УДК 517.53, 517.54

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ТРЕТЬЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ОГРАНИЧЕННЫХ НЕ ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ ФУНКЦИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Ступин Д. Л.
Тверь

Найдена точная оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций с действительными коэффициентами.

We find the sharp estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on a class of bounded nonvanishing functions with real coefficients.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, sharp Taylor coefficient modulus estimates.

1. Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж высказал гипотезу [1, 2] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi}F(e^{i\varphi}z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Задачу об оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до шестого тейлоровского коэффициента включительно [12]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{2}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \qquad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Класс, состоящий из функций $\omega \in \Omega_0$ с действительными коэффициентами обозначим через Ω_0^r, а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами обозначим через B_t^r. При каждом $t \geqslant 0$ формула (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0^r и B_t^r.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

2. Цель работы и актуальность

Цель данной статьи состоит в том, чтобы найти точную оценку модуля третьего тейлоровского коэффициента на классах B_t^r, $t > 0$. Классы B_t^r — весьма важный частный случай. Действительно, $F(z,t) \in B_t^r$, если $f \in B_t$, то экстремальные функции для функционалов $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ лежат в B_t^r. Как будет показано ниже, экстремальные функции для функционала $|\{f\}_3|$ на B_t лежат вне B_t^r лишь на небольшом интервале изменения параметра t.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [3] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n - 3$ действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс B посредством класса Ω_0, связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

3. Подчинённые функции и начальные коэффициенты

Коснёмся представлений вида (2). Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ. Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [4], однако термин был введён Д. И. Литльвудом [5] и В. Рогозинским [3], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [6, 7, 13, 9, 10]).

В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z,t)$.

Теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчинённых функции $F(z)$. Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [3] и равенство достигается только на вращениях F в плоскости переменной z.

Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n. \tag{3}$$

3. Неравенства на Ω_0

На Ω_0 имеет место точное неравенство [14]

$$\left|\{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}\right| \leqslant \frac{(1-|\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}. \tag{4}$$

Заметим, что из неравенства (4) сразу следует неравенство [14]

$$|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2, \tag{5}$$

а из неравенства (5) сразу следует неравенство Шварца [15], стр. 29

$$|\{\omega\}_1| \leqslant 1. \tag{6}$$

Чтобы убедиться в этом достаточно преобразовать неравенства $r_3 \geqslant 0$ и $r_2 \geqslant 0$, где r_3 и r_2 — правые части неравенств (4) и (5) соответственно.

Подробности см. в [11].

4. Анализ задачи

Согласно формуле (3), если $f \in B_t$, то

$$\{f\}_3 = \{F\}_1\{\omega\}_3 + 2\{F\}_2\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \{F\}_3\{\omega\}_1^3. \tag{7}$$

Области значений $\{\omega\}_1$, $\{\omega\}_2$, и $\{\omega\}_3$, отличаются, что затрудняет решение задачи. Исправим это.

Перепишем неравенства (6), (5) и (4) в виде $|m_1| \leqslant r_1$, $|m_2| \leqslant r_2$ и $|m_3| \leqslant r_3$ соответственно. Введя обозначения $z_k = m_k/r_k$, $k = 1, \ldots, 3$, получим

$$z_1 \coloneqq \{\omega\}_1, \qquad z_2 \coloneqq \frac{\{\omega\}_2}{r_2}, \qquad z_3 \coloneqq \frac{\{\omega\}_3 + r_2 \bar{z}_1 z_2^2}{r_3},$$

откуда

$$\{\omega\}_1 = z_1, \qquad \{\omega\}_2 = r_2 z_2, \qquad \{\omega\}_3 = r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2.$$

Подставив это в (7) получим

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 (r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2) + 2\{F\}_2 r_2 z_1 z_2 + \{F\}_3 z_1^3. \tag{8}$$

Ясно, что $|z_k| \leqslant 1$, $k = 1, 2, 3$.

Так как функционал $|\{f\}_3|$ достигает своего максимума на границе полидиска $\bar{\Delta}^n$ (см. об этом подробнее в [11]) то $|z_1| = 1$ и $\{\omega\}_3 = r_3 e^{\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2$, где $\varphi_3 = \arg z_3$. Поделив равенство (8) на $\{F\}_1$ имеем

$$\frac{\{f\}_3}{\{F\}_1} = r_3 e^{\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2 + 2\alpha r_2 z_1 z_2 + \beta z_1^3, \qquad \alpha \coloneqq \frac{\{F\}_2}{\{F\}_1}, \qquad \beta \coloneqq \frac{\{F\}_3}{\{F\}_1}.$$

Поскольку в этой работе нас интересуют функции, с действительными коэффициентами, то задача об оценке модуля функционала (7) свелась к задаче об исследовании функций

$$h^{\pm}(x_1, x_2) = \pm r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3.$$

на условный экстремум при ограничениях $-1 \leqslant x_k \leqslant 1$, $k = 1, 2$.

Так как $r_2 = 1 - x_1^2$, а $r_3 = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)$, и $h^+(x_1, x_2) = -h^-(-x_1, x_2)$, то окончательно целевой функцией можно считать

$$h(x_1, x_2) = r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3. \tag{9}$$

Если считать, что $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то мы решим задачу в существенно более общей постановке, чем изначальная [8]. Здесь мы ограничимся случаем

$$\alpha = t - 1, \qquad \beta = \frac{2}{3} t^2 - 2t + 1, \qquad t > 0.$$

5. Исследование на экстремум

Если $|z_1| = 1$, то $|z_2| = 1$, причём обратное не верно (см. [11]). Вычисления дают

$$h_1(t) \coloneqq -h(-1, -1) = -h(-1, 1) = h(1, -1) = h(1, 1) = \beta, \qquad t > 0.$$

Исследование проведём методами дифференциального исчисления.

5.1. Исследование на экстремум $h(x_1,-1)$

Вычисления дают

$$(h(x_1,-1))'_{x_1} = 3(2\alpha+\beta+1)x_1^2 - (2\alpha+1),$$

то есть точки

$$x_{1(1,2)} \coloneqq \mp\sqrt{\frac{2\alpha+1}{3(2\alpha+\beta+1)}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2t-1}}{t}$$

являются стационарными и

$$h_{2,3}(t) \coloneqq h(x_{1(1,2)},-1) = \pm\sqrt{\frac{4(2\alpha+1)^3}{27(2\alpha+\beta+1)}} = \pm\frac{\sqrt{2(2t-1)^3}}{3t}.$$

Заметим, что $0 \leqslant x_{1(1,2)}^2 < 1$, при $t \geqslant 1/2$.

5.2. Исследование на экстремум $h(x_1,1)$

Вычисления дают

$$(h(x_1,1))'_{x_1} = -3(2\alpha-\beta-1)x_1^2 + (2\alpha-1),$$

то есть точки

$$x_{1(3,4)} \coloneqq \mp\sqrt{\frac{2\alpha-1}{3(2\alpha-\beta-1)}} = \mp\sqrt{\frac{3-2t}{t^2-12t+12}}$$

являются стационарными и

$$h_{4,5}(t) \coloneqq h(x_{1(3,4)},1) = \mp\sqrt{\frac{4(2\alpha-1)^3}{27(2\alpha-\beta-1)}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{(3-2t)^3}{t^2-6t+6}}.$$

Заметим, что $0 \leqslant x_{1(3,4)}^2 \leqslant 1$, при $t \in [0,(5-\sqrt{7})/2] \cup [3/2,(5+\sqrt{7})/2]$.

5.3. Исследование на экстремум $h(x_1,x_2^*)$

Вычисления дают

$$(h(x_1,x_2))'_{x_2} = 2(1-x_1^2)(\alpha x_1 - (1+x_1)x_2).$$

Случай $x_1 = \pm 1$ разобран в самом начале пункта 5. Таким образом, точка

$$x_2^* \coloneqq \frac{\alpha x_1}{1+x_1}$$

есть точка максимума, так как

$$(h(x_1,x_2))''_{x_2} = -2(1-x_1^2)(1+x_1) < 0, \qquad |x_1| < 1, \quad |x_2| \leqslant 1.$$

Далее

$$h(x_1,x_2^*) = 1 - (\alpha^2-\beta)x_1^3 + (\alpha^2-1)x_1^2.$$

То есть

$$(h(x_1,x_2^*))'_{x_1} = (2(\alpha^2-1) - 3(\alpha^2-\beta)x_1)x_1.$$

Откуда получаем стационарные точки

$$x_{1(5)} \coloneqq 0, \qquad x_{1(6)} \coloneqq \frac{2(\alpha^2-1)}{3(\alpha^2-\beta)} = 2\frac{t-2}{t},$$

причём $h_6(t) \coloneqq h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(5)}} = 1$,

$$h_7(t) \coloneqq h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(6)}} = 1 + \frac{4(\alpha^2-1)^3}{27(\alpha^2-\beta)^2} = 1 + \frac{4}{3}\frac{(t-2)^3}{t}.$$

Заметим, что $-1 \leqslant x_{1(6)} \leqslant 1$, при $4/3 \leqslant t \leqslant 4$, но

$$|x_2^*(x_{1(6)})| = \left|2\frac{(t-1)(t-2)}{3t-4}\right| \leqslant 1$$

при $t \in [3/2,\, t^*]$, где $t^* \coloneqq 9/4 + \sqrt{17}/4 \approx 3.281$. То есть $h_7(t)$ можно рассматривать только при $t \in [3/2,\, t^*]$.

4. Анализ результатов

Обозначим $m(t) \coloneqq \max\limits_{t>0}\{|h_1(t)|, \ldots, |h_7(t)|\}$. Д. В. Прохоров и Я. Шиналь получили точную для каждого $t > 0$ оценку $\{f\}_3$ на классе B_t [8]. Оценку на классе B_t обозначим $m_c(t)$. Графики функций $m_r(t)$ и $m_c(t)$ изображены на рис. 1. Разница

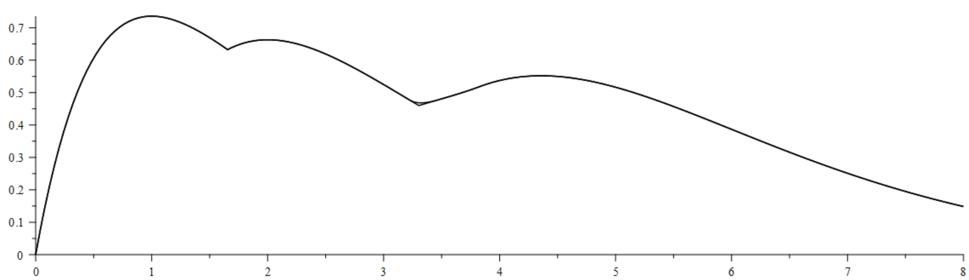

Рис. 1: Графики функций $m_r(t)$ и $m_c(t)$.

между $m_r(t)$ и $m_c(t)$ изображена на рис. 2.

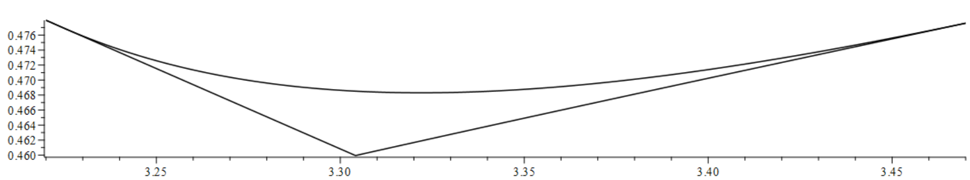

Рис. 2: Графики функций $m_r(t)$ и $m_c(t)$ в увеличенном масштабе.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если $f \in B_t^r$, то имеет место точная при каждом $t \geqslant 0$ оценка*

$$|\{f\}_3| \leqslant 2te^{-t}\begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t_1, t_2], \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\dfrac{(3-2t)^3}{t^2-6t+6}}, & t \in [t_2, t_3], \\ \dfrac{1}{3}(2t^2-6t+3), & t \geqslant t_3, \end{cases} \tag{10}$$

где числа $t_1 \approx 1.655$, $t_2 \approx 3.304$ и $t_3 \approx 3.823$ — наибольшие положительные корни полиномов $16t^3 - 33t^2 + 12t - 2$, $8t^4 - 40t^3 + 50t^2 - 18t + 3$ и $2t^2 - 10t + 9$ соответственно.

Экстремальные функции имеют вид (2) с точностью до вращений в плоскостях переменных z и w ($w = \omega(z)$), где вместо $\omega(z)$ подставлены функции

$$\omega_3(z) := z^3, \quad \omega_{-1}(z) := -z\frac{x_{1(1,2)} - z}{-1 + x_{1(1,2)}z}, \quad \omega_1(z) := z\frac{x_{1(3,4)} + z}{1 + x_{1(3,4)}z}, \quad \omega(z) := z.$$

Отметим, что в общем случае $f \in B_t$ формула (10) должна быть дополнена ещё одним случаем [8]

$$|\{f\}_3| \leqslant 2\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}(2t^2 - 6t + 3)\sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, \qquad t \in [t_2^*, t_3^*],$$

где числа $t_2^* = 2 + \sqrt{6}/2 \approx 3.225$ и $t_3^* \approx 3.476$, — наибольшие положительные корни полиномов $2t^2 - 8t + 5$ и $2t^3 - 12t^2 + 21t - 12$ соответственно. Экстремальная функция имеет вид (2) с точностью до вращений в плоскостях переменных z и w ($w = \omega(z)$), где вместо $\omega(z)$ подставлена функция

$$\omega_{\frac{-b}{2a}}(z) := z\frac{x_{\frac{-b}{2a}} + (x_{\frac{-b}{2a}}e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})z + z^2}{1 + (x_{\frac{-b}{2a}}e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})z + x_{\frac{-b}{2a}}z},$$

где

$$x_{\frac{-b}{2a}} = \sqrt{\frac{3\alpha^2 - 2\beta(\alpha^2+2)}{3(1-\beta)(\alpha^2 - 4\beta)}}, \ \varphi = \pm\arccos\frac{\alpha(2(\alpha^2+2) - (\alpha^2+8)\beta)}{2(3\alpha^2 - 2(\alpha^2+2)\beta)}, \ \beta \neq 1, \ \beta \neq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Экстремальные функции были найдены с помощью произведений Бляшке, подробности см. в [11].

Список литературы

[1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[3] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[4] Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.

[5] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

[6] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[7] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.

[8] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5-6. P. 223–230.

[9] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.

[10] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.

[11] Ступин Д. Л. 2022. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112522

[12] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112619

[13] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[14] Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. // Compl. Var. 1987. V. 9. P. 143–152.

[15] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.