УДК 517.3

В.А. Чуриков
E-mail: vachurikov@list.ru.

d-ОПЕРАТОР ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, ЕГО ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Аннотация. В обзоре рассматривается *d*-оператор дробного интегродифференцирования любых вещественных и комплексных порядков. *d*-оператор носит алгебраический характер и действует на степенные функции или на их линейные суперпозиции. В частном случае, когда порядок интегродифференцирования равен 1, *d*-оператор совпадает с операторами интегродифференцирования степенных функций классического анализа. В этом принципиальное отличие *d*-оператора от других операторов дробного интегродифференцирования. Рассмотрены некоторые обобщения *d*-оператора, в частности, на случай некоторых переменных вещественных порядков.

Ключевые слова. Дробный анализ, дробный анализ нецелочисленных порядков, дробный анализ целочисленных порядков, *d*-оператор, *d*-оператор дискретной переменной, *G*-оператор комплексного порядка, полиномы дифференцирования, полиномы интегрирования.

Keywords. Fractional analysis, fractional analysis non-integral order, fractional analysis integer order, *d*-operator, *d*-operator of discrete variable, *G*-operator of the complex order, polynomials of the differentiation, polynomials of the integration.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. О ТЕНДЕНЦИЯХ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

Одним из важных обобщений классического анализа, является дробный анализ. Под *дробным анализом* или *дробным исчислением* понимают такое направление в анализе, в котором обобщаются операции дифференцирования и интегрирования на случай производных и интегралов любого конечного вещественного или комплексного порядка.

Таким образом, развитие дробного анализа важно в двух аспектах:

1.) математическое обобщение классического анализа на случай производных и интегралов любых конечных вещественных и комплексных порядков.

2.) приложение дробного анализа для создания математических моделей реального мира, где обычный анализ не позволяет формулировать адекватные математические модели.

2. ПРОГРАММА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

2.1. Программа и принципы построения дробного анализа

В основе построения предлагаемого варианта дробного анализа лежит локальный оператор дробного интегродифференцирования, названный *d-оператором*, а дробный анализ на его основе - *d-анализом*. Важным принципом для построения *d-анализа* является *принцип простоты*, в соответствии с которым берётся минимальный набор простых математических объектов.

Для построения *d*-анализа используются степенные функции, а для их преобразований *d*-оператор.

Классический анализ в своей основе локальная теория, поэтому строить его обобщения на случаи комплексных порядков, тоже логично на основе локальных операторов интегродифференцирования.

Важнейшее требование, налагаемое на оператор дробного интегродифференцирования, является *принцип соответствия*, из которого следует, что в частном случае порядка интегродифференцирования равного 1, *d*-анализ должен совпадать с классическим анализом.

Локальный дробный анализ строится по образу и подобию классического, и в определённом смысле, является *метаязыком* для построения дробного анализа. Из классического анализа берутся основные принципы, понятия и соотношения, которые используются для построения дробного анализа. Многие понятия классического анализа, являющиеся объектами для обобщения в дробном анализе. Из классического анализа берутся, элементарные функции, а при формулировке оператора дробного интегродифференцирования используется, прежде всего, натуральный логарифм и гамма-функция Эйлера.

Схема построения локального дробного анализа похожа на схему классического анализа, который, в свою очередь, можно строить по-разному. Построение здесь дробного анализа во многом похоже на то, как строится классический анализ в руководстве Рудина [57].

2.2. Принятые обозначения

Остановимся на логике обозначений операторов дробного дифференцирования и дробного интегрирования. Переход от оператора дифференцирования *d/dx* порядка 1 классического анализа к оператору дифференцирования дробного порядка *s*

$$\frac{d}{dx} \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \xrightarrow{1\to s} \left(\frac{d}{dx}\right)^s \equiv \frac{d^s}{(dx)^s} \equiv \frac{d^s}{dx^s} \equiv (dx)^{-s} \equiv d^{-s}x. \quad (2.1)$$

Здесь $\left(\frac{d}{dx}\right)^s$, $\frac{d^s}{dx^s}$ и $d^{-s}x$ - символические обозначения производной порядка *s* по переменной *x*.

Оператор интегрирования дробного порядка *s* по переменной *x* обозначается как оператор дифференцирования порядка *s*, но со знаком «+» [58]

$$\frac{d^s}{dx^s} \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^s \xrightarrow{s\to -s} \left(\frac{d}{dx}\right)^{-s} \equiv \frac{d^{-s}}{dx^{-s}} \equiv (dx)^{-(-s)} \equiv (dx)^s \equiv d^s x. \quad (2.2)$$

Здесь $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-s}$, $\frac{d^{-s}}{dx^{-s}}$, $(dx)^s$ и $d^s x$ - символические обозначение оператора интегрирования порядка *s*.

Для производных $\frac{d^s}{dx^s} f(x)$ и неопределённых интегралов $\int f(x)dx^s$ порядка *s* функции *f*(*x*) по переменной *x* возможны разные обозначения

$$\frac{d^s}{dx^s} f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^s f(x) \equiv f^{(s)}(x) \equiv (d^{-s} f)(x) \equiv \mathrm{F}^{(-s)}(x) \equiv d^{-s}x : f(x);$$
$$\int f(x)dx^s \equiv d^s x : f(x) \equiv (d^s f)(x) \equiv \mathrm{F}^{(s)}(x) \equiv f^{(-s)}(x); \quad (2.3)$$
$$(d^0 f)(x) \equiv d^0 x : f(x) = \mathbf{1} f(x) = f(x).$$

Здесь s – порядок операции, если порядок вещественный, то $s \geq 0$, а знак перед s определяет характер операции, а именно, $d^{-s}x$ и $d^{s}x$ – операторы, соответственно, дробного дифференцирования порядка s и дробного интегрирования порядка s; $f^{(s)}(x)$ и $\mathrm{F}^{(s)}(x)$ соответственно производная и первообразная порядков s; оператор нулевого порядка $d^{0}x$ является единичным оператором. Двоеточие «:» разделитель между операторами и операндами. Во многих случаях двоеточие «:» может опускаться.

Из этих обозначений следует:

$$f^{(s)}(x) = \mathrm{F}^{(-s)}(x); \qquad f^{(-s)}(x) = \mathrm{F}^{(s)}(x). \tag{2.4}$$

2.3. Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной

В работах [58, 60] был введён *d*-оператор – локальный оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования, который действует в пространстве степенных функций и определён для всех конечных вещественных порядков, что было рассмотрено более подробно [61, 62].

Для *d*-оператора выполняется *принцип соответствия*, а именно, в частном случае, для порядка интегродифференцирования равного 1, *d*-оператор переходит в операторы дифференцирования и интегрирования степенных функций классического анализа [63] и абсолютно с ними совпадает.

В [64] был введён *d*-оператор для дискретной переменной, где порядки интегродифференцирования и показатели степенных функций - комплексные.

В работах [58 – 64, 15] *d*-оператор претерпел эволюцию, что привело к версии *d*-оператора, которая формулируется и рассматривается здесь.

Для *d*-оператора выполняется принцип простоты, в соответствии с которым локальный дробный анализ строится на основе наиболее простых обобщений операторов интегродифференцирования степенных функций классического анализа. Действует *d*-оператор в пространстве степенных функций, которые являются одними из самых простых элементарных функций. При этом, очень важно, что степенные функции являются универсальными в том смысле, что они являются степенными для любых порядков интегородифференцирования. Другие элементарные функции такой универсальностью не обладают, например экспоненты одного порядка уже не являются экспонентами для других порядков интегродифференцирования.

Более того, через различные суперпозиции степенных функций выражается многие элементарных и специальных функций.

В дальнейшем, для определения *d*-оператора, кроме степенных функций, необходимо ввести полиномы интегродифференцирования $C_{\mp s}(x)$, являющиеся обобщением констант интегрирования классического анализа и логарифмы $\ln_s(x)$ дробного порядка s, обобщающие логарифмы классического анализа.

Определение 1. *d-оператором комплексного порядка* $s=\chi+i\gamma$, $\chi,\gamma\in\mathbb{R}$; $\chi,\gamma=\mathrm{const}$; $\chi,\gamma\geq 0$, дробного дифференцирования и дробного интегрирования вещественной переменной x, действующим в пространстве степенных функций x^q с комплексными показателями $q=\mu+i\nu$; $\mu,\nu\in\mathbb{R}$; $\mu,\nu=\mathrm{const}$, называется отображение определяемое равенствами

$$\begin{cases} (d^{-s}x^q)(x)\equiv d^{-s}x:x^q\equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^q=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}x^{q-s}+C_{-s}(x); \\ \qquad \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q-s\neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ (d^{s}x^q)(x)\equiv d^{s}x:x^q\equiv \displaystyle\int x^q d^s x=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}x^{q+s}+C_{s}(x); \\ \qquad \begin{cases}\neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q+s\neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ s\neq -q;\end{cases} \\ (d^{-s}x^{-m})(x)\equiv d^{-s}x:x^{-m}\equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^{-m}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)}x^{-m-s}+C_{-s}(x); \\ \qquad m\in\mathbb{N};\,-s-m\neq -1,-2,-3,\ldots; \\ (d^{s}x^{-m})(x)\equiv d^{s}x:x^{-m}\equiv \displaystyle\int x^{-m} d^s x=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)}x^{-m+s}+C_{s}(x); \\ \qquad \begin{cases} m\in\mathbb{N};\, s-m\neq -1,-2,-3,\ldots; \\ s\neq m;\end{cases} \\ (d^{s}x^{-s})(x)\equiv d^{s}x:x^{-s}\equiv \displaystyle\int x^{-s} d^s x=\ln_s(x)+C_s(x); \qquad \ln_1(x)=\ln(x),\ s\neq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Знаки, стоящие перед порядками интегродифференцирования s определяют тип операции. Если знак плюс, то это соответствует операции интегрирования, а если знак минус – операции дифференцирования.

Если порядок $s=\chi=\gamma=0$, в первом, и/или втором равенствах, то это соответствует *единичному оператору* **1**, который функциям ставит в соответствие самих себя, что можно записать как

$$d^0x:f(x)=\mathbf{1}:f(x)=f(x).$$

Когда порядок интегродифференцирования вещественный, $s=\mathrm{Re}(s)=\chi>0$, то если в равенствах (2.5) перед показателем порядка оператора s, стоит знак минус, то это будет соответствовать *оператору дробного дифференцирования вещественного порядка* χ, а если значение порядка оператора со знаком плюс, то это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования вещественного порядка* χ.

Когда порядок интегродифференцирования мнимый, $s=i\,\mathrm{Im}(s)=i\gamma$ и $\gamma>0$, а в равенствах (2.5) перед показателем порядка оператора s, стоит знак минус, то это соответствует *оператору дробного дифференцирования мнимого порядка* γ, а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования мнимого порядка* γ.

Если порядок интегродифференцирования комплексный, $s=\chi+i\gamma$ и $\chi,\gamma>0$, а знак у порядка отрицательный, то это будет *дробное дифференцирование комплексного порядка*, а если знак положительный, то *дробное интегрирование комплексного порядка*.

Если знаки у вещественной и мнимой части порядка интегродифференцирования различаются, т. е. $s=-\chi+i\gamma$ или $s=\chi-i\gamma$, то такие порядки формально будем называть *смешанными комплексными порядками дифференцирования* и *смешанными комплексными порядками интегрирования*, соответственно. В этом случае нельзя говорить однозначно только о дифференцировании или только об интегрировании.

Величины $\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q\mp s+1)}$ в первом и втором равенствах (2.5) называются *коэффициентами d-оператора*, в частности, *коэффициентом дифференцирования* для знака минус перед порядком s и *коэффициентом интегрирования* для знака плюс перед s. В этих коэффициентах в числителе у гамма-функции $\Gamma(q+1)$ исключены значения, попадающие в полюса, которые являются важными частными случаями, но не исключены полюсы у гамма-функций в знаменателях коэффициентов.

Область допустимых значений гамма-функций в коэффициентах *d*-оператора принадлежат расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$, где ∞ - *бесконечно удалённая (несобственная) точка* [66].

Если гамма-функции в числителе попадают в полюса, что случается для целых отрицательных показателей степенных функций, на которых действует оператор, т. е. $q=-m$. Тогда гамма-функция в полюсах заменяются вычетами соответствующими этим полюсам по формуле

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-m}\Gamma(\alpha)=\frac{(-1)^m}{m!};\ m=0,1,2,3,4,\ldots$$

[65] и [60 - 64, 15], которой в *d*-операторе будет соответствовать равенство

$$\operatorname*{Res}_{q+1=1-m}\Gamma(q+1)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!};m=1,2,3,4,\ldots$$

В результате при дифференцирования и интегрирования при такой замене будут соответственно четвёртое и пятое равенства с коэффициентами $\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(\mp s-m+1)}$.

Теперь рассмотрим отдельно все равенства в операторе (2.5).

Первое равенство определяет дробное дифференцирование порядка s. Дополнительные условия исключают случаи дифференцирования, когда гамма-функция в числителе обращается в бесконечность, при попадании аргумента в полюса гамма-функции, когда одновременно гамма-функция в знаменателе не равна бесконечности. Полюсы у гамма-функции имеются для отрицательных целочисленных порядков $q = \mathrm{Re}(q) = \chi = -1, -2, -3, \ldots$ Эти условия представлены в виде логического отрицания двух возможных ситуаций, которые не должны выполняться одновременно для гамма-функций в числителе и в знаменателе т. е. $\neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q - s \neq -1, -2, -3, \ldots)]$.

Второе равенство определяет дробное интегрирование порядка s. Первые дополнительные условия исключают случаи интегрирования, когда гамма-функция в числителе обращается в бесконечность, при попадании аргумента в полюса гамма-функции, когда одновременно в знаменателе гамма-функция не равна бесконечности. Эти условия тоже представлены в виде логического отрицания двух возможных ситуаций, которые не должны выполняться одновременно для гамма-функций в числителе и в знаменателе, т. е. $\neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q + s \neq -1, -2, -3, \ldots)]$. Второе дополнительное условия исключают интегрирование в логарифмических случаях.

Третье равенство определяют дифференцирование в случаях, которые исключены в первом равенстве. Дополнительное условие исключает случаи, когда значения гамма-функции в знаменателе не попадают в полюс. Эти случаи дифференцирования находятся с помощью первого равенства оператора, где гамма-функции в числителе и в знаменателе одновременно обращаются в бесконечность. В этом случае бесконечности в коэффициенте сокращаются.

Четвёртое равенство определяют интегрирование в случаях, исключаемых во втором равенстве. Первое дополнительное условие исключает случаи, когда значения гамма-функции в знаменателе не должно попадать в полюс. Эти случаи интегрирования находятся с помощью второго равенства оператора, где гамма-функции в числителе и в знаменателе одновременно обращаются в бесконечность, а бесконечности в коэффициенте сокращаются. Второе дополнительное условие исключает интегрирования в логарифмических случаях.

Пятое равенство определяет интегрирование в логарифмических случаях, когда порядок интегрирования s равен показателю степенных функций с отрицательным знаком -s. Логарифмические случаи возникают, когда для отрицательных показателей степенных функций $-q < 0$, выполняется *условие логарифмичности*, т. е. $s - q = 0$, которое разделяет *область «параболичности»* $s - q > 0$ и *область «гиперболичности»* $s - q < 0$ для показателей степенных функций, которые могут получаться после дробного интегрирования порядка s.

Функции $\ln_s(x)$ являются *логарифмами комплексного порядка s*.

Логарифм $\ln_s(x)$ порядка s являются обратной функцией для функции $\exp_s(x)$, которая названа *главной экспонентой порядка s* [66, 68] и [60 - 62]

$$\ln_s(\exp_s(x)) = \exp_s(\ln_s(x)) = x. \qquad (2.6)$$

Наличие логарифмических функций, не являющихся степенными, говорит, что для *d*-оператора пространство степенных функций не замкнуто.

Функции $C_s(x)$ в (2.5) являются *полиномами интегрирования* порядка *s*. Полиномы интегрирования являются обобщениями констант интегрирования классического анализа [60 - 62, 69]; $C_{-s}(x)$ – *полиномы дифференцирования* порядка *s*, которые для комплексных порядков вещественной переменной рассматривались в [64, 70, 71, 15]. Полиномы дифференцирования комплексных порядков являются аналогами полиномов интегрирования комплексных порядков для дифференцирования комплексных порядков.

Полиномы интегрирования $C_s(x)$ и полиномы дифференцирования $C_{-s}(x)$ для удобства объединены в *полиномы интегродифференцирования*, которые обозначены как $C_{\pm s}(x)$, которые для комплексных порядков определяются в [15], а здесь даются для непрерывной вещественной переменной.

Определение 2. *Полиномами интегродифференцирования комплексного порядка s* вещественной переменной *x*, будем называть функцию $C_{\pm s}(x)$ задаваемую равенствами для разных значений порядков *s*

$$C_{\pm s}(x)=\begin{cases} C_\alpha(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha}; \\ \quad s=\alpha; a_k\in\mathbb{C}; \alpha, a_k=\mathrm{const}; |a_k|<\infty; \alpha\neq 1,2,3,4,...; \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\mathrm{const}; \chi,\gamma\geq 0; \infty>|\alpha|>0; (\alpha=\chi+i\gamma)\vee(\alpha=\chi-i\gamma); \\ C_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k x^k; \quad s=m; m\in\mathbb{N}; b_k\in\mathbb{C}; b_k=\mathrm{const}; |b_k|<\infty; \\ C_0(x)=0; \quad s=0; \\ C_{-\alpha}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k x^{-k-\alpha}; \\ \quad -s=-\alpha; h_k\in\mathbb{C}; \alpha, h_k=\mathrm{const}; \ |h_k|<\infty; \alpha\neq 1,2,3,4,...; \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\mathrm{const}; \chi,\gamma\geq 0; \infty>|\alpha|>0; (\alpha=\chi+i\gamma)\vee(\alpha=\chi-i\gamma); \\ C_{-m}(x)=0; \quad -s=-m; m\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Полиномом интегродифференцирования порядка *s* соответствует полиномам интегрирования для нецелочисленных комплексных порядков +*s*=+*α* и для целочисленных вещественных порядков +*s*=+*m* с положительным знаком (первые два равенства (2.7)).

В случае порядка равного нулю *s*=0, полиномы дифференцирования и полиномы интегрирования совпадают и равны нулю (третье равенство). Для данного тривиального случая справедливо равенство: $C_0(x)=C_{-0}(x)=0$.

Полиномам дифференцирования соответствуют нецелочисленные комплексные порядки -*s*= -*α* и целочисленные вещественные порядки *s*= -*m* с отрицательным знаком (четвёртое и пятое равенства). В случае целочисленных порядков с отрицательным знаком $-s = -m$, включая порядок 1 (классический анализ), полиномы дифференцирования отсутствуют, поэтому они в этих случаях формально были приравнены к нулю.

Для полиномов интегродифференцирования можно ввести обозначения, в котором полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования входят в другом порядке $C_{\mp s}(x)=0$.

Коэффициенты a_k и b_k в полиномах интегродифференцирования являются произвольными комплексными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными комплексными *константами дифференцирования*. Произвольность констант a_k, b_k и h_k приводят к произвольности полиномов $C_{\mp s}(x)=0$.

В ряде случаев, например при решении дифференциальных уравнений, при задании начальных и краевых условий, константы a_k, или b_k, или h_k могут оказаться взаимосвязанными между собой.

Ряды полиномов интегрирования $C_{+\alpha}(x)$ и полиномов дифференцирования $C_{-\alpha}(x)$ нецелочисленных порядков, в зависимости от значений констант a_k и h_k, могут быть как сходящимися, так и расходящимися.

Полиномы интегродифференцирования можно отнести к элементарным функциям d-анализа, которые в частном случае классического анализа переходят в константы интегрирования и в ноль при дифференцировании.

d-оператор является линейным, т. е. для него справедливо равенство

$$d^{\pm s}x:(\mu f(x)+\nu g(x))=\mu d^{\pm s}x:f(x)+\nu d^{\pm s}x:g(x);\quad s,\mu,\nu\in\mathbb{C};\ s,\mu,\nu=\text{const} \tag{2.8}$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ некоторые интегродифференцируемые d-оператором функции, если перед s стоит знак плюс и интегрируемые d-оператором функции, если перед s стоит знак минус.

Также будет справедливо равенство

$$(d^{\pm s}x+d^{\pm w}x)\mu f(x)=\mu d^{\pm s}x:f(x)+\mu d^{\pm w}x:f(x);\quad s,w,\mu\in\mathbb{C};\ s,w,\mu=\text{const} \tag{2.9}$$

Для полиномов $C_{\pm s}(x)$ справедлива теорема, обобщающая утверждение о равенстве нулю производной константы классического анализа.

Теорема 1. Если $C_{\pm s}(x)$ и $\tilde{C}_{\mp s}(x)$ произвольные полиномы интегродифференцирования порядка s, то при их дробном интегродифференцировании порядка s, будут выполняться уравнения [15]

$$d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=\tilde{C}_{\pm s}(x). \tag{2.10}$$

Доказательство. Покажем выполнение первого и четвёртого равенств

$$d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=d^{s}x:\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^{-k\mp s}=C_{\mp s}^{(\mp s)}(x)+\tilde{C}_{\pm s}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\Gamma(-k\mp s+1)}{\Gamma(-k\mp s\pm s+1)}x^{-k\mp s\pm s}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\Gamma(-k\mp s+1)}{\Gamma(-k+1)}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\Gamma(-k\mp s+1)}{\infty}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=0+\tilde{C}_{\pm s}(x)=\tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Здесь введено обозначение $C_{\mp s}^{(\mp s)}(x)$, где в верху положительных знак соответствует первообразной порядка s, а отрицательный - производной порядка s функции $f(x)$, что соответствует обозначениям $F^{(\mp s)}(x)\equiv f^{(\pm s)}(x)$.

Для второго равенства

$$d^{-m}x:C_m(x)=d^{-m}x:\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)}x^{k-m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\infty}x^{k-m}=0.$$

Для третьего равенства будет

$$d^0x:C_0(x)=d^0x:0=0.$$

Для пятого равенства эти уравнения дают

$$d^m x:C_{-m}(x)=d^m x:0=C_m(x)\ \blacksquare$$

Очевидно, что если порядки интегродифференцирования s и порядки полиномов интегродифференцирования v в общем случае не совпадают, то будет справедлива более общая формула

$$d^{\pm s}x:C_{\mp v}(x)=C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)+\tilde{C}_{\pm s}(x).\qquad(2.11)$$

Здесь $C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)\neq 0$, если $s\neq v$ или $C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)=0$, если $s=v$.

Если в силу произвольности полиномов интегродифференцирования принять равными нулю $\tilde{C}_{\pm s}(x)=0$, тогда уравнения (2.11) будут

$$d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=0.\qquad(2.12)$$

Приравняв к нулю полиномы интегродифференцирования $C_{\pm s}(x)=0$, то уравнения (2.11) примут вид

$$d^{\pm s}x:0=\tilde{C}_{\pm s}(x).\qquad(2.13)$$

Данное равенство обобщает интеграл от нуля в классическом анализе:

$$\int 0\,dx = \text{const}.$$

Полиномы интегродифференцирования делают операции интегрирования и дифференцирования неоднозначными в d-анализе для всех порядков за исключением интегродифференцирования нулевого порядка и дифференцирования целочисленных порядков, включая порядок 1 классического анализа.

В локальном дробном анализе на основе d-оператора производная комплексного порядка s от функции $f(x)$ определяется равенством

$$d^{-s}x : f(x) = f^{(s)}(x) + C_{-s}(x) = F^{(-s)}(x) + C_{-s}(x). \tag{2.14}$$

Здесь функцию $f^{(s)}(x) \equiv F^{(-s)}(x)$ будем называть *базовой производной прядка s* функции $f(x)$.

Определение 3. *Базовая производная*, это такая производная, у которой полином дифференцирования равен нулю.

Определение 4. *Неопределённой производной порядка s* функции $f(x)$ будем называть множество всех производных порядка s функции $f(x)$.

Первообразной комплексного порядка s функции $f(x)$ в локальном дробном анализе на основе d-оператора будем называть сумму

$$d^{s}x : f(x) = F^{(s)}(x) + C_{s}(x) = f^{(-s)}(x) + C_{s}(x). \tag{2.15}$$

Здесь функция $F^{(s)}(x) \equiv f^{(-s)}(x)$ является *базовой первообразной* прядка s функции $f(x)$.

Определение 5. *Базовая первообразная прядка s* функции $f(x)$, это такая первообразная, у которой полином интегрирования равен нулю.

Определение 6. *Неопределённым интегралом порядка s* функции $f(x)$ будем называть множество всех первообразных порядка s функции $f(x)$.

Объединённую формулу дробного интегродифференцирования комплексного прядка s функции $f(x)$

$$d^{\pm s}x : f(x) = f^{(\mp s)}(x) + C_{\pm s}(x) = F^{(\pm s)}(x) + C_{\pm s}(x). \tag{2.16}$$

Наличие полиномов интегродифференцирования, в частности, приводит к ряду алгебраических особенностей d-оператора.

Теорема 2. d-оператор не является коммутативным относительно операции умножения *(композиции)* операторов.

Доказательство. Рассмотрим воздействие операторов $d^{\pm\nu}x$ и $d^{\pm s}x$ на функцию $f(x)$ в разных порядках

$$d^{\pm\nu}x : d^{\pm s}x : f(x) = d^{\pm\nu}x : (f^{(\pm s)}(x) + C_{\pm s}(x)) = f^{(\pm(\nu+s))}(x) + C_{\pm s}^{(\mp\nu)}(x) + C_{\pm\nu}(x).$$

Если подействовать на $f(x)$ операторами в обратном порядке, получим

$$d^{\pm s}x:d^{\pm \nu}x:f(x)=d^{\pm s}x:(f^{(\pm \nu)}(x)+C_{\pm \nu}(x))=f^{(\pm(\nu+s))}(x)+C^{(\mp s)}_{\pm \nu}(x)+C_{\pm s}(x).$$

Результаты отличаются, что доказывает теорему ■

Теорема 3. В общем случае для d-оператора при его воздействии на функцию $f(x)$ *композиция* $d^{\pm \nu}x:d^{\pm s}x:f(x)\to d^{\pm(\nu+s)}x:f(x)$ и *декомпозиция* $d^{\pm(\nu+s)}x:f(x)\to d^{\pm \nu}x:d^{\pm s}x:f(x)$ приводит к разным результатам.

Доказательство. Покажем это на примере интегродифференцирования полиномов $C_{\mp s}(x)$

$$d^{\pm \nu}x:d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=d^{\pm \nu}x:(\tilde{C}_{\mp s}(x))=\tilde{C}^{(\mp \nu)}_{\mp s}(x)+C_{\pm \nu}(x).$$

Если подействовать оператором порядка $\pm(\nu+s)$, то получим

$$d^{\pm(\nu+s)}x:C_{\pm s}(x)=\tilde{C}^{(\mp(\nu+s))}_{\mp s}(x)+C_{\pm(\nu+s)}(x).$$

Результаты интегродифференцирования в обоих случаях не равны, т. е.

$$\tilde{C}^{(\mp \nu)}_{\mp s}(x)+C_{\mp \nu}(x)\neq \tilde{C}^{(\mp(\nu+s))}_{\mp s}(x)+C_{\mp(\nu+s)}(x),$$

что доказывает теорему ■

Рассмотренный d-оператор является минимальным обобщением операторов интегродифференцирования степенных функций классического анализа, т. е. выполняется принцип соответствия. Это предполагает, что при его применении для описания различных процессов в пространствах нецелочисленных порядков, получаемые решения в частном случае для порядков интегродифференцирования равного 1, должны совпадать с решениями, получаемыми в классическом анализе.

С другой стороны, принцип простоты должен приводить к тому, что в рамках d-анализа не должны возникать математические следствия, которые противоречат классическому анализу. В частности, это значит, что при использовании d-оператора для описания реальных процессов, не должны появляться «не физические» решения, коэффициенты, слагаемые и т. д.

Введённый d-оператор положен в основу дробного анализа, который был назван *d-анализом*.

2.4. Связь d-оператора с оператором Адамара

Рассматриваемый d-оператор можно считать существенно усовершенствованным локальным оператором дробного дифференцирования Адамара (1.3) [2, 14], который соответствует *первому* равенству в (2.5) для вещественных порядков, но без учёта дополнительных условий для данного равенства.

В операторе Адамара нет возможность интегродифференцировать функции, когда в числителе коэффициента оператора гамма-функция имеет полюс или когда не учтены логарифмические случаи. Это не позволяет построить полноценный дробный анализ удовлетворяющий принципу соответствия на базе оператора Адамара.

2.5. Важные частные случаи *d*-оператора

Рассмотрим наиболее важные частные случаи *d*-оператора (2.5): *d-оператор вещественных порядков*, *d-оператор дискретной переменной*, *d-оператор мнимых порядков*.

d-оператор вещественных порядков, в свою очередь, распадается на *d-оператор вещественных нецелочисленных порядков* и *d-оператор целочисленных порядков*. Каждый из этих операторов лежит в основе двух важных направлений дробного анализа вещественных порядков, а именно, *d-анализа нецелочисленных порядков* и *d-анализа целочисленных порядков*. Эти направления существенно отличаются друг от друга и требуют отдельного рассмотрения.

2.5.1. *d*-оператор вещественных порядков. Важным частным случаем *d*-оператора комплексных порядков является оператор вещественных порядков интегродифференцирования. Этот случай рассмотрен подробно в [58 – 62]. Получается *d*-оператор вещественных порядков из *d*-оператора комплексных порядков, когда порядки интегродифференцирования и порядки степенных функций вещественные, т. е. $s=\chi=\mathrm{const}>0$, $\mathrm{Im}(s)=\gamma=0$, $q=\mu=\mathrm{const}$, $\mathrm{Im}(q)=\nu=0$.

Определение 7. *d-оператором вещественного порядка s*, $s\in\mathbb{R}$; $s=\mathrm{const}$; $s\geq 0$, дробного дифференцирования и дробного интегрирования вещественной переменной *x*, действующим в пространстве степенных функций x^q, вещественной переменной *x* с вещественными показателями $q\in\mathbb{R}; q=\mathrm{const}$, называется отображение определяемое равенствами

$$
\begin{cases}
d^{-s}x : x^q \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}x^{q-s} + C_{-s}(x); \\
\qquad \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q-s\neq-1,-2,-3,\ldots)]; \\
d^{s}x : x^q \equiv \int x^q d^s x = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}x^{q+s} + C_{s}(x); \\
\qquad \begin{cases} \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q+s\neq-1,-2,-3,\ldots)]; \\ s\neq -q; \end{cases} \\
d^{-s}x : x^{-m} \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)}x^{-m-s} + C_{-s}(x); \\
\qquad m\in\mathbb{N}; -s-m\neq-1,-2,-3,\ldots; \\
d^{s}x : x^{-m} \equiv \int x^{-m} d^s x = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)}x^{-m+s} + C_{s}(x); \\
\qquad \begin{cases} m\in\mathbb{N}; s-m\neq-1,-2,-3,\ldots; \\ s\neq m; \end{cases} \\
d^{s}x : x^{-s} \equiv \int x^{-s} d^s x = \ln_s(x) + C_s(x); \quad s\neq 0.
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

В данной версии d-оператора, в отличие от предыдущих версий вещественных d-операторов [58 – 62], учтены полиномы дифференцирования.

Легко увидеть, что d-оператор комплексных порядков (2.17) формально совпадает с d-оператором вещественных порядков (2.17).

Определение 8. *Полиномами интегродифференцирования вещественного порядка s* вещественной переменной x, будем называть функцию $C_{\pm s}(x)$ задаваемую равенствами

$$
C_{\pm s}(x) = \begin{cases}
C_{\alpha}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha}; \\
\quad s=\alpha; \alpha, a_k \in\mathbb{R}; \infty>\alpha>0; \alpha, a_k = \mathrm{const}<\infty; \alpha\neq 1,2,3,4\ldots; \\
C_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k x^k; \quad s=m; b_k=\mathrm{const}<\infty; m\in\mathbb{N}; \\
C_0(x)=0; \quad s=0; \\
C_{-\alpha}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k x^{-k-\alpha}; \\
\quad -s=-\alpha; h_k\in\mathbb{R}; \infty>\alpha>0; \alpha, h_k=\mathrm{const}<\infty; \alpha\neq 1,2,3,\ldots; \\
C_{-m}(x)=0; \quad -s=-m; m\in\mathbb{N}.
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

Здесь коэффициенты a_k и b_k являются произвольными вещественными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными вещественными *константами дифференцирования*.

Произвольность констант a_k, b_k и h_k влечёт произвольность полиномов интегродифференцирования.

Для полиномов интегродифференцирования справедливы соотношения

$$d^{\mp s}x : C_{\pm s}(x) = \tilde{C}_{\mp s}(x). \tag{2.19}$$

2.5.2. *d*-оператор дискретной переменной. Другим важным частным случаем, является оператор комплексных порядков дискретной переменной $f(n)$, который был введён в [64], где полиномы дифференцирования не были учтены и был представлен только один логарифмический случай.

Определение 7. *Дискретным d-оператором комплексного порядка* $s = \chi + i\gamma,\ \chi, \gamma \in \mathbb{R};\ \chi, \gamma = \text{const};\ \chi, \gamma \geq 0$, дробного дифференцирования и дробного интегрирования дискретной вещественной переменной n, действующим в пространстве степенных функций n^q, дискретной вещественной переменной $n \in \mathbb{Z}$ с комплексными показателями $q = \mu + i\nu;\ \mu, \nu \in \mathbb{R};\ \mu, \nu = \text{const}$, называется отображение определяемое равенствами

$$\begin{cases} d^{-s}n : n^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} n^{q-s} + C_{-s}(n); \\ \qquad \neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q - s \neq -1, -2, -3, \ldots)]; \\ d^{s}n : n^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} n^{q+s} + C_{s}(n); \\ \qquad \begin{cases} \neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q + s \neq -1, -2, -3, \ldots)]; \\ s \neq -q; \end{cases} \\ d^{-s}n : n^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)} n^{-m-s} + C_{-s}(n); \\ \qquad m \in \mathbb{N};\ s \neq 0, 1, 2, 3, \ldots; \\ d^{s}n : n^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)} n^{-m+s} + C_{s}(n); \\ \qquad \begin{cases} m \in \mathbb{N};\ s - m \neq 0, 1, 2, 3, \ldots; \\ s \neq m; \end{cases} \\ d^{s}n : n^{-s} = \ln_s(n) + C_s(n); \quad s \neq 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Полиномы интегродифференцирования дискретного d-оператора являются частным случаем полинома комплексного порядка $C_{\mp s}(x)$.

Определение 8. *Полиномами интегродифференцирования комплексного порядка ψ дискретной переменной* n будем называть функцию $C_{\pm s}(n)$ задаваемую равенствами для разных значений порядков s

$$C_{\pm s}(n)=\begin{cases} C_{\alpha}(n)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k+\alpha};\, s=\alpha;\, a_k\in\mathbb{C};\, \alpha,a_k=\text{const};|\,a_k\,|<\infty; \\ \quad \alpha=\chi\pm i\gamma;\, \alpha\neq 1,2,3,\ldots;\, \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\text{const};\, \chi,\gamma\geq 0;\, \infty>|\,\alpha\,|>0; \\ C_m(n)=\sum_{k=0}^{m-1} b_k n^k;\quad s=m;\, m\in\mathbb{N};\, b_k\in\mathbb{C};\, b_k=\text{const};|\,b_k\,|<\infty; \\ C_0(n)=0;\quad s=0; \\ C_{-\alpha}(n)=\sum_{k=1}^{\infty} h_k n^{-k-\alpha};-s=-\alpha;\, h_k\in\mathbb{C};\, \alpha,h_k=\text{const};|\,h_k\,|<\infty; \\ \quad \alpha=\chi\pm i\gamma;\, \alpha\neq 1,2,3,\ldots;\, \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\text{const};\, \chi,\gamma\geq 0;\, \infty>|\,\alpha\,|>0; \\ C_{-m}(n)=0;\quad -s=-m;\, m\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Здесь коэффициенты a_k и b_k в полиномах интегродифференцирования являются произвольными комплексными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными комплексными *константами дифференцирования*.

2.5.3. *d*-оператор мнимых порядков. Одним из частных случаев *d*-оператора, является оператор с мнимыми порядками.

Определение 9. *d-оператором мнимого порядка* $s=i\gamma$; $\gamma\in\mathbb{R};\, \gamma=\text{const};\, \gamma\geq 0$, дробного дифференцирования и дробного интегрирования вещественной переменной x, действующим в пространстве степенных функций x^q, вещественной переменной x с комплексными показателями $q=\mu+i\nu;\ \ \mu,\nu\in\mathbb{R};\, \mu,\nu=\text{const}$, называется отображение определяемое равенствами

$$
\begin{cases}
d^{-i\gamma}x : x^{q} = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-i\gamma+1)}x^{q-i\gamma} + C_{-i\gamma}(x); \\
\qquad \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q-i\gamma\neq-1,-2,-3,\ldots)]; \\
d^{i\gamma}x : x^{q} = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+i\gamma+1)}x^{q+i\gamma} + C_{i\gamma}(x); \\
\qquad \begin{cases} \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q+i\gamma\neq-1,-2,-3,\ldots)]; \\ i\gamma\neq-q; \end{cases} \\
d^{-i\gamma}x : x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-i\gamma-m+1)}x^{-m-i\gamma} + C_{-i\gamma}(x); \\
\qquad m\in\mathbb{N}; -i\gamma-m\neq-1,-2,-3,\ldots; \\
d^{i\gamma}x : x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(i\gamma-m+1)}x^{-m+s} + C_{i\gamma}(x); \\
\qquad m\in\mathbb{N}; i\gamma-m\neq-1,-2,-3,\ldots; \\
d^{i\gamma}x : x^{-s} = \ln_{i\gamma}(x) + C_{i\gamma}(x); \quad \gamma\neq0.
\end{cases} \tag{2.22}
$$

Производная и первообразная дробных мнимых порядков в полюсах возможна только в случаях, когда показатель степени степенной функции будет иметь целочисленное отрицательное значение.

Полиномы интегродифференцирования мнимых порядков являются частный случай полиномов интегродифференцирования комплексных порядков как.

Определение 10. *Полиномами интегродифференцирования мнимого порядка* $i\gamma$ вещественной переменной x, будем называть функцию $C_{\pm i\gamma}(x)$ задаваемую равенствами

$$
C_{\pm i\gamma}(x) = \begin{cases}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+i\gamma}; \quad \gamma\in\mathbb{R}; \gamma>0; a_k\in\mathbb{C}; \gamma, a_k = \text{const} < \infty; \\
0; \quad \gamma = 0; \\
\sum_{k=1}^{\infty} h_k x^{-k-i\gamma}; \quad \gamma\in\mathbb{R}; \gamma>0; h_k\in\mathbb{C}; \gamma, h_k = \text{const} < \infty.
\end{cases} \tag{2.23}
$$

Здесь коэффициенты a_k в полиномах интегродифференцирования произвольные комплексные *константы интегрирования*, а h_k - произвольные комплексные *константы дифференцирования*.

Здесь отсутствуют равенства соответствующие второму и пятому равенствам из (2.5), ввиду того, что они сформулированы только для целочисленных вещественных порядков.

Полиномами интегродифференцирования мнимого порядка можно представить как $C_{\pm i\gamma}(x)$, где знак плюс соответствует полиномам интегрирования, минус – полиномам дифференцирования, а γ=0 единичному оператору.

Для полиномов интегродифференцирования $C_{\pm i\gamma}(x)$ справедливы правила дробного интегродифференцирования мнимого порядка

$$d^{\mp i\gamma}x : C_{\pm i\gamma}(x) = \tilde{C}_{\mp i\gamma}(x). \tag{2.24}$$

2.5.4. *d*-оператор нецелочисленных вещественных порядков. Если в *d*-операторе (2.5) порядки дробного интегродифференцирования не будут целочисленными, включая нулевой порядок, т. е. $s \neq 0, 1, 2, \ldots$, а в остальном совпадает с общим *d*-оператором, то это будет соответствовать *d-оператору нецелочисленных вещественных порядков*

$$\begin{cases} d^{-s}x : x^q \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}x^{q-s} + C_{-s}(x); \\ \qquad \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots) \wedge (q-s \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ d^{s}x : x^q \equiv \displaystyle\int x^q d^s x = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}x^{q+s} + C_{s}(x); \\ \qquad \begin{cases} \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots) \wedge (q+s \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ s \neq -q; \end{cases} \\ d^{-s}x : x^{-m} \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)}x^{-m-s} + C_{-s}(x); \\ \qquad m \in \mathbb{N}; -s-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\ d^{s}x : x^{-m} \equiv \displaystyle\int x^{-m} d^s x = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)}x^{-m+s} + C_{s}(x); \\ \qquad \begin{cases} m \in \mathbb{N};\ s-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\ s \neq m; \end{cases} \\ d^{s}x : x^{-s} \equiv \displaystyle\int x^{-s} d^s x = \ln_s(x) + C_s(x); \quad s \neq 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Полиномами интегродифференцирования $C_{\pm s}(x)$ нецелочисленных порядков s будут задаваться двумя равенствами для нецелочисленных порядков и для нулевого порядка, а целочисленные порядки здесь опущены

$$C_{\pm s}(n)=\begin{cases} C_{\alpha}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{-k+\alpha};\, s\neq 0,1,2,\ldots;\, s=\alpha; \\ \quad a_k\in\mathbb{C};\, \alpha, a_k=\mathrm{const};\, |a_k|<\infty;\, \alpha\neq 1,2,3,4,\ldots;\, \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\mathrm{const};\, \chi,\gamma\geq 0; \infty>|\alpha|>0; (\alpha=\chi+i\gamma)\vee(\alpha=\chi-i\gamma); \\ C_{-\alpha}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k x^{-k-\alpha};\, -s\neq -0,-1,-2,\ldots;\, -s=-\alpha; \\ \quad h_k\in\mathbb{C};\, \alpha, h_k=\mathrm{const};\, |h_k|<\infty;\, \alpha\neq 1,2,3,4,\ldots;\, \chi,\gamma\in\mathbb{R}; \\ \quad \chi,\gamma=\mathrm{const};\, \chi,\gamma\geq 0; \infty>|\alpha|>0; (\alpha=\chi+i\gamma)\vee(\alpha=\chi-i\gamma); \end{cases} \quad (2.26)$$

Коэффициенты a_k в полиномах $C_{\pm s}(x)$ являются произвольными вещественными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными вещественными *константами дифференцирования.*

2.5.5. *d*-оператор целочисленных вещественных порядков. *Третье* и *четвёртое* равенства *d*-оператора (2.5) определяют дифференцирование и интегрирование только для нецелочисленных порядков, поэтому для целочисленных порядков они теряют смысл.

Все возможные производные и неопределённые интегралы целочисленных порядков определяются *первым*, *вторым* и *пятым* равенствами (2.5).

В результате получим частный случай *d*-оператора, который будем называть *d-оператором целочисленных порядков* $m\in\mathbb{N}$ [72]

$$\begin{cases} d^{-m}x : x^q=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m}; \\ \qquad \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q-m\neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ d^{m}x : x^q=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)}x^{q+m}+C_m(x); \\ \qquad \begin{cases} \neg[(q=-1,-2,-3,\ldots)\wedge(q+m\neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ m\neq -q; \end{cases} \\ d^{m}x : x^{-m}=\ln_m(x)+C_m(x). \end{cases} \quad (2.27)$$

Здесь учтено, что $C_{-m}(x)=0$.

Полиномы интегродифференцирования $C_{\pm m}(x)$

$$C_{\pm m}(x)=\begin{cases} C_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}b_k x^k;\quad b_k=\mathrm{const}<\infty;\, m\in\mathbb{N}; \\ C_0(x)=0;\quad m=0; \\ C_{-m}(x)=0;\quad m\in\mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Коэффициенты b_k являются произвольными вещественными *константами интегрирования*.

Здесь отличными от нуля будут только полиномы интегрирования для целочисленных порядков m, которые являются алгебраическими полиномами порядков m-1 или $C_m(x)=\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$ [61].

2.5.6. *d*-оператор целочисленных порядков в развёрнутом виде. Для d-оператора целочисленных порядков имеются особые частные случаи, связанные с одновременным появлением полюсов у гамма-функций в числителях и знаменателях коэффициентов d-оператора, а при интегрировании степенных функций могут возникать логарифмические случаи. Все особые случаи возникают при действии оператора на степенные функции с отрицательными целочисленными порядками.

Рассмотрим d-оператор целочисленных порядков более подробно.

Так *первое* равенство (2.5), отвечающее за дифференцирование целочисленных порядков распадается на два случая.

Первый случай соответствует случаям, когда в коэффициентах числитель и знаменатель конечны.

Во втором случае в числителе и в знаменателе коэффициентов гамма-функции всегда одновременно попадают в полюса и обращаться в бесконечности, которые всегда сокращаются, а результат получается конечным, что легко показать. Производные целочисленных порядков степенных функций с целым отрицательным показателем легко записать

$$d^{-m}x:x^{-n}=\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)}x^{-n-m};\, n=0,1,2,3,\ldots;\, m\in\mathbb{N}.$$

Эту формулу легко упростить, используя свойство гамма-функции [73]

$$\Gamma(\alpha-m)=\frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m)}=\frac{(-1)^m\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-\alpha)}.$$

Заменив α на $-n+1$, получим

$$\Gamma(-n+1-m)=\frac{\Gamma(-n+1)}{(-n)(-n-1)\ldots(-n+1-m)}=\frac{(-1)^m\Gamma(-n+1)}{n(n+1)\ldots(n-1+m)}.$$

Подставив это выражение в рассматриваемую формулу дифференцирования, получим, если $n=0,1,2,3,\ldots;\, m\in\mathbb{N}$

$$d^{-m}x:x^{-n}=\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)}x^{-n-m}=$$
$$=\frac{(-1)^m n(n+1)\dots(n-1+m)\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+1)}x^{-n-m}=(-1)^m n(n+1)\dots(n-1+m)x^{-n-m}.$$

Данную формулу можно представить иначе, если переписать гамма-функции через факториалы

$$d^{-m}x:x^{-n}=\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)}x^{-n-m}=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}x^{-m-n}. \qquad (2.29)$$

В случае, если полюсы одновременно образуются в числителе и в знаменателе коэффициента d-оператора, то формулу можно записать, заменив бесконечности в полюсах соответствующими вычетами [74]

$$d^{-m}x:x^{-n}=\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)}x^{-n-m}=\frac{\operatorname*{Res}\limits_{1-n}\Gamma(-n+1)}{\operatorname*{Res}\limits_{1-n-m}\Gamma(1-m-n)}x^{-n-m}=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}(n+m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n+m-1}}x^{m-n}=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}x^{-n-m};\quad n=0,1,2,3,\dots;\, m\in\mathbb{N}. \qquad (2.30)$$

Формулы (2.29) и (2.30) совпадают, что является аргументом в пользу правильности замены полюсов соответствующими вычетами, которое было принято при определении d-оператора (2.5).

Второе равенство (2.27), отвечающее за интегрирование целочисленных порядков, аналогично распадается на три случая.

Первый случай, когда в числителе и в знаменателе нет бесконечностей.

Второй случай, когда в числителе бесконечность, а знаменатель конечен.

$$d^{m}x:x^{-n}=\frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)}x^{-n+m}+C_m(x);\quad n=1,2,3,\dots;n<m+1;m\neq n.$$

Заменив гамма-функцию в числителе на соответствующие вычеты $\operatorname*{Res}\limits_{1-n}\Gamma(-n+1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, получим для данных случаев

$$d^m x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) = \frac{\underset{1-n}{\mathrm{Res}}\ \Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{-n+m} + C_m(x); \quad n = 1, 2, 3, \ldots; n < m+1; m \neq n.$$

Использовали соотношение

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)},$$

заменив z=m-1, получим

$$\Gamma(m+1-n) = \frac{\Gamma(m+1)}{(m+1-1)(m+1-2)\ldots(m+1-n)}.$$

Заменив в гамма-функции на факториалы:

$$(m-n)! = \frac{m!}{m(m-1)\ldots(m+1-n)}.$$

Тогда для интегрирования получим коэффициент

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1} m(m-1)\ldots(m+1-n)}{(n-1)!m!} x^{-n+m} + C_m(x).$$

В третьем случае бесконечности появляются в числителе и в знаменателе одновременно при интегрировании целочисленных порядков степенных функций с целочисленной отрицательной степенью.

Когда интегралы целочисленных порядков m берутся от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем $-n$, а $m<n$, тогда задача полностью решается в рамках классического анализа, тогда в силу отсутствия не коммутативности в этом случае, оператор интегрирования целочисленного порядка m можно разложить на m операторов первого порядка

$$d^m x : x^{-n} \equiv \int x^{-n} d^n x = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{m} x^{-n} \underbrace{dxdx\ldots dx}_{m} = \underbrace{d^1 x : d^1 x : \ldots d^1 x}_{m} : x^{-n} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x).$$

В результате получим формулу

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x). \tag{2.31}$$

Аналогичную формулу получим для дифференцирования, если у гамма-функции снова заменить соответствующими вычетами бесконечности в полюсах, когда $m, n \in \mathbb{N}; n > m$

$$d^m x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{\underset{1-n}{\operatorname{Res}}\,\Gamma(-n+1)}{\underset{1-n+m}{\operatorname{Res}}\,\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n-m-1}} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x). \tag{2.32}$$

Полученные формулы (2.31) и (2.32) совпали с формулами классического анализа, что подтверждает правильность способа устранения бесконечностей.

Используя разложение *первого* и *второго* равенств (2.27) на два равенства в частных случаях для целочисленных порядков интегродифференцирования и степенных функций с целыми отрицательными степенями, получим *d-оператор целочисленных порядков в развёрнутом виде*

$$
\begin{cases}
d^{-m}x:x^{q}=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m};\\
\qquad m=0,1,2,\ldots;\ q\neq -1,-2,-3,\ldots;\\
d^{m}x:x^{q}=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)}x^{q+m}+C_m(x);\\
\qquad m=0,1,2,\ldots;\ q\neq -1,-2,-3,\ldots;\\
d^{-m}x:x^{-n}=\dfrac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}x^{-m-n};\\
\qquad n\in\mathbb{N};\ m=0,1,2,\ldots;\\
d^{m}x:x^{-n}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!}x^{-n+m}+C_m(x);\\
\qquad n=1,2,3,\ldots;\ n<m+1;\ m\neq n;\\
d^{m}x:x^{-n}=\dfrac{(-1)^m(n-m-1)!}{(n-1)!}x^{m-n}+C_m(x);\\
\qquad n\in\mathbb{N};\ m=0,1,2,\ldots;\ n\geq 1+m;\ m\neq n;\\
d^{m}x:x^{-m}=\ln_m(x)+C_m(x);\quad m=1,2,3,\ldots
\end{cases}
\tag{2.33}
$$

Здесь *первое* и *третье* равенства является следствием *первого* из (2.33).

Второе, *четвёртое* и *пятое* равенства являются частными случаями *второго* равенства (2.33). Четвёртое равенство соответствует *гиперболическим случаям*, когда порядок степенной функции после интегрирования будет отрицательным. Пятое равенство соответствует *параболическим случаям*, когда порядок степенной функции после интегрирования будет положительным.

Шестое равенство является частным случаем пятого равенства (2.33) для *целочисленных логарифмических случаев*. В этих случаях при интегрировании целочисленных порядков m степенных функций с целочисленным отрицательным показателем степени $-m$.

Данный оператор целочисленных порядков (2.33) эквивалентен первоначальному выражению (2.27) и является более громоздким, но для реальных вычислений может оказаться более удобным.

2.5.7. Композиция и декомпозиция *d*-оператора целочисленных порядков. Важной особенностью *d*-операторов целочисленных порядков интегродифференцирования является возможность их, во многих случаях (но не во всех), подвергать *композиции* и *декомпозиция*. Это говорит о более простой алгебраической структуре *d*-оператора целочисленных порядков, чем *d*-оператора нецелочисленных порядков (2.25).

Теорема 4. Для *d*-оператора дифференцирования целочисленного порядка $d^{-n}x$ возможна декомпозиция на n операторов дифференцирования первого порядка, которые будут приводить к одному результату при их воздействии на степенную функцию x^q

$$d^{-m}x:x^q=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m}x^q\equiv\frac{d^m}{dx^m}x^q=\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\ldots\frac{d}{dx}}_{m}x^q \tag{2.34}$$

Доказательство. Рассмотрим случаи декомпозиции для операторов дифференцирования в операторе (2.33), т. е. для первого и третьего равенств.

Действуя операторами дифференцирования порядка 1 последовательно m раз на степенную функцию x^q, когда $q\neq -1,-2,-3,\ldots$, получим

$$d^{-m}x:x^q=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m}x^q=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m-1}d^{-1}x:x^q=$$

$$=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m-1}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)}x^{q-1}=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m-2}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-1+1)}\frac{\Gamma(q-1+1)}{\Gamma(q-2+1)}x^{q-2}=$$

$$=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m-3}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)}\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-1)}\frac{\Gamma(q-1)}{\Gamma(q-2)}x^{q-3}=$$

$$\ldots$$

$$=d^{-1}x:\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)}\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-1)}\frac{\Gamma(q-1)}{\Gamma(q-2)}\ldots\frac{\Gamma(q-m+3)}{\Gamma(q-m+2)}x^{q-(m-1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)}\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-1)}\frac{\Gamma(q-1)}{\Gamma(q-2)}\ldots\frac{\Gamma(q-m+3)}{\Gamma(q-m+2)}\frac{\Gamma(q-m+2)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m}.$$

После сокращений получим равенство, которое совпадает с первым равенством оператора (2.33)

$$d^{-m}x:x^q=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\ldots d^{-1}x:}_{m}x^q=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m}.$$

Результат совпадает с первым равенством в операторе (2.33).

Аналогично проведём декомпозицию для третьего равенства, действу операторами дифференцирования порядка 1 последовательно m раз на степенную функцