\bar{1}}$ и повторяем вычитание начальных цифр с копированиями

$$\begin{array}{r} I \\ \hline F^I \quad \bar{1} \\ \hline \quad 4 \\ \hline \quad \cdot \\ \hline (\frac{1}{2}) \quad 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} J \\ \hline F^I \quad \bar{1} \\ \hline \quad 4 \\ \hline \quad 8 \\ \hline (\frac{1}{2}) \quad 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} J \\ \hline \quad \bar{1} \\ \hline \text{Пр}^{\bar{2}} \quad 8 \\ \hline \quad \uparrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{2}} \quad 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} J \\ \hline \quad \bar{1} \\ \hline \text{Пр}^{\bar{2}} \quad 8 \\ \hline \quad \uparrow \\ \hline \text{Пр}^{\bar{2}} \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

Остается посчитать последнюю цифру искомого сомножителя:

$$\begin{array}{r} K \\ \hline .\bar{2} *^2_0 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{2} \left| \begin{array}{c} \bar{1} \\ 8 \end{array} \right. \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} K \\ \hline 1\bar{2} *^2_0 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{2} \left| \begin{array}{c} \bar{1} \\ 8 \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Правое деление $945.1 \stackrel{2}{\%} 0.243 = 60.21$ закончено и восстановило умножение $60.21 *^2_0 0.243 = 945.1$.

Приступаем к примеру левого деления $q \stackrel{i}{\setminus} g = 945.1 \stackrel{2}{\%} 60.21 = h$ по умножению $60.21 *^2_0 x = 945.1$, таблиц 4.8, 4.9, 4.10 на страницах 48, 49, 50 соответственно. В целом левое деление восстановит сетку умножения иначе, нежели правое, но начала частичных сумм восстановятся аналогично. Затем сетка заполняется по «диагоналям»: сначала первые цифры строк блоков $\Pi a - \Pi b$ и первые цифры (после скопированных процедурой копирования) блоков $\Sigma \binom{a}{a} - \Sigma \binom{a}{b}$, затем вторые цифры этих же блоков секций Π , Σ , после — третьи, и т.д.

Для левого деления $945.1 \stackrel{i}{\setminus} 0060.21$ по умножению $0060.21 *^2_0 0.243 = 945.1$ подготовка выглядит так:

$$\begin{array}{c} A \qquad B \qquad C \qquad D \\ \hline \begin{array}{r} 43210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5} \\ g *^2_0 0060 | 21 \\ h *^2_0 \quad | \\ q \quad 9451 | \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5} \\ *^2_0 60 | 21 \\ \quad | \\ \quad 9451 | \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5} \\ *^2_0 60 | 21 \\ \quad \cdot | \\ \quad 9451 | \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 | \bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5} \\ *^2_0 60 | 21 \\ \quad \cdot | \dots \\ \quad 9451 | \end{array} \end{array}$$

— отброшены незначащие нули у g , номер старшей цифры делимого остается без изменений в силу $2 > 0$, старшей цифрой частного h будет $0 = 2 - 1 - 1$, а длина $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1, 1 + |-2| + 1\}$ дописывает три точки в дробной части результата.

Состояние после копирования эквивалентно колонке B правого деления на с. 45, следовательно и первой выполнимой сеткой будет деление цифр, с разницей, что неизвестна правая цифра (первые две сетки ниже):

$$\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 6_1 *^2_0 .0 \\ \hline 2=1+0+1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \mid 9 \\ \hline . \end{array} = \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline 6_1 *^2_0 0_0 \\ \hline 2=1+0+1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \mid 9 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline 0_0 *^2_0 0_0 \\ \hline 1=0+0+1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \mid 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline 2_{\bar{1}} *^2_0 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline 0 \\ \hline \bar{1} \mid 6 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline 1_{\bar{2}} *^2_0 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline \bar{2} \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

Становятся возможными перемножения цифр $0.21 *^2_0 0$ (три последние сетки), вносимые по правилам умножения в подблоки $0 - \bar{2}$, и копирования из строк q в строки p блоков Π, Σ :

$$\begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Pi p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Sigma p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi q^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Sigma p^{\bar{1}} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \Pi q^{\bar{2}} & 8 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Pi p^{\bar{2}} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \Pi p^{\bar{2}} & 8 \\ \hline \downarrow & \\ \hline \Sigma p^{\bar{2}} & 8 \end{array}$$

В блоке Σ это влечет выполнимые сетки вычитаний в подблоках $\binom{1}{0}, \binom{1}{\bar{1}}$ —

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline Fr & 1 \\ \hline & \cdot \\ \hline \binom{1}{0} & 2 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} D & D \\ \hline Fr & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline \binom{1}{0} & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} C & C \\ \hline Fr & 0 \\ \hline & \cdot \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & 6 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 5 \end{array} = \begin{array}{c|c} D & D \\ \hline Fr & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & 6 \\ \hline & 2 \\ \hline & 5 \end{array}$$

— такое же вычитание в подблоке $\binom{1}{\bar{2}}$, одно копирование из Σ^1 в Πp^1 и вычитание в подблоке 1 блока Π :

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline Fr & \bar{1} \\ \hline & \cdot \\ \hline \binom{1}{\bar{2}} & 8 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c} D & D \\ \hline Fr & \bar{1} \\ \hline & 4 \\ \hline \binom{1}{\bar{2}} & 8 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} D & D \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi p^1 & 7 \\ \hline \uparrow & \\ \hline \Sigma^1 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} D & E \\ \hline Fr & 1 \\ \hline & \cdot \\ \hline 1 & 5 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 7 \end{array} = \begin{array}{c|c} E & E \\ \hline Fr & 1 \\ \hline & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline & \cdot \\ \hline & 7 \end{array}$$

Теперь нам доступно вычисление второй цифры неизвестного сомножителя (первые две сетки) посредством

$$\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline 6_1 *^2_0 .\bar{1} \\ \hline 1=1+\bar{1}+1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \mid 4 \\ \hline . \end{array} = \begin{array}{c|c} F & F \\ \hline 6_1 *^2_0 2_{\bar{1}} \\ \hline 1=1+\bar{1}+1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \mid 4 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} F & F \\ \hline 0_0 *^2_0 2_{\bar{1}} \\ \hline 0=0+\bar{1}+1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \mid 1 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} F & F \\ \hline 2_{\bar{1}} *^2_0 2_{\bar{1}} \\ \hline \bar{1}=\bar{1}+\bar{1}+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline \bar{1} \mid 0 \\ \hline \end{array}$$

С учетом того, что правее разряда $\bar{1}$ цифры не следует писать, нам можно перемножить вместо $60.21 *^2_0 2$ только $0.2 *^2_0 2$ (последние две сетки выше).

Появляются выполнимые сетки сложения цифр и выполнимые сетки копирования их результатов

$$\begin{array}{c|c} F \\ \hline \text{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ 0 & . \\ & . \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} G \\ \hline \text{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ 0 & 5 \\ & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} F \\ \hline \text{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ & 7 \\ \bar{1} & . \\ & . \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} G \\ \hline \text{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ & 7 \\ \bar{1} & 3 \\ & . \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} G \\ \hline & 0 \\ \hline \text{П}p^0 & 3 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} G \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^{\bar{1}} & 3 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar{1}} & 3 \\ \hline \end{array}$$

автоматически влекущие сетки вычитания и копирования

$$\begin{array}{c|c} G \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & . \\ & 3 \\ (1_0) & 3. \\ & 7 \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} H \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 4 \\ & 3 \\ (1_0) & 39 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} G \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ & 3 \\ (1_{\bar{1}}) & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} H \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ & 3 \\ (1_{\bar{1}}) & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} H \\ \hline & 0 \\ \hline \text{П}p^1 & 4 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Выполняем вычитание в подблоке 1 и там же деление цифр для нахождения очередной цифры правого сомножителя:

$$\begin{array}{c|c} H \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & . \\ 1 & 7 \\ & 1. \\ & 4 \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} I \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 3 \\ 1 & 7 \\ & 10 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} I \\ \hline 6_1 * 0^2 \cdot \bar{2} \\ \hline 0=1+\bar{2}+1 \\ \hline & 0 \\ 1 & 3 \\ & . \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} J \\ \hline 6_1 * 0^2 \cdot 4_{\bar{2}} \\ \hline 0=1+\bar{2}+1 \\ \hline & 0 \\ 1 & 3 \\ & 0 \\ \hline \end{array}$$

Известность цифры сомножителя дает перемножения с цифрами другого сомножителя — в нашем случае только одно — и последующее сложение неначальных цифр с копированием:

$$\begin{array}{c|c} J \\ \hline 0_0 * 0^2 \cdot 4_{\bar{2}} \\ \hline \bar{1}=0+\bar{2}+1 \\ \hline & \bar{1} \\ 0 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} J \\ \hline \varepsilon & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ 0 & 9 \\ & 5 \\ & . \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} K \\ \hline \varepsilon & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ 0 & 9 \\ & 5 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} K \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^0 & 5 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Вычитанием (первые две сетки ниже)

$$\begin{array}{c|c} K \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ & 5 \\ (1_0) & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} L \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 7 \\ & 5 \\ (1_0) & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} L \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^1 & 7 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} L \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & . \\ 1 & 0 \\ & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \mid = \mid \begin{array}{c|c} M \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ 1 & 0 \\ & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array}$$

находим последнюю цифру частичной суммы Σ^1 , копируем ее в подблок 1 (средняя сетка), вычитаем в блоке 1 (две последние сетки), делением цифр

$$\frac{M}{6_1 * 0^2 \cdot \bar{3}} = \frac{N}{6_1 * 0^2 \cdot 3_{\bar{3}}} \\ \frac{\bar{1}=1+\bar{3}+1}{1 \mid \bar{5}} = \frac{\bar{1}=1+3+1}{1 \mid \bar{5}}$$

находим последнюю цифру неизвестного множителя, завершая правое деление $945.1 \underset{0}{\setminus} 60.21 = 0.243$ верным восстановлением множителя в умножении $60.21 * 0.243 = 945.1$.

Теорема 4.46. (1) Если для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $q \overset{i}{\mid}_j y = x$, то $x \in \mathbb{R}_+$.
 (2) Если таблицы i, j — полулатинские (SL), то $q \overset{i}{\setminus}_j y = x_1$ и $q \overset{i}{\mid}_j y = x_2$ выполнимы одновременно для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Поскольку деление восстанавливает сетку умножения, то доказательство утверждения $y \in \mathbb{R}_+$ заимствуется из доказательства замкнутости умножения.

(2) Подготовка, копирование и построение сетки умножения выполнимы. Копирование предоставляет цифру для первой выполняемой сетки. Для сеток деления цифр выполнимость доказана условиями решения атомарных уравнений в предложении 3.10; выполнимость сеток вычитания рассматривалась в разделе о вычитаниях (предложения 4.12, 4.18) — все эти условия совпадают с условиями теоремы. Для сеток умножения и сложения цифр ограничений на таблицы подстановок нет. Процедура деления определена так, что каждая выполненная сетка дает цифры для следующей выполняемой сетки хоть конечных, хоть бесконечных дробей. \square

В вопросе восстановления аргументов умножения существует та же ситуация, что и с вычитанием: деление всегда выполнимо, но не всегда восстанавливает множители; дописыванием нужного количества нулей, тем не менее, мы их точно восстановим.

На странице 44 находятся примеры. Слева помещено умножение $93.555 * 71.198 = 0012.3 = 12.3$, с появляющимися двумя незначащими нулями результата впереди. В середине — деление $012.30 \underset{3}{\setminus} 93.555 = 7.6191$; подготовка деления добавила 0 к целой части 12.3 и дала $L = 5$. Как видим, оно не восстановило множитель 71.198, однако, проведя деление в правой незаполненной таблице с произведением 0012.3 вместо 012.30 читатель получит искомое 71.198.

Теорема 4.47. Пусть имеем $g \overset{i}{*}_j h = q$ с таблицами i, j . Тогда, если i, j — полулатинские (SL), то $q \overset{i}{\setminus}_j g = h$, $q \overset{i}{\mid}_j h = g$, для любых $q, g, h \in \mathbb{R}_+$, при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.

Доказательство. Как и для аналогичной теоремы о восстановлении вычитанием нам нужно сказать, что, как только выполняемая сетка вычитания и деления цифр получает все аргументы для восстановления, она восстанавливает точно сетки сложения и умножения цифр в силу предложения 3.10.

Если подготовка чисел к делению дала ту же длину выравнивания и те же номера старших разрядов, которые были у аргументов умножения, то, в силу ранее сказанного, деление восстановит сомножитель x и никакой другой. Если подготовка дает другую, нежели у умножения, длину выравнивания и (или) другие номера старших разрядов, то это произошло только из-за нехватки незначащих нулей у аргументов деления. Значит, дописав нужное число нулей, мы восстановим обе характеристики подготовленных членов деления. Как только это сделано, найденный неизвестный сомножитель будет в точности аргументом умножения $g *_j^i h = q$. \square

ТАБЛИЦА 4.4. Примеры восстановления сомножителей.

93.555 \ast_3^3 71.198 = 0012.3							
\mathcal{Z}, \mathcal{Z}	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
g		9	3	5	5	5	
h		7	1	1	9	8	
q	$x_3x_2x_1x_0$	$x_{\bar{1}}$					
	0	5	5	3	2		
		1	3	3	0		
		1	1	8			
	0	6	9	1	0		
	4	0	0	5			
		6	5	5			
			3	9			
	4	5	7	3			
	2	6		6			
		9		1			
				1			
	2	4		2			
	2	6					
		9					
		2	4				
			2				
				2			
	0	6	9	1	0		
	4	5	7	3			
		9	8	5			
	0	0	0	3	8		
		2	4	2			
			8	3			
	0	0	1	3	6		
		2	4				
			3				
	0	0	1	2	2		
			2				
	0	0	1	2	3		
012.30 \backslash_3^3 93.555 = 7.6191							
\mathcal{Z}, \mathcal{Z}	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
g		9	3	5	5	5	
h		7	6	1	9	1	
q	$x_3x_2x_1$	$x_0x_{\bar{1}}$					
	0	8	5	3	5		
		1	6	3	0		
			8	8	3		
	0	2	8	9	8		
	4	9	0	5			
		6	7	5			
			6	5			
	4	8	7	1			
	2	3	6				
		9	8				
			4				
	2	5	8				
		2	3				
			9				
		2	5				
			2				
				2			
	0	2	8	9	8		
		4	8	7	1		
			3	9	4		
	0	1	3	7	1		
		2	5	8			
			3	8			
	0	1	2	2	2		
		2	5				
			0				
	0	1	2	3	4		
			2				
	0	1	2	3	0		
0012.3 \backslash_3^3 93.555 = h							
\mathcal{Z}, \mathcal{Z}	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
g		9	3	5	5	5	
h		
q	$x_3x_2x_1x_0$	$x_{\bar{1}}$					
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
			

ТАБЛИЦА 4.5. Правое деление $945.1 \frac{2}{0} 0.243$ (начало)

			A	B	C	D
-1		$\bar{2}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$
0		0	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d
1			$x_1 x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	$x_1 x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	6 $x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	6 $x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$
2			0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3
3			9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1
4	Π	1	q^1	9	9 4 3 5	9 4 3 5
5			\bar{q}^1	5 7 0	5 7 0
6			m^1	1 0	1 0
7			p^1	9	9 7 4 7	9 7 4 7
8		0	q^0	2 . . .
9			\bar{q}^0
10			m^0
11			p^0	2 . . .
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$
14			$m^{\bar{1}}$
15			$p^{\bar{1}}$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$
18			$m^{\bar{2}}$
19			$p^{\bar{2}}$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1	9	9 7 4 7	9 7 4 7
21		$\binom{1}{0}$	p^0	2 . . .
22			n^0	3 . . .
23			Σ^0	9 4 . . .	9 4 . . .	9 4 . . .
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$
25			$n^{\bar{1}}$
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	9 4 5 .	9 4 5 .	9 4 5 .
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$
28			$n^{\bar{2}}$
29			$\Sigma^{\bar{2}}$ 9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1

ТАБЛИЦА 4.6. Правое деление $945.1 \frac{2}{10} 0.243$ (продолжение)

			E	F	G	H
-1		\mathcal{Q}	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		\mathcal{O}	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$
1			$6\ 0\ x_1x_2$	$6\ 0\ x_1x_2$	$6\ 0\ x_1x_2$	$6\ 0\ 2_1x_2$
2			$0\ 2\ 4\ 3$	$0\ 2\ 4\ 3$	$0\ 2\ 4\ 3$	$0\ 2\ 4\ 3$
3			$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$
4	Π	1	$q^1\ 9\ 4\ 3\ 5$	$9\ 4\ 3\ 5$	$9\ 4\ 3\ 5$	$9\ 4\ 3\ 5$
5			$\bar{q}^1\ 5\ 7\ 0$	$5\ 7\ 0$	$5\ 7\ 0$	$5\ 7\ 0$
6			$m^1\ 1\ 0$	$1\ 0$	$1\ 0$	$1\ 0$
7			$p^1\ 9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$
8		0	$q^0\ 2\ 1\ 8$	$2\ 1\ 8$	$2\ 1\ 8$	$2\ 1\ 8$
9			$\bar{q}^0\ 0\ 9$	$0\ 9$	$0\ 9$	$0\ 9$
10			$m^0\ 5$	$ 5$	$ 5$	$ 5$
11			$p^0\ 2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ .\ .$	$.\ .$	$6\ .$	$6\ 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ .$	$.$	$.$	$ 7$
14			$m^{\bar{1}}\ $	$ $	$ $	$ $
15			$p^{\bar{1}}\ .\ .$	$.\ .$	$6\ .$	$6\ 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ $	$ $	$ $	$ $
18			$m^{\bar{2}}\ $	$ $	$ $	$ $
19			$p^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$	$9\ 7\ 4\ 7$
21		$\binom{1}{0}$	$p^0\ 2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$	$2\ 3\ 5$
22			$n^0\ 3\ .$	$3\ 9$	$3\ 9$	$3\ 9$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ 7\ .$	$9\ 4\ 7\ 5$	$9\ 4\ 7\ 5$	$9\ 4\ 7\ 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}\ .\ .$	$.\ .$	$6\ .$	$6\ 3$
25			$n^{\bar{1}}\ .$	$.$	$ 2$	$ 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ .$	$9\ 4\ 5\ .$	$9\ 4\ 5\ .$	$9\ 4\ 5\ .$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
28			$n^{\bar{2}}\ $	$ $	$ $	$ $
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$

ТАБЛИЦА 4.7. Правое деление $945.1 \frac{2}{10} 0.243$ (окончание)

			I	J	K
-1		2	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		0	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$
1			$6\ 0\ \ 2\ x_2$	$6\ 0\ \ 2\ x_2$	$6\ 0\ \ 2\ 1$
2			$0\ \ 2\ 4\ 3$	$0\ \ 2\ 4\ 3$	$0\ \ 2\ 4\ 3$
3			$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$
4	Π	1	$q^1\ 9\ 4\ 3\ \ 5$	$9\ 4\ 3\ \ 5$	$9\ 4\ 3\ \ 5$
5			$\bar{q}^1\ 5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$
6			$m^1\ 1\ \ 0$	$1\ \ 0$	$1\ \ 0$
7			$p^1\ 9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$
8		0	$q^0\ 2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$
9			$\bar{q}^0\ 0\ \ 9$	$0\ \ 9$	$0\ \ 9$
10			$m^0\ \ 5$	$ \ 5$	$ \ 5$
11			$p^0\ 2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ 6\ \ 0$	$6\ \ 0$	$6\ \ 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ \ 7$	$ \ 7$	$ \ 7$
14			$m^{\bar{1}}\ \ $	$ \ $	$ \ $
15			$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ 8$	$ \ 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ \ $	$ \ $	$ \ $
18			$m^{\bar{2}}\ \ $	$ \ $	$ \ $
19			$p^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ 8$	$ \ 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$
21		$\binom{1}{0}$	$p^0\ 2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
22			$n^0\ 3\ \ 9$	$3\ \ 9$	$3\ \ 9$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
25			$n^{\bar{1}}\ \ 2$	$ \ 2$	$ \ 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ 8$	$ \ 8$
28			$n^{\bar{2}}\ \ $	$ \ $	$ \ $
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$

ТАБЛИЦА 4.8. Левое деление $945.1 \setminus_0^2 60.21$ (начало)

			C	D	E	F
$\bar{1}$		$\bar{2}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		0	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$
1			$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$
2			$0\ x_1x_2x_3$	$0\ x_1x_2x_3$	$0\ x_1x_2x_3$	$0\ 2x_2x_3$
3			$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$
4	Π	1	$q^1\ 9\ .\ .\ .$	$9\ .\ .\ .$	$9\ 4\ .\ .$	$9\ 4\ .\ .$
5			$\bar{q}^1\ 5\ .\ .$	$5\ .\ .$	$5\ .\ .$	$5\ 7\ .$
6			$m^1\ .\ .$	$.\ .$	$1\ .$	$1\ .$
7			$p^1\ 9\ .\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$
8		0	$q^0\ 2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ 1\ .$
9			$\bar{q}^0\ 0\ .$	$0\ .$	$0\ .$	$0\ 9$
10			$m^0\ .$	$.$	$.$	$.$
11			$p^0\ 2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ .\ .$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ 6\ .$	$6\ .$	$6\ .$	$6\ 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ 7$	$ 7$	$ 7$	$ 7$
14			$m^{\bar{1}}\ .$	$.$	$.$	$.$
15			$p^{\bar{1}}\ 6\ .$	$6\ .$	$6\ .$	$6\ .$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ 8$	$ 8$	$ 8$	$ 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
18			$m^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
19			$p^{\bar{2}}\ 8$	$ 8$	$ 8$	$ 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ .\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$	$9\ 7\ .\ .$
21		$\binom{1}{0}$	$p^0\ 2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ .\ .$	$2\ .\ .$
22			$n^0\ .\ .$	$3\ .$	$3\ .$	$3\ .$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ .\ .$	$9\ 4\ 7\ .$	$9\ 4\ 7\ .$	$9\ 4\ 7\ .$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}\ 6\ .$	$6\ .$	$6\ .$	$6\ .$
25			$n^{\bar{1}}\ .$	$ 2$	$ 2$	$ 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ .$	$9\ 4\ 5\ 4$	$9\ 4\ 5\ 4$	$9\ 4\ 5\ 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}\ 8$	$ 8$	$ 8$	$ 8$
28			$n^{\bar{2}}\ .$	$.$	$.$	$.$
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$	$9\ 4\ 5\ 1$

ТАБЛИЦА 4.9. Левое деление $945.1 \setminus_0^2 60.21$ (продолжение)

			G	H	I	J
$\bar{1}$		$\bar{2}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		0	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$
1			$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$
2			$0\ \ 2\ x_2 x_3$	$0\ \ 2\ x_2 x_3$	$0\ \ 2\ x_2 x_3$	$0\ \ 2\ 4\ x_3$
3			$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$
4	Π	1	$q^1\ 9\ 4\ .\ \ .$	$9\ 4\ .\ \ .$	$9\ 4\ 3\ \ .$	$9\ 4\ 3\ \ .$
5			$\bar{q}^1\ 5\ 7\ \ .$	$5\ 7\ \ .$	$5\ 7\ \ .$	$5\ 7\ \ 0$
6			$m^1\ 1\ \ .$	$1\ \ .$	$1\ \ 0$	$1\ \ 0$
7			$p^1\ 9\ 7\ .\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$
8		0	$q^0\ 2\ 1\ \ .$	$2\ 1\ \ .$	$2\ 1\ \ .$	$2\ 1\ \ 8$
9			$\bar{q}^0\ 0\ \ 9$	$0\ \ 9$	$0\ \ 9$	$0\ \ 9$
10			$m^0\ \ 5$	$ \ 5$	$ \ 5$	$ \ 5$
11			$p^0\ 2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ 6\ \ 0$	$6\ \ 0$	$6\ \ 0$	$6\ \ 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ \ 7$	$ \ 7$	$ \ 7$	$ \ 7$
14			$m^{\bar{1}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
15			$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
18			$m^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
19			$p^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ 7\ .\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ .$
21		$\binom{1}{0}$	$p^0\ 2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$	$2\ 3\ \ .$
22			$n^0\ 3\ \ .$	$3\ \ 9$	$3\ \ 9$	$3\ \ 9$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ 7\ \ .$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
25			$n^{\bar{1}}\ \ 2$	$ \ 2$	$ \ 2$	$ \ 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
28			$n^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$

ТАБЛИЦА 4.10. Левое деление $945.1 \setminus_{\mathcal{O}}^2 60.21$ (окончание)

			K	L	M
$\bar{1}$		2	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		0	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$
1			$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$	$6\ 0\ \ 2\ 1$
2			$0\ \ 2\ 4\ x_{\bar{3}}$	$0\ \ 2\ 4\ x_{\bar{3}}$	$0\ \ 2\ 4\ 3$
3			$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$
4	Π	1	$q^1\ 9\ 4\ 3\ \ .$	$9\ 4\ 3\ \ .$	$9\ 4\ 3\ \ 5$
5			$\bar{q}^1\ 5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$
6			$m^1\ 1\ \ 0$	$1\ \ 0$	$1\ \ 0$
7			$p^1\ 9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$
8		0	$q^0\ 2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$
9			$\bar{q}^0\ 0\ \ 9$	$0\ \ 9$	$0\ \ 9$
10			$m^0\ \ 5$	$ \ 5$	$ \ 5$
11			$p^0\ 2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ 6\ \ 0$	$6\ \ 0$	$6\ \ 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ \ 7$	$ \ 7$	$ \ 7$
14			$m^{\bar{1}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
15			$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
18			$m^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
19			$p^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ 7\ 4\ \ .$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$
21		$\binom{1}{0}$	$p^0\ 2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
22			$n^0\ 3\ \ 9$	$3\ \ 9$	$3\ \ 9$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$
25			$n^{\bar{1}}\ \ 2$	$ \ 2$	$ \ 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}\ \ 8$	$ \ 8$	$ \ 8$
28			$n^{\bar{2}}\ \ .$	$ \ .$	$ \ .$
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$

5. Вывод

В нашей работе мы сформулировали идею использования неклассических арифметик (НКА), идею разнообразий и предложили некоторые обоснования идеи. Была определена арифметика DR_+ с обратимыми сложениями и умножениями, представлены графики функций на ее основе. Некоторые из графиков имеют родство с графиками актуальных научных исследований. На основе известной схемы шифрования была предложена схема с открытыми операциями и открытыми ключами.

Очень многие конструкции могут быть пересчитаны в других арифметиках. Эта самая широта множества объектов пересчета определяет потенциальную широту применения идеи. Какие-то пересчитанные вещи мы не сможем интерпретировать и знать о них зачем они нужны. Это может быть принципиальной бесполезностью полученного материала, но может быть лишь временным незнанием о пользе. Наряду с переиспользованием конструкций классической арифметики (КА), неклассические будут неизбежно порождать неизвестные до сих пор сущности наподобие упомянутых во введении операционных уравнений¹⁴. Экономия мышления и последовательность в переиспользовании известных вещей подталкивает нас искать арифметики, в которых возможен наиболее широкий перенос техник и конструкций из классической арифметики.

¹⁴Они могут пониматься как знакомые сообществу функциональные уравнения, поэтому автор, говоря "неизвестные" подразумевает лишь новизну в контексте вопроса.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГРАФИКИ DR -РАЗНООБРАЗИЙ

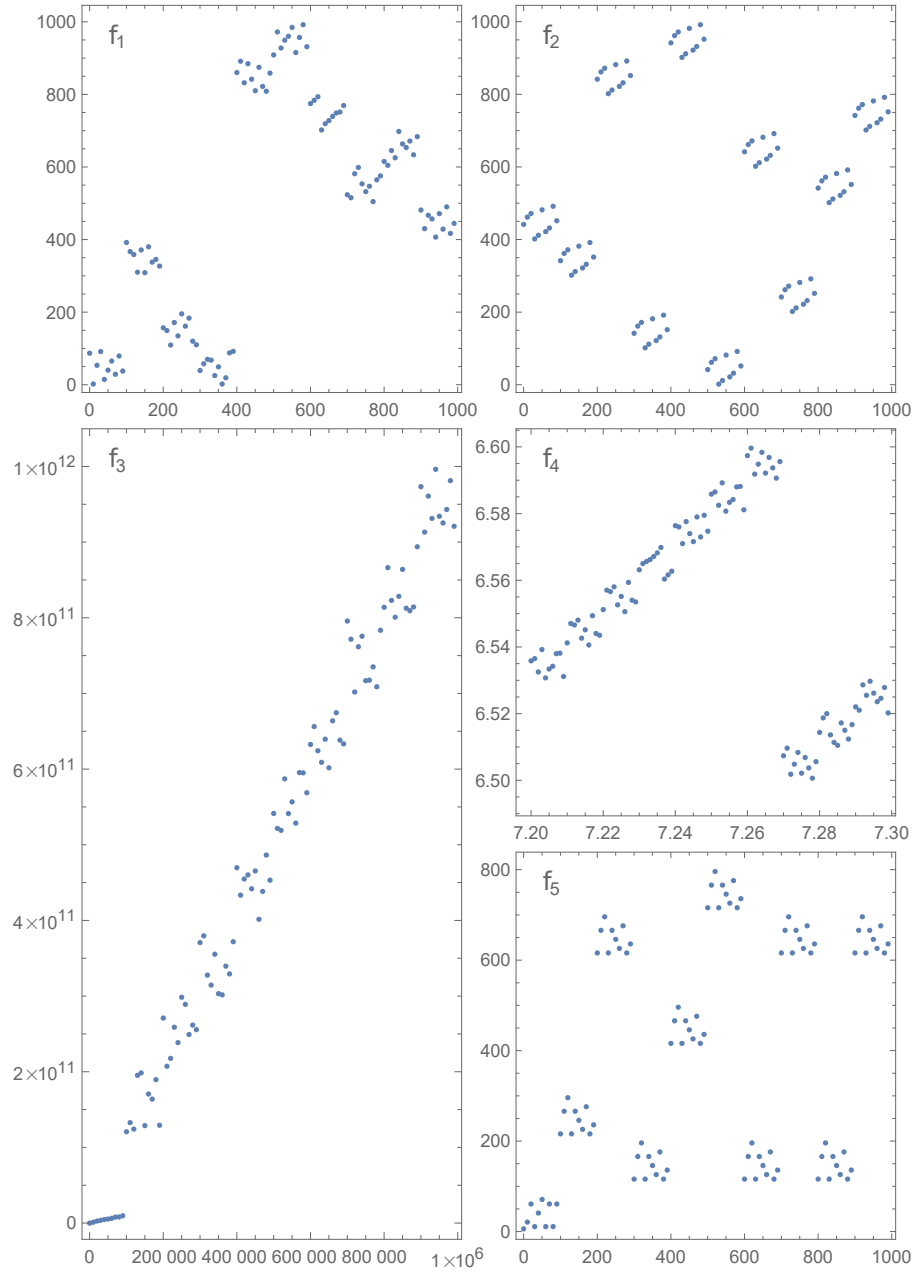
Все функции, изображенные на графиках ниже, являются однозначными. Буквенное окончание индекса функции, как, например, у f_{16A} , f_{16B} , указывает на то, что это графики одной функции, которые, либо изображают разные ее интервалы, либо ее подынтервалы с меньшим приращением Δx .

Примечание А.1. Графики функций f_{16A} , f_{19} , f_{20} , f_{21B} (с.с. 59, 61, 62 соответственно) в целях облегчения файлов изображены с неполным набором точек, но передают характер функций достаточно точно для целей демонстрации. Удалялись только точки, находящиеся очень близко друг от друга, что сохранило адекватность графиков. Для краткости, их приращения Δx в подрисовочных определениях указаны для полного набора точек; фактическое соответствие «интервал x — приращение Δx » перечислено ниже:

- (1) f_{16A} , f_{19} и f_{20} :
 $[0, 20000), [40000, 50000) - \Delta x = 10^1$;
 $[20000, 40000), [50000, 100000) - \Delta x = 10^2$;
- (2) f_{21B} :
 $[0, 1000), [8000, 10000), [22000, 23000),$
 $[34000, 35000), [36000, 37000), [38000, 39000),$
 $[52000, 54000), [55000, 57000), [81000, 82000), [87000, 89000) - \Delta x = 10^0$;
 $[1000, 8000), [20000, 22000), [23000, 34000), [35000, 36000),$
 $[37000, 38000), [39000, 40000), [50000, 52000), [54000, 55000),$
 $[57000, 60000), [80000, 81000), [82000, 87000), [89000, 90000) - \Delta x = 10^1$;
 $[10000, 20000), [40000, 50000), [60000, 80000), [90000, 100000) - \Delta x = 10^2$.

Как выглядят соединенные непрерывными поверхностями точки, заданные DR -функциями, можно найти здесь:

<https://youtu.be/DhV-piIEVQo>.

Рис. 1. $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, 5$,

$$f_1(x) = 12.3456 \mathrel{+}_2 x, \quad \Delta x = 10$$

$$f_2(x) = x \mathrel{+}_4 987.654, \quad \Delta x = 10$$

$$f_3(x) = x \mathrel{*}_2^0 x, \quad \Delta x = 10^4$$

$$f_4(x) = x \mathrel{-}_2 0.123456, \quad \Delta x = 10^{-3}$$

$$f_5(x) = x \mathrel{-}_6 x \quad \Delta x = 10$$

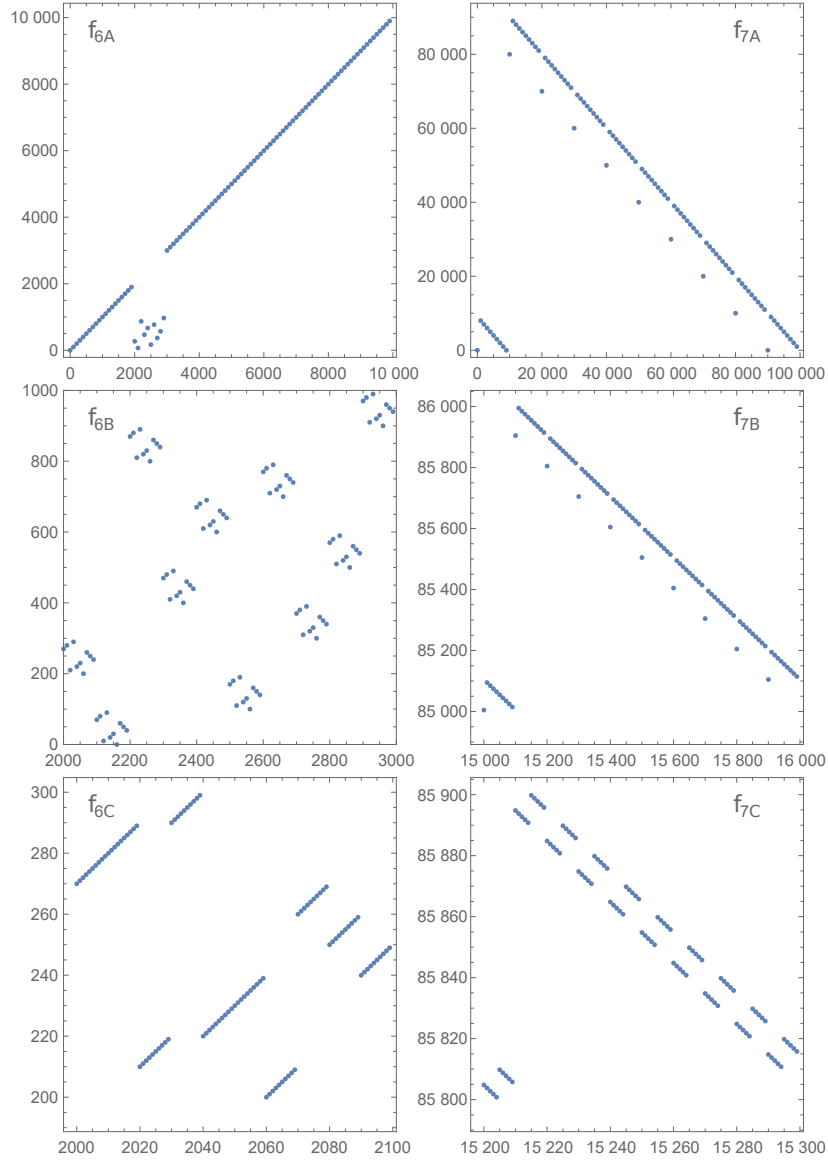


Рис. 2. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_i = f_{6A}, \dots, f_{7C}$,

$$f_{6A}(x) = 987.654 \text{ }_4 (x \text{ }_4 987.654), \quad \Delta x = 10^2$$

$$f_{6B}(x) = f_{6A}(x), \quad x \in [2000, 3000], \quad \Delta x = 10$$

$$f_{6C}(x) = f_{6A}(x), \quad x \in [2000, 2100], \quad \Delta x = 1$$

$$f_{7A}(x) = [(a(x) \text{ }_2^0 b(x)) \text{ }_4^2 (c(x) \text{ }_3^4 b(x))] \text{ }_8^8 x, \quad \Delta x = 10^3$$

$$a(x) = (x \text{ }_6^0 199992.34) \text{ }_1^8 x,$$

$$b(x) = (x \text{ }_8^1 x) \text{ }_0^2 (x \text{ }_8^1 x), \quad c(x) = (a(x) \text{ }_2^0 b(x)) \text{ }_3^7 x,$$

