УДК 517.53, 517.54

ГИПОТЕЗА КШИЖА И ВЫПУКЛЫЕ ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКУИИ.

Ступин Д. Л.
Тверь

При помощи выпуклых однолистных функций найдены точные оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в ноль функций.

Using convex univalent functions we find sharp estimates of the moduli of initial Taylor coefficients on a class of bounded nonvanishing functions.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, выпуклые функции, подчинённые функции, класс Каратердори, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов, многочлены Лагерра.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, convex functions, subordinate functions, Caratheodory class, sharp Taylor coefficient modulus estimates, Laguerre polynomials.

1. Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж высказал гипотезу [1, 2] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F^*(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F^*(z,t) \coloneqq e^{-t\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Задачу об оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до шестого тейлоровского коэффициента включительно [15]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

2. Цель работы и актуальность

Цель данной статьи состоит в том, чтобы установить связь между начальными тейлоровскими коэффициентами функций $F(z,t)$ и выпуклыми однолистными функциями. Эта связь может быть установлена нетривиальным образом при достаточно больших и малых значениях параметра t.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [3] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс B посредством класса Ω_0, связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

3. Вспомогательные соображения

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{2}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \qquad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Из геометрических соображений ясно [3], что каждую функцию из класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C, \tag{3}$$

где класс C состоит из голоморфных в круге Δ функций $h(z)$ с нормировкой $h(0) = 1$ и $\operatorname{Re} h(z) > 0$, при $z \in \Delta$.

Класс всех функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круге Δ, с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, отображающих Δ на выпуклую область, обозначается S^0.

Отметим, что при $t > 0$ формула (3) задаёт биекцию B_t и C, а формула (2) — биекцию B_t и Ω_0, биекцию же C и S^0 задаёт формула

$$h(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \qquad f \in S^0, \quad h \in C. \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$\{f\}_n = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{k=1}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{5}$$

Продифференцировав (3) выведем, что

$$\{f\}_n = -\frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Если взять $t = 1/(n-1)$, то (6) можно записать в виде очень близком к (5).

$$\{f\}_n = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{k=1}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k} - \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

4. Следствия из теории подчинённых функций

Остановимся на представлениях вида (2). Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ. Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [5], однако термин был введён Д. И. Литльвудом [6] и В. Рогозинским [3], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [7, 8, 18, 12, 13]).

В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F^*\}_k(t)$ функции $F^*(z,t)$.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчинённых функции $F(z)$. Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [3] и равенство достигается только на вращениях F в плоскости переменной z.

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Если f и F голоморфны в Δ и найдётся $\omega \in \Omega_0$, такая что $f(z) = F(\omega(z))$ в Δ, то есть $f(z) \prec F(z)$ в Δ, то $\{f\}_0 = \{F\}_0$ и*

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{F\}_j \{\omega^j\}_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $n \in \mathbb{N}$, $f \prec F$, а f и F — голоморфные функции, то $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \{f\}_n z^n$, $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \{F\}_j z^j$, $\omega(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \{\omega\}_k z^k$, $(\omega(z))^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \{\omega^n\}_k z^k$, откуда

$$f(z) = F(\omega(z)) = \sum_{j=0}^{\infty} \{F\}_j \omega(z)^j = \{F\}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \{F\}_j \{\omega^j\}_n \right) z^n.$$

∎

Имеет место следующее простое, но важное для дальнейшего утверждение [3]:

Лемма 1. *Если функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{s\}_n z^n$, регулярная в Δ, подчинена функции $F(z) \in S^0$, то справедливы точные оценки $|\{f\}_n| \leqslant |\{F\}_1| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Равенство достигается только на функциях $F(e^{i\varphi} z^n)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

4. Связь $F(z,t)$ с выпуклыми однолистными функциями

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [4, 11]:

Теорема 1 (Каратеодори, Тёплиц). *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и даны фиксированные комплексные числа $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n$. Полином*

$$p_n(z) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k$$

можно продолжить до функции

$$h(z) = p_n(z) + o(z^{n-1}) \in C$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k := \begin{vmatrix} 2 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}_1} & 2 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}_{k-1}} & \overline{\{h\}_{k-2}} & \cdots & 2 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}_k} & \overline{\{h\}_{k-1}} & \cdots & \overline{\{h\}_1} & 2 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера m, начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и

$$h(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geqslant 0,\ \varphi_k \in [0, 2\pi),\ \varphi_k \neq \varphi_j,\ k \neq j.$$

Изучим коэффициенты мажорирующей функции $F^*(z,t)$ класса B_t. Отметим, что нулевой коэффициент этой функции не входит в формулу (7).

Первый коэффициент $\{F^*\}_1$ функции $F^*(z,t)$ равен $-2t/e^t$. Нормируем функцию $F^*(z,t)$ так, чтобы первый коэффициент в её тейлоровском разложении стал равен 1. Введём обозначение

$$F(z,t) \coloneqq \frac{F^*(z,t)}{\{F^*\}_1(t)}. \tag{8}$$

Теперь естественно напрашивается вопрос: не существует ли выпуклых однолистных функций $f \in S^0$, имеющих несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих со всеми первыми коэффициентами функции $F(z,t)$, за исключением коэффициента $\{F\}_0(t)$?

Имеет место следующее утверждение [16]:

Теорема 2. *Для любого $t > 0$ и $n \leqslant 2/t + 1$, $n \in \mathbb{N}$, полином*

$$p_n(z,t) \coloneqq z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$. При $t = 2/(n-1)$, $n > 1$, продолжение единственно.

Доказательство. Подставив функцию $F(z,t)$ из формулы (8) в формулу (4) получаем

$$h(z) = 1 + 2z \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} t \right).$$

Откуда элементарно выводим замечательно простую формулу

$$\{h\}_j = 2(1 - jt), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Чтобы воспользоваться критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1) продолжаемости полинома до функции класса C нам необходимо вычислить главные миноры M_{j-1}, для всех $j \in \mathbb{N}$. Здесь индекс $j-1$ означает, что размерность соответствующей минору M_{j-1} матрицы равна j. Эти вычисления мы оформим в виде леммы 2, формулировку и доказательство которой разместим сразу после этого доказательства. Итак, согласно лемме 2, имеем:

$$M_{j-1} = 2^{2(j-1)} t^{j-1} (2 - (j-1)t), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Очевидно, что миноры $M_1, \ldots, M_{n-1}$ неотрицательны тогда и только тогда, когда $t \leqslant 2/(n-1)$, при $n > 1$, и $t > 2$, при $n = 1$, или $n \leqslant 2/t + 1$.

То, что при условии $t = 2/(n-1)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, продолжение единственно следует из теоремы 1. ■

Докажем справедливость формулы (10), которой мы пользовались при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. *Если тейлоровские коэффициенты $\{h\}_j$, $j \in \mathbb{N}$, определены по формуле (9), то для всех целых $n \geqslant 0$ $M_n = 2^{2n} t^n (2 - nt)$.*

Доказательство. Минор $M_n/2^{n+1}$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ 1-t & 1 & 1-t & \dots & 1-(n-2)t & 1-(n-1)t \\ 1-2t & 1-t & 1 & \dots & 1-(n-3)t & 1-(n-2)t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & 1-(n-3)t & \dots & 1 & 1-t \\ 1-nt & 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & \dots & 1-t & 1 \end{vmatrix}.$$

Отняв от каждой строки, за исключением первой, предыдущую получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ -t & t & t & \dots & t & t \\ -t & -t & t & \dots & t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t & -t & -t & \dots & t & t \\ -t & -t & -t & \dots & -t & t \end{vmatrix}.$$

К каждому столбцу, кроме последнего, прибавим последний столбец

$$\begin{vmatrix} 2-nt & 1-(n+1)t & 1-(n+2)t & \dots & 1-(2n-1)t & 1-nt \\ 0 & 2t & 2t & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 2t & \dots & 2t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} =$$

$$= 2^{n-1}t^n(2-nt).$$

■

5. Основной результат для малых t

Пользуясь теоремой 2, формулой (7) и связанным с ней методом, леммой 1, с учётом нормировки (8), получаем следующий явный результат [16]:

Теорема 3. *Для любого $t > 0$, произвольного $N \leqslant 2/t + 1$, $N \in \mathbb{N}$, и каждой $f^* \in B_t$, справедливы точные оценки*

$$|\{f^*\}_n| \leqslant |\{F^*\}_1(t)| = \frac{2t}{e^t}, \qquad n \in \overline{1, N}. \tag{11}$$

Экстремалями в этих оценках являются только функции $F^*(e^{i\varphi}z^n, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, где функция F^* определена формулой (1).

Доказательство. Фиксируем $\omega \in \Omega_0$, $t > 0$ и $N \leqslant 2/t + 1$, $N \in \mathbb{N}$.

Возьмём натуральный номер n, не превосходящий числа N. Используя формулу (7), запишем n-й коэффициент функции

$$f(z) \coloneqq F(\omega(z), t),$$

где F определена в формуле (8), в виде

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{F\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Теперь применим теорему 2 к n-му отрезку тейлоровского разложения функции $F(z,t)$, который мы обозначили через $p_n(z,t)$. Пусть $S(z)$ — продолжение полинома $p_n(z,t)$ до функции класса S^0. Тогда, используя формулу (7), n-й коэффициент функции

$$s(z) := S(\omega(z), t)$$

можно записать в виде

$$\{s\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{S\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Откуда, согласно лемме 1 получаем, что

$$|\{s\}_n| \leqslant 1.$$

Но $\{S\}_j := \{F\}_j(t)$, где $j \in \{1, \ldots, n\}$, следовательно $\{f\}_n = \{s\}_n$, исходя из чего мы и заключаем, что

$$|\{f\}_n| \leqslant 1.$$

Вспоминая про нормировку (8), мы получаем оценки (11). Точность оценок (11) и вид экстремальных функций вытекает из леммы 1.

Теорема полностью доказана. ∎

Из теоремы 3 следует, что чем меньшее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство, в неравенстве (11), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi} z^n, t)$.

Этот результат интересен при $t \leqslant 2$. Так например, при $t > 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \leqslant 2$ — два коэффициента, при $t \leqslant 1$ — три коэффициента, а при $t \leqslant 1/2$ — пять, и так далее.

Справедлива [17]

Теорема 4. *Для семейства функций* $F^*(z,t)$, $t > 0$, *имеет место гипотеза Кшижа, то есть*

$$|\{F^*\}_n(t)| \leqslant \frac{2}{e}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad t > 0.$$

Равенство достигается только при $t = 1$.

С учётом теоремы 4 теорему 3 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кжижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например можно утверждать, что гипотеза Кжижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t \in [0,\,1/2]} B_t$.

6. Пример продолжения

Пусть $t = 1/2$. Согласно теореме 2, искомое продолжение единственно. Положив в формуле (4)

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 - \frac{19}{120}z^5 + \ldots \in S^0$$

или воспользовавшись формулой (9), получим что

$$h(z) = 1 + z - z^3 - 2z^4 + \ldots \in C.$$

Мы знаем, что функция

$$\omega(z) = \frac{1 - h(z)}{1 + h(z)} = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{8}z^3 + \frac{9}{16}z^4 + \ldots \in \Omega_0.$$

Известно также, что $\omega(z)$ представима в виде произведения Бляшке (см. [14])

$$\omega(z) = \lambda \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2}z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1}z^{n-1}}.$$

Так как продолжение единственно, то $\lambda = 1$ (см. [14]). Составив систему линейных уравнений и найдя параметры $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, получим

$$\omega(z) = z\frac{1 - z^2 - 2z^3}{-2 - z + z^3}.$$

Откуда

$$h(z) = \frac{1 + z - z^3 - z^4}{1 + z^4}.$$

Подставив в формулу (4) полученное выражение для $h(z)$ получаем

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{\left(\frac{v^2 + \sqrt{2}v + 1}{v^2 - \sqrt{2}v + 1}\right)^{\sqrt{2}/4}}{\sqrt{1 + v^4}} dv.$$

7. Асимптотические оценки коэффициентов

Пользуясь теорией подчинения [3] и критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1) Р. Перец сформулировал [8] две теоремы, содержащие асимптотические оценки $|\{f\}_n|$ при достаточно больших или достаточно малых положительных t.

Теорема 5 (Peretz)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Существует число* $t_1(n) > 0$ *такое, что для любой* $f \in B_t$ *при* $0 \leqslant t \leqslant t_1(n)$ *справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F\}_1(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 6 (Peretz)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Существует число* $t_2(n) \geqslant 0$ *такое, что для* $f \in B_t$ *при* $t \geqslant t_2(n)$ *справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F\}_n(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

В этой работе (теорема 3) получен явный результат для случая малых t: Необходимо отметить, что указанные в теореме 3 границы для t не наилучшие. Мы пользовались тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z,t)$ можно продолжить до выпуклой однолистной функции, что дало простую закономерность, связывающая n и t.

Заметим, что из теоремы 3 сразу следует теорема 5. Однако Перец доказал свою теорему намного раньше. Он пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z,t)$ можно продолжить до функции класса Каратеодори C. Используя этот подход при $t = 2$ мы по прежнему сможем оценить только два коэффициента на классе B_t, зато при $t = 1$ этот метод позволяет оценить уже целых шесть коэффициентов.

Д. В. Прохоров и С. В. Романова методами оптимального управления получили аналогичные, но менее явные результаты [10, 9]. В частности, в статье [9] получены точные оценки для малых t, гарантирующие локальный максимум модуля n-го коэффициента.

В формулировках Переца не упоминаются границы для n и t, однако эти границы можно вычислить используя критерий Каратеодори-Тёплица (теорема 1).

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 3/2, && t_2(3) = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2},\\
&t_1(4) = 3 - \sqrt{3}, && t_2(4) = 6,\\
&t_1(5) = 1.129457\ldots, && t_2(5) = 7.899361\ldots,\\
&t_1(6) = 1.037289\ldots, && t_2(6) = 9.785796\ldots.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что для $n = 1$ и $n = 2$ поставленная задача решена полностью. Более того, пожертвовав точностью на B_t мы тем не менее можем получить точную на B оценку при $n = 3$ (см. [8]). Однако, задача точной оценки при $n \geqslant 3$ решена только частично. С другой стороны, интервалы, на которых задача не решена конечны.

Заметим, что эти границы также как и границы теоремы 3 не наилучшие. Подробнее об этом смотрите в работе [15].

Вообще, любые методы оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B следует считать асимптотическими, если они неточны на B_t при некоторых t.

8. Приложение к теории многочленов Лагерра

Последовательность обобщённых многочленов Лагерра $L_n^\alpha(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, определим как последовательность тейлоровских коэффициентов производящей функции $(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-t\frac{z}{1-z}}$, то есть формулой

$$e^{-t\frac{z}{1-z}} = (1-z)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(t)z^n.$$

Ясно, что

$$e^t\{F^*\}_n(t) = L_n^{-1}(2t), \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{12}$$

Согласно формуле (9) — $\{h\}_j = 2(1-jt)$, $j\in\mathbb{N}$, а согласно формуле (5) —

$$\{h\}_{n-1} = (n-1)n\{f\}_n - \sum_{k=2}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \geqslant 3.$$

Имея ввиду формулы (12), (8) и подставив сюда

$$\{f\}_j = \{F\}_j(t) = L_j^{-1}(2t), \qquad j \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

получаем

$$(n-1)nL_n^{-1}(2t) - \sum_{k=2}^{n-1} k(1-(n-k)t)L_k^{-1}(2t) = 2(1-(n-1)t), \qquad n \geqslant 3.$$

Возможно, что это соотношение является новым в теории полиномов Лагерра.

9. Асимптотические оценки коэффициентов при больших значениях параметра t и выпуклые однолистные функции

Начальные коэффициенты функции $F^*(z,t)$ имеют тенденцию к возрастанию при больших значениях параметра t, то есть при $t>2$. Фиксируем $n\in\mathbb{N}$. Нормируем функцию $F^*(z,t)$ так, чтобы n-ый коэффициент в её тейлоровском разложении стал равен 1. Введём обозначение

$$F(z,t) \coloneqq \frac{F^*(z,t)}{\{F^*\}_n(t)}. \tag{13}$$

Оказывается, существуют выпуклые однолистные функции $f\in S^0$, имеющие несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих со всеми первыми n коэффициентами функции $F(z,t)$, взятыми в обратном порядке. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 7. *Пусть $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $t_2(n)$ — наибольший корень уравнения $M_n(t)=0$, где*

$$M_n \coloneqq \begin{vmatrix} \{F\}_1^{-1} & \{F\}_2^{-1} & \dots & \{F\}_n^{-1} \\ \{F\}_2^{-1} & \{F\}_1^{-1} & \dots & \{F\}_{n-1}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{F\}_n^{-1} & \{F\}_{n-1}^{-1} & \dots & \{F\}_1^{-1} \end{vmatrix}.$$

Для любого $t \geqslant t_2(n)$ полином

$$p_n(z,t) \coloneqq z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_{n-k+1}(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$. При $t = t_2(n)$ продолжение единственно.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Подставив полином p_n в формулу (5) вместо функции $g(z)$ получим, что

$$\{h\}_k \coloneqq k(k+1)\{F\}_1 - \sum_{j=2}^{k} (k-j+2)\{F\}_j \{h\}_{j-1}, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Можно показать, что $\{h\}_k = 2\{F\}_1/\{F\}_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$, то есть

$$h(z,t) = 1 + 2\{F\}_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\{F\}_{k+1}} z^k + o(z^{n-1}).$$

Все миноры $M_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, будут положительными при $t > t_2(n)$. Действительно, начиная с некоторого достаточно большого значения t, которое мы обозначим через $t_2(n)$, $\{F\}_k$ будут настолько больше $\{F\}_1$, что указанные определители станут положительными.

Обращение к критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 1) продолжаемости полинома $p_n(z,t)$ до функции $h(z,t)$ класса C завершает доказательство. ■

Имеет место [3]

Теорема 8 (Рогозинский)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f, F голоморфны в Δ, и $f(z) \prec F(z)$ в Δ. Если $\{F\}_n > 0$ и найдётся функция $h(z)$ такая, что* $\operatorname{Re} h(z) > 0$, *где*

$$h(z) = \frac{1}{2}\{F\}_n + \{F\}_{n-1} z + \ldots + \{F\}_1 z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \{h\}_k z^k,$$

то

$$|\{f\}_n| \leqslant \{F\}_n.$$

Равенство достигается только если $f(z) = F(\eta z)$, $|\eta| = 1$, или если

$$\{F\}_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{i(n-k)\theta_j}, \quad k = \overline{2,n},\ 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \{F\}_n,\ \alpha_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Пользуясь теоремами 7, 8 и тем широко известным фактом, что если $f \in S^0$, то $2(f(z)/z - 1/2) \in C$ ([19] стр. 11), получаем следующий результат

Теорема 9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для любого $t \geqslant t_2(n)$ и каждой $f \in B_t$, справедливы точные оценки*

$$|\{f^*\}_k| \leqslant |\{F^*\}_k(t)|, \qquad k \in \overline{1,n}. \tag{14}$$

Экстремалями в этих оценках являются только функции $F^*(e^{i\varphi} z, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, где функция F^* определена формулой (1).

В отличие от случая малых значений параметра t выражение для $t_2(n)$ достаточно сложное. Приведём несколько первых значений $t_1(n)$ и $t_2(n)$:

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 1, && t_2(3) = 3,\\
&t_1(4) = 2/3, && t_2(4) = 4.198468\ldots,\\
&t_1(5) = 1/2, && t_2(5) = 5.600825\ldots,\\
&t_1(6) = 2/5, && t_2(6) = 7.167960\ldots.
\end{aligned}$$

Сравнивая с аналогичной таблицей из пункта 7 видим, что при малых t наш подход проигрывает подходу Р. Переца, а при больших t наоборот.

Из теоремы 9 следует, что чем большее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство, в неравенстве (14), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi}z, t)$.

Этот результат интересен при $t \geqslant 2$. Так например, при $t < 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \geqslant 2$ — два коэффициента, при $t \geqslant t_2(3)$ — три коэффициента, а при $t \geqslant t_2(4)$ — четыре, и так далее.

С учётом теоремы 4 теорему 9 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кжижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например можно утверждать, что гипотеза Кжижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t \geqslant t_2(5)} B_t$.

10. Заключение

В настоящей статье найдена связь классов B_t с классом S^0. При помощи этой связи найдены точные оценки коэффициентов при больших и малых t.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе B, а также на других классах голоморфных функций.

Список литературы

[1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[3] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[4] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[5] Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.

[6] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

[7] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[8] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.

[9] Прохоров Д. В., Романова С. В. Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей. // Известия РАН, Серия математическая. 2006. Т. 70. № 4. С. 209–224.

[10] Романова С. В. Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения. // Известия вузов. Математика. 2002. № 11. С. 83–85.

[11] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.

[12] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.

[13] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.

[14] Ступин Д. Л. 2022. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112522

[15] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112619

[16] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений, Тверь. 2010. Стр. 52–60.

[17] Lewandowski Z., Szynal J. An upper bound for the Laguerre polynomials. // J. Comp. Appl. Math. 1998. V. 99. P. 529–533.

[18] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[19] Schober G. Univalent Functions — Selected Topics, Springer-Verlag. 1975.