$$f_{7B}(x) = f_{7A}(x), \quad x \in [15000, 16000], \quad \Delta x = 10$$

$$f_{7C}(x) = f_{7A}(x), \quad x \in [15200, 15300], \quad \Delta x = 1$$

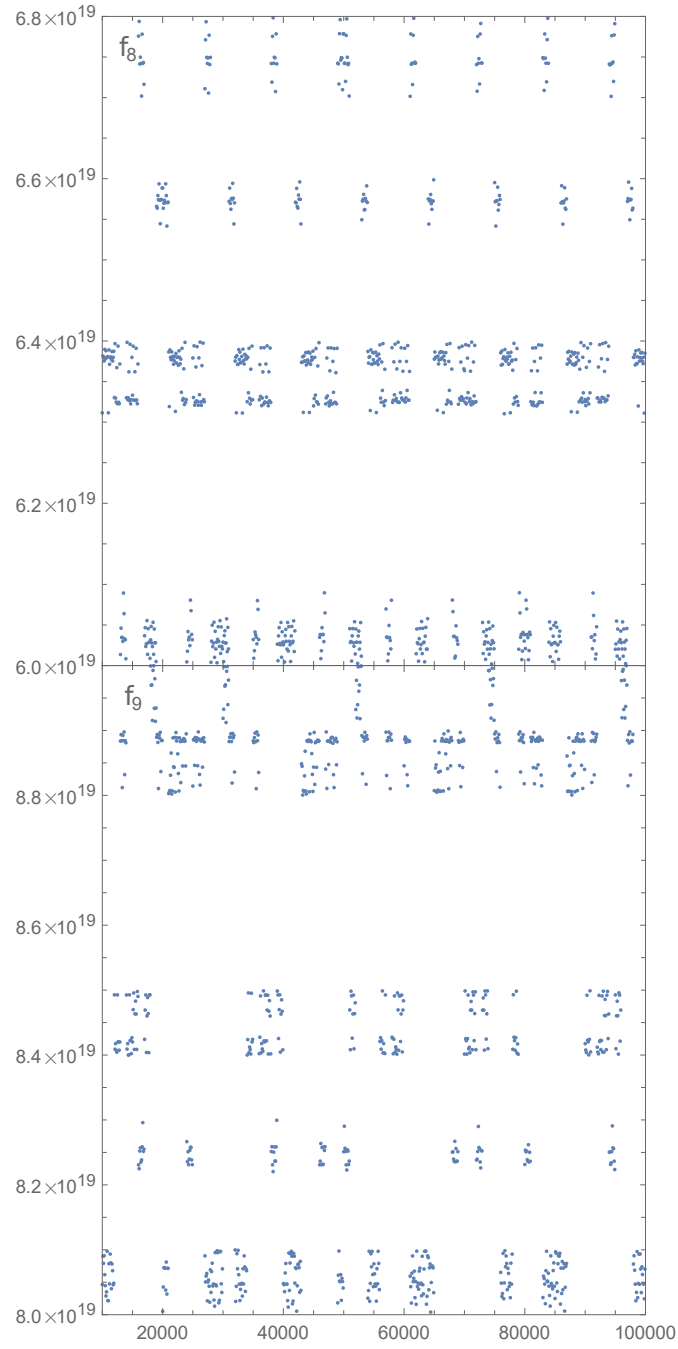


Рис. 3. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 8, 9$,
 $f_8(x) = [(x *^6_6 x) \overline{}_5 x] *^0_4 [(x *^6_6 x) \overline{}_5 x], \quad \Delta x = 10^2$
 $f_9(x) = [(x *^7_6 x) \overline{}_5 x] *^3_4 [(x *^7_6 x) \overline{}_5 x], \quad \Delta x = 10^2$

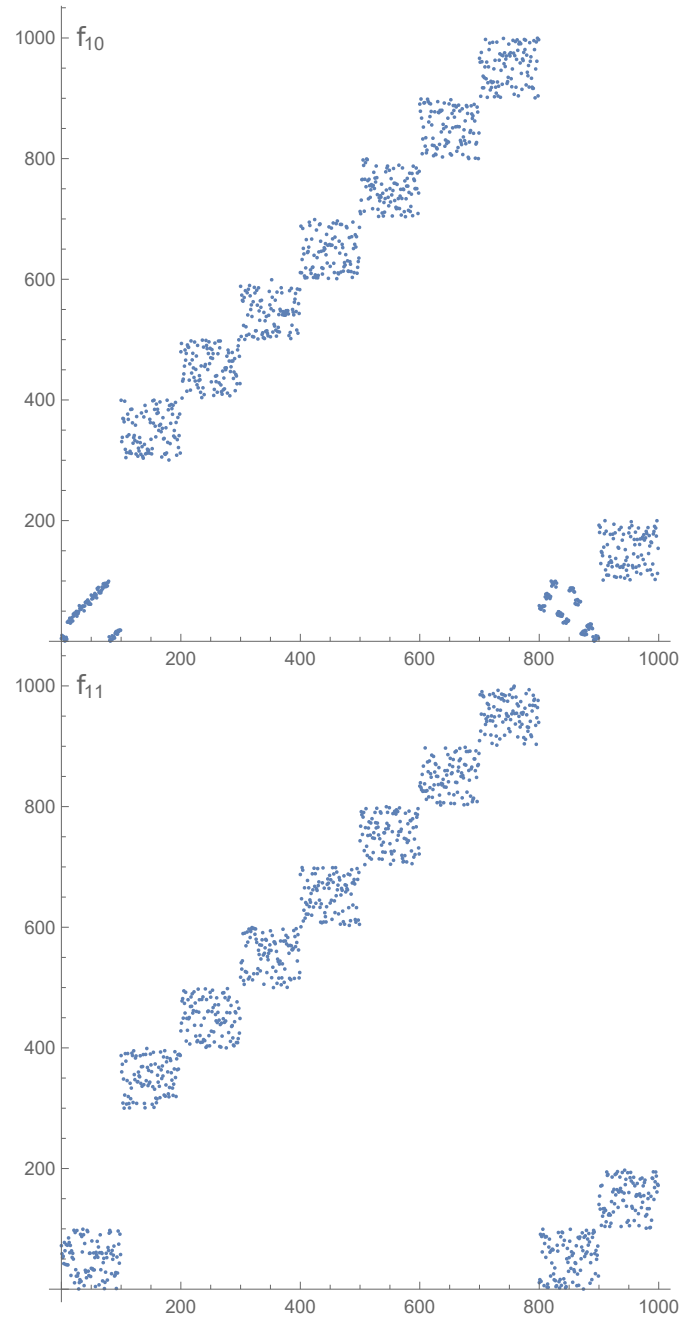
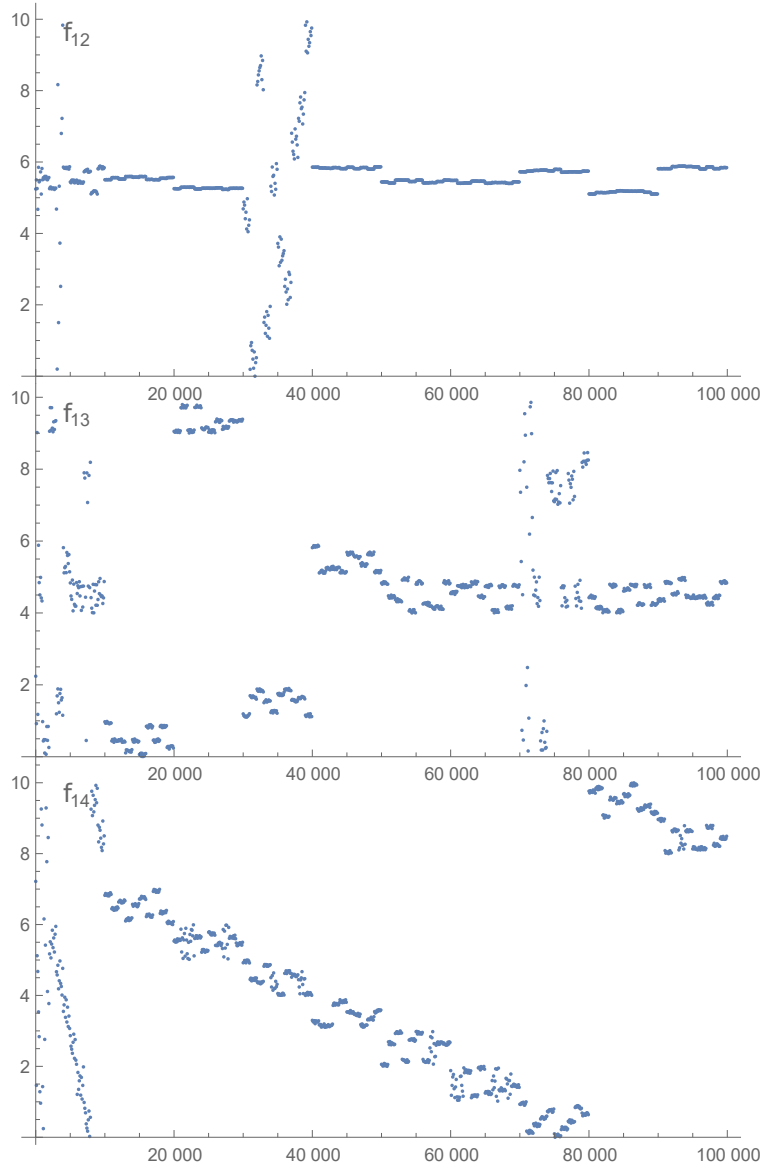


Рис. 4. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 10, 11$,
 $f_{10}(x) = [(5.55 \frac{5}{3} x)]^{\frac{5}{2}} [(5.55 \frac{5}{3} x)]^{\frac{5}{4}} (5.55 \frac{5}{3} x), \quad \Delta x = 1$
 $f_{11}(x) = [(5.55 \frac{5}{3} x)]^{\frac{5}{2}} [(5.55 \frac{5}{3} x)]^{\frac{5}{4}} (8.88 \frac{5}{3} x), \quad \Delta x = 1$

Рис. 5. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 12, \dots, 14$,

$$f_{12}(x) = [((x \dot{+}_0 12.34) \overset{6}{/}_1 x) * \overset{0}{_2} a(x)] \overset{2}{/}_4 [(98.76 * \overset{6}{_3} x) \overset{6}{/}_3 x], \quad \Delta x = 10^2$$

$$a(x) = (x * \overset{1}{_1} x) \overset{1}{/}_2 (x * \overset{1}{_1} x),$$

$$f_{13}(x) = (c(x) * \overset{0}{_2} b(x)) \overset{2}{/}_4 [(c(x) * \overset{0}{_2} b(x)) * \overset{7}{_3} x] \overset{6}{/}_3 b(x), \quad \Delta x = 10^2$$

$$b(x) = (x * \overset{1}{_1} x) \overset{2}{/}_6 (x * \overset{1}{_1} x), \quad c(x) = (x \dot{-}_0 12.34) \overset{8}{/}_1 x,$$

$$f_{14}(x) = [(d(x) * \overset{0}{_2} e(x)) \overset{2}{/}_4 f(x)] \overset{7}{/}_7 d(x), \quad \Delta x = 10^2$$

$$d(x) = (x \dot{-}_0 199992.34) \overset{8}{/}_1 x, \quad e(x) = (x * \overset{1}{_8} x) \overset{2}{/}_0 (x * \overset{1}{_8} x),$$

$$f(x) = [(d(x) * \overset{0}{_2} e(x)) * \overset{7}{_3} x] \overset{4}{/}_3 e(x),$$

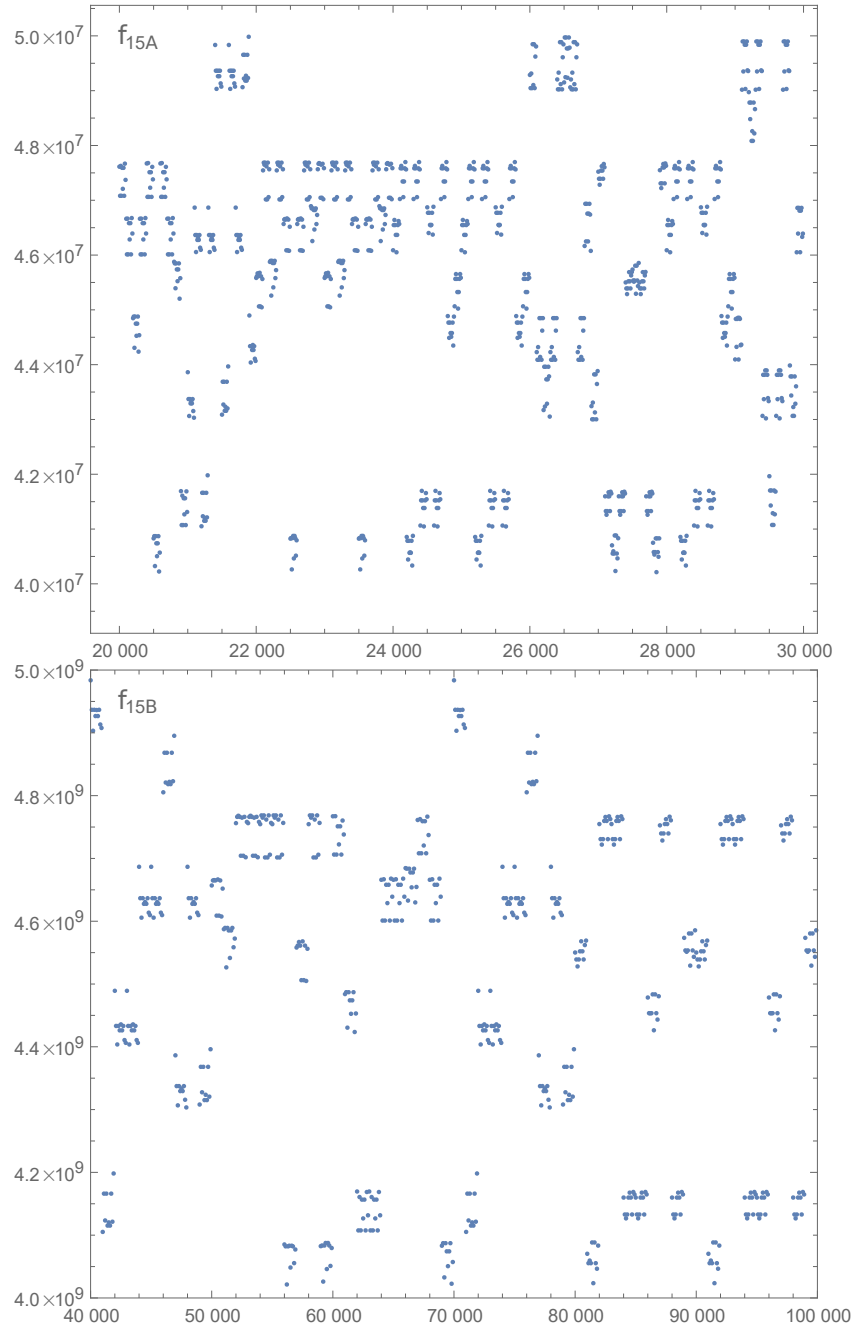


Рис. 6. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_i = f_{15A}, f_{15B}$,
 $f_{15A}(x) = [(x \frown_6 x) \frown_5 x] *^7_4 [(x \frown_6 x) \frown_5 x]$, $\Delta x = 10$
 $f_{15B}(x) = f_{15A}(x)$, $\Delta x = 10^2$

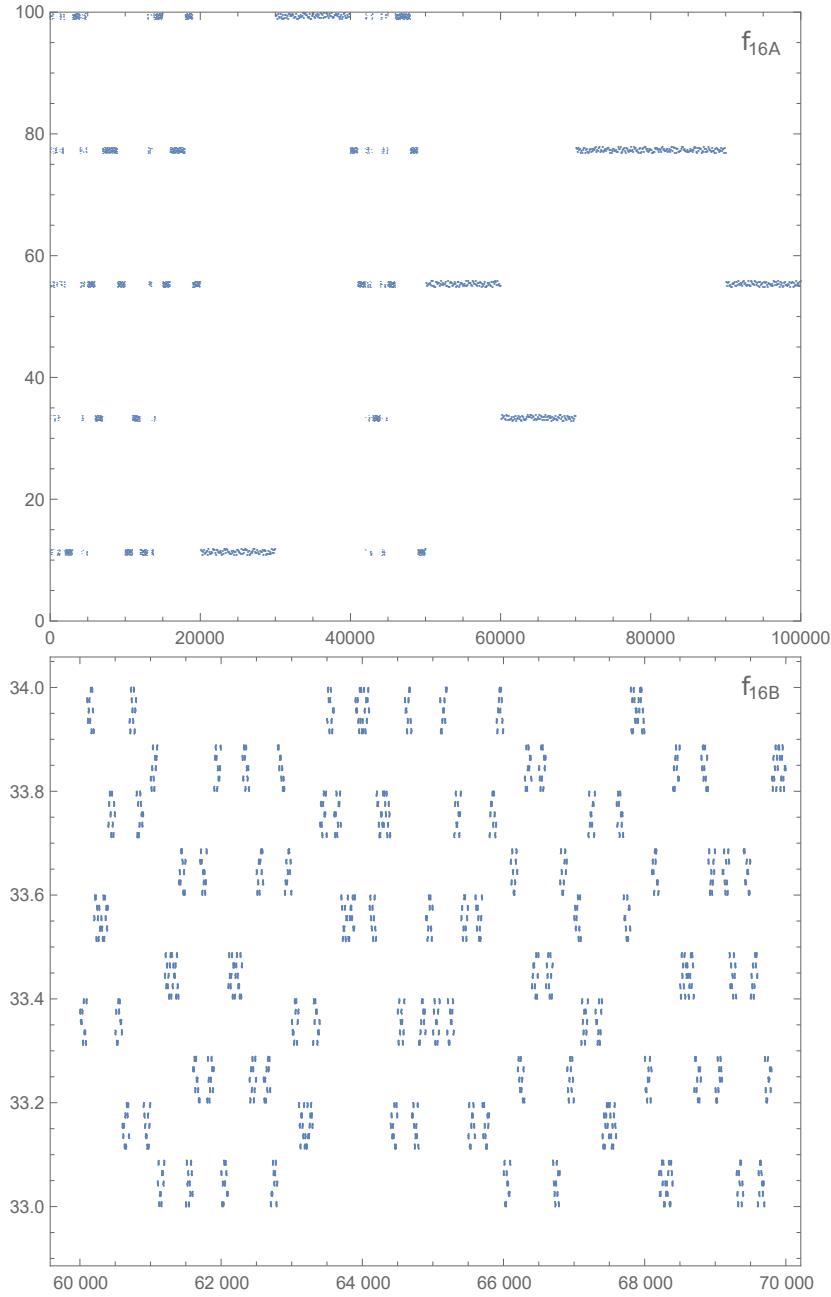


Рис. 7. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_i = f_{16A}, f_{16B}$,
 $f_{16A}(x) = (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)) *_{\frac{8}{3}}^s (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x))$, $\Delta x = 10$
 $a(x) = (x \overset{+}{/}_0 248.136) \overset{0}{/}_2 (11.22 \overset{8}{/}_1 x)$,
 $b(x) = (767.01 *_{\frac{1}{8}}^s x) \overset{+}{/}_3 (x \overset{-}{/}_0 903.425)$,
 $f_{16B}(x) = f_{16A}(x)$, $\Delta x = 1$

См. примечание А.1 на с. 52.

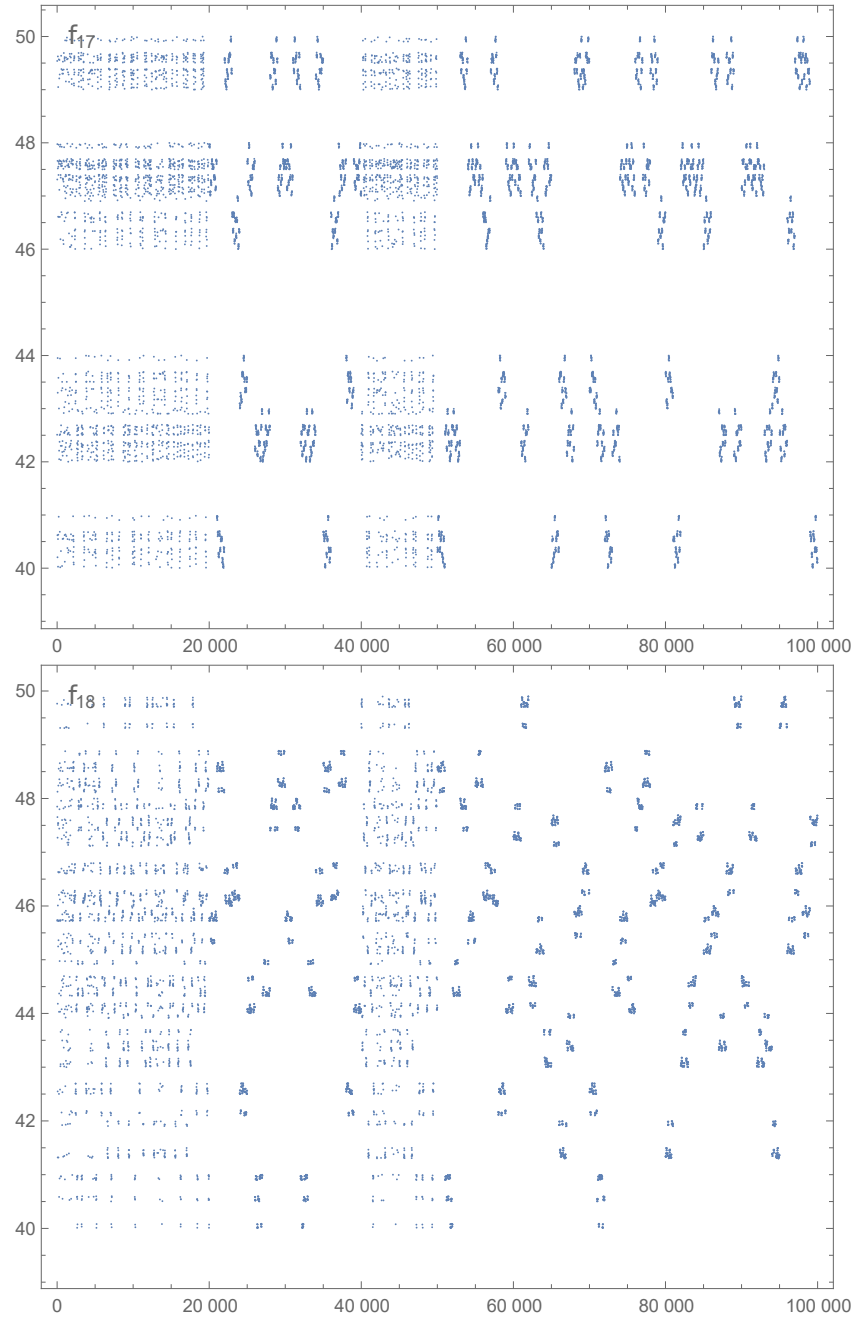


Рис. 8. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 17, 18$,

$$f_{17}(x) = (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)) *^6_5 (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x \overset{+}{_0} 248.136) \overset{0}{_2} (11.22 \overset{8}{/}_1 x),$$

$$b(x) = (767.01 *^1_8 x) \overset{+}{_3} (x \overset{-}{_0} 903.425),$$

$$f_{18}(x) = (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)) *^7_8 (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)), \quad \Delta x = 10$$

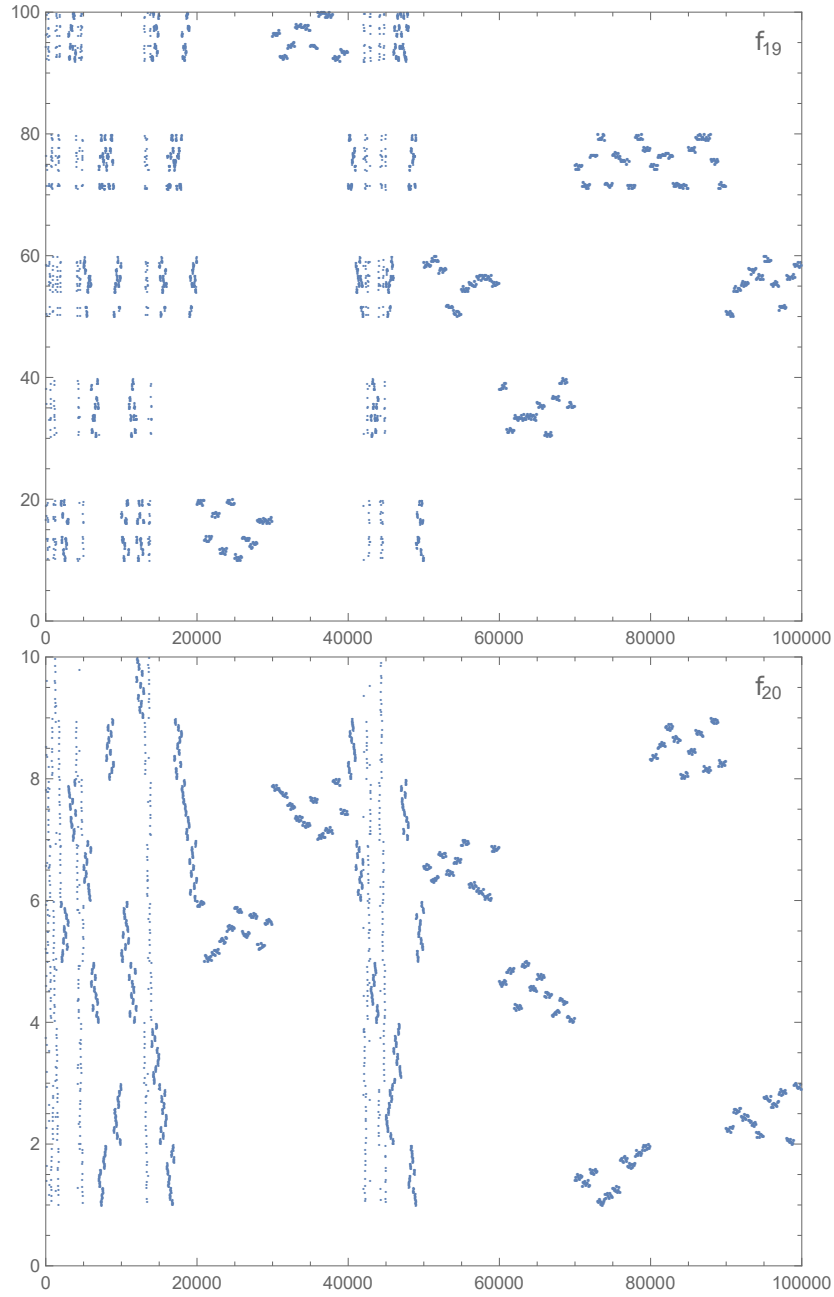


Рис. 9. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 19, 20$,
 $f_{19}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) *^s_0 (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$
 $a(x) = (x +_0 248.136) \frac{1}{2}^0 (11.22 \frac{8}{1} x),$
 $b(x) = (767.01 *^1_8 x) +_3 (x \frown_0 903.425),$
 $f_{20}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) \frac{2}{3}^0 (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$

См. примечание А.1 на с. 52.

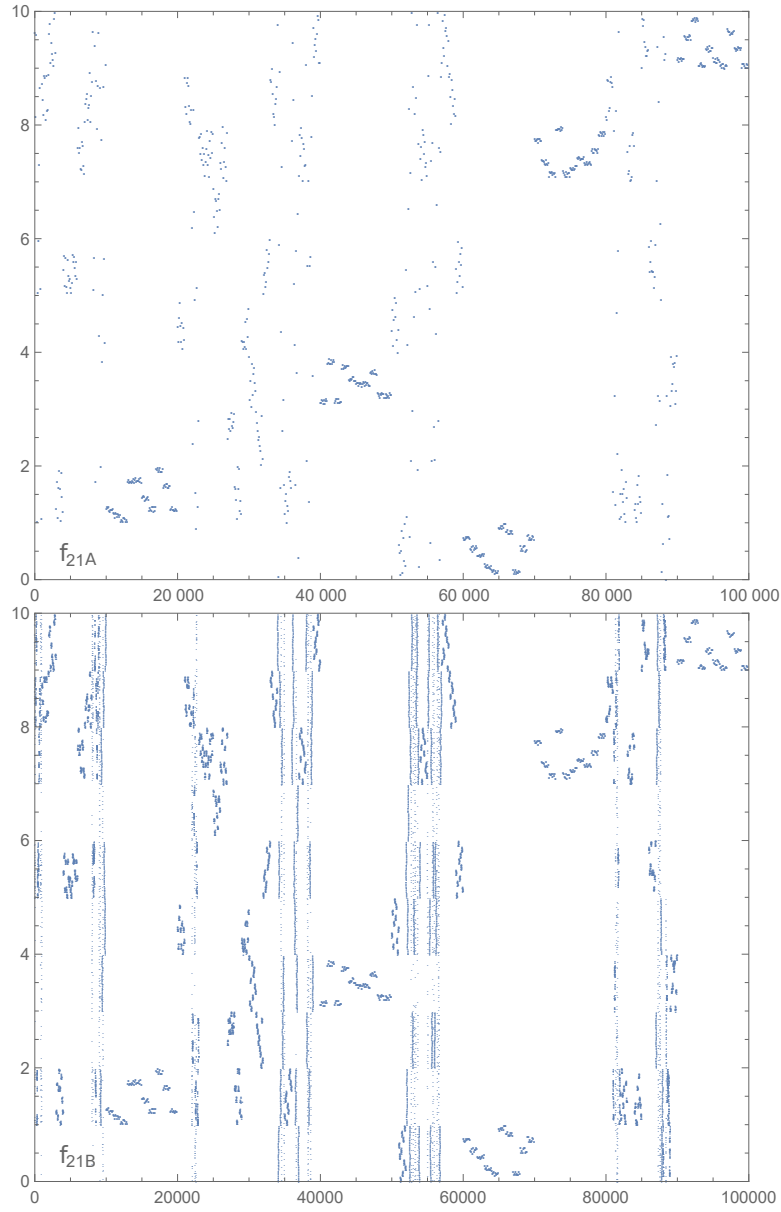


Рис. 10. Определения: $f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f_i = f_{21A}, f_{21B}$,
 $f_{21A}(x) = d(x) \circ_8 \{[(a(x) \circ_2^0 b(x)) \circ_3^7 b(x)] \circ_4^2 c(x)\}, \quad \Delta x = 10^2$
 $a(x) = (x \circ_0^1 98765.43) \circ_1^8 5.43,$
 $b(x) = (x \circ_8^1 5.43) \circ_0^2 (x \circ_8^1 5.43),$
 $c(x) = [(a(x) \circ_2^0 b(x)) \circ_3^7 b(x)] \circ_3^4 b(x),$
 $d(x) = \{[(a(x) \circ_2^0 b(x)) \circ_3^7 b(x)] \circ_4^2 c(x)\} \circ_0^0 c(x),$
 $f_{21B}(x) = f_{21A}(x), \quad \Delta x = 1$

См. примечание А.1 на с. 52.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ТАБЛИЦЫ ОПЕРАЦИЙ

Таблица В.1: Таблицы операций.

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	48	15	91	87	23	74	36	59	62
1	35	11	67	82	29	98	40	53	04	76
2	61	57	22	49	95	06	38	80	73	14
3	19	86	54	33	70	42	97	01	65	28
4	93	20	08	56	44	71	85	69	12	37
5	84	63	30	78	16	55	09	92	27	41
6	47	02	79	25	51	34	66	18	90	83
7	26	94	43	10	68	89	52	77	31	05
8	72	39	96	64	03	17	21	45	88	50
9	58	75	81	07	32	60	13	24	46	99
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	02	97	43	65	16	70	54	81	29	38
1	79	14	95	40	57	33	81	06	68	22
2	40	63	28	87	31	16	75	52	94	09
3	64	09	70	36	22	81	48	95	13	57
4	57	38	66	71	43	29	92	10	05	84
5	85	40	19	22	94	58	06	63	37	71
6	23	56	31	09	88	94	60	47	72	15
7	38	25	87	93	00	42	19	74	51	66
8	91	72	54	18	65	07	33	29	86	40
9	16	81	02	54	79	65	27	38	40	93
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	20	38	19	07	85	96	74	52	63	41
1	89	01	54	96	12	47	63	28	70	35
2	67	94	02	75	41	23	58	16	39	80
3	08	46	75	83	69	52	31	90	24	17
4	56	72	31	68	24	10	89	45	07	93
5	14	69	83	42	97	35	20	71	56	08
6	95	23	47	51	30	78	16	09	82	64
7	73	15	60	39	58	04	92	87	41	26
8	41	87	26	10	73	69	05	34	98	52
9	32	50	98	24	06	81	47	63	15	79

$\overline{3}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	80	97	18	29	31	42	53	64	05	76
1	69	10	86	31	28	53	42	75	94	07
2	07	42	30	94	13	89	61	58	76	25
3	38	05	23	10	72	61	97	46	89	54
4	56	39	05	73	40	27	14	82	61	98
5	74	61	57	06	85	90	38	29	43	12
6	25	84	92	68	09	36	70	13	57	41
7	13	76	41	87	54	08	25	90	32	69
8	41	28	64	52	96	75	09	37	10	83
9	92	53	79	45	67	14	86	01	28	30
$\overline{4}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	22	32	12	02	82	92	72	52	62	42
1	82	02	52	92	12	42	62	22	72	32
2	62	92	02	72	42	22	52	12	32	82
3	02	42	72	82	62	52	32	92	22	12
4	52	72	32	62	22	12	82	42	02	92
5	12	62	82	42	92	32	22	72	52	02
6	92	22	42	52	32	72	12	02	82	62
7	72	12	62	32	52	02	92	82	42	22
8	42	82	22	12	72	62	02	32	92	52
9	32	52	92	22	02	82	42	62	12	72
$\overline{5}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	40	10	90	80	20	70	30	50	60
1	30	10	60	80	20	90	40	50	00	70
2	60	50	20	40	90	00	30	80	70	10
3	10	80	50	30	70	40	90	00	60	20
4	90	20	00	50	40	70	80	60	10	30
5	80	60	30	70	10	50	00	90	20	40
6	40	00	70	20	50	30	60	10	90	80
7	20	90	40	10	60	80	50	70	30	00
8	70	30	90	60	00	10	20	40	80	50
9	50	70	80	00	30	60	10	20	40	90
$\overline{6}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	45	75	35	95	05	65	25	85	55	15
1	15	45	75	35	95	05	65	25	85	55
2	55	15	45	75	35	95	05	65	25	85
3	85	55	15	45	75	35	95	05	65	25
4	25	85	55	15	45	75	35	95	05	65
5	65	25	85	55	15	45	75	35	95	05
6	05	65	25	85	55	15	45	75	35	95
7	95	05	65	25	85	55	15	45	75	35
8	35	95	05	65	25	85	55	15	45	75
9	75	35	95	05	65	25	85	55	15	45

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	45	76	35	96	05	66	25	86	55	16
1	15	46	75	36	95	06	65	26	85	56
2	55	16	45	76	35	96	05	66	25	86
3	85	56	15	46	75	36	95	06	65	26
4	25	86	55	16	45	76	35	96	05	66
5	65	26	85	56	15	46	75	36	95	06
6	05	66	25	86	55	16	45	76	35	96
7	95	06	65	26	85	56	15	46	75	36
8	35	96	05	66	25	86	55	16	45	76
9	75	36	95	06	65	26	85	56	15	46

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	99	88	77	66	55	44	33	22	11	00
1	88	77	66	55	44	33	22	11	00	99
2	77	66	55	44	33	22	11	00	99	88
3	66	55	44	33	22	11	00	99	88	77
4	55	44	33	22	11	00	99	88	77	66
5	44	33	22	11	00	99	88	77	66	55
6	33	22	11	00	99	88	77	66	55	44
7	22	11	00	99	88	77	66	55	44	33
8	11	00	99	88	77	66	55	44	33	22
9	00	99	88	77	66	55	44	33	22	11

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael Grossman and Robert Katz. Non-Newtonian Calculus, ISBN 0912938013, Lee Press, 1972.
https://books.google.by/books?id=RLuJmE5y8pYC&printsec=frontcover&dq=%22non-newtonian+calculus%22&hl=en&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=%22non-newtonian%20calculus%22&f=false
- [2] <https://sites.google.com/site/nonnewtoniancalculus/nonclassical-arithmetics>.
- [3] Hjortland OT. What counts as evidence for a logical theory?. The Australasian Journal of Logic. 2019 Nov 18;16(7):250-82.
<https://doi.org/10.26686/ajl.v16i7.5912>.
- [4] Robert K. Meyer, Chris Mortensen. Inconsistent Models for Relevant Arithmetics. Australasian Journal of Logic (18:5) 2021, Article no. 6, 380-400
<https://doi.org/10.26686/ajl.v18i5.6908>.
- [5] Priest, G. (2003). Inconsistent Arithmetics: Issues Technical and Philosophical. In: Hendricks, V.F., Malinowski, J. (eds) Trends in Logic. Trends in Logic, vol 21. Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-3598-8_10.
- [6] Burgin, Mark and Czachor, Marek. (2020). Non-Diophantine Arithmetics in Mathematics, Physics and Psychology.
<https://doi.org/10.1142/11665>.
- [7] Burgin, M. (2019). On Weak Projectivity in Arithmetic. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 12(4), 1787–1810.
<https://doi.org/10.29020/nybg.ejpm.v12i4.3545>
- [8] <https://terrytao.wordpress.com/2008/11/13/> (Retrieved: February 3, 2023)
- [9] Borges, Herivelto & Homma, Masaaki. (2015). Points on singular Frobenius nonclassical curves. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series.
<https://doi.org/10.1007/s00574-016-0008-6>.
- [10] Asgarli, S., Duan, L., & Lai, K. (2022). Frobenius nonclassical hypersurfaces.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.11981>

- [11] DeBenedictis, E.A., Chory, E.J., Gretton, D.W. et al. Systematic molecular evolution enables robust biomolecule discovery. *Nat Methods* 19, 55–64 (2022).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01348-4>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [12] Delgado, R.N., Allen, D.E., Keefe, M.G. et al. Individual human cortical progenitors can produce excitatory and inhibitory neurons. *Nature* (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04230-7>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [13] Shim, H.S., Horner, J.W., Wu, C.J. et al. Telomerase reverse transcriptase preserves neuron survival and cognition in Alzheimer’s disease models. *Nat Aging* 1, 1162–1174 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s43587-021-00146-z>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [14] Liu, K., Deng, S., Ye, C. et al. Mapping single-cell-resolution cell phylogeny reveals cell population dynamics during organ development. *Nat Methods* 18, 1506–1514 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01325-x>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [15] Foley, E.D.B., Kushwah, M.S., Young, G. et al. Mass photometry enables label-free tracking and mass measurement of single proteins on lipid bilayers. *Nat Methods* 18, 1247–1252 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01261-w>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [16] Goodwin, A., Jones, E.J.H., Salomone, S. et al. INTERSTAARS: Attention training for infants with elevated likelihood of developing ADHD: A proof-of-concept randomised controlled trial. *Transl Psychiatry* 11, 644 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41398-021-01698-9>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [17] Asteria, L., Zahn, H.P., Kosch, M.N. et al. Quantum gas magnifier for sub-lattice-resolved imaging of 3D quantum systems. *Nature* 599, 571–575 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04011-2>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [18] Trapp, A., Kerepesi, C. & Gladyshev, V.N. Profiling epigenetic age in single cells. *Nat Aging* 1, 1189–1201 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s43587-021-00134-3>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [19] Graham, S.E., Clarke, S.L., Wu, K.H.H. et al. The power of genetic diversity in genome-wide association studies of lipids. *Nature* 600, 675–679 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04064-3>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [20] Watts, S., McElroy, M., Migicovsky, Z. et al. Cannabis labelling is associated with genetic variation in terpene synthase genes. *Nat. Plants* 7, 1330–1334 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41477-021-01003-y>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [21] Zhao, D., Tian, X., Doronkin, D.E. et al. In situ formation of ZnOx species for efficient propane dehydrogenation. *Nature* 599, 234–238 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-03923-3>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [22] Akemann, W., Wolf, S., Villette, V. et al. Fast optical recording of neuronal activity by three-dimensional custom-access serial holography. *Nat Methods* 19, 100–110 (2022).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01329-7>. (Retrieved: January 6, 2022)
- [23] S.E. Kochemazov, O.S. Zaikin, The search for pairs of orthogonal diagonal latin squares of order 10 in the volunteer computing project sat@home. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Computational Mathematics and Software Engineering”*, 2015, vol. 4, no. 3, (In Russian) pp. 95–108
- [24] Bruck, R.H. (1971). *A Survey of Binary Systems*. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-43119-1, section I.2

Email address: a.n.zhvanko@gmail.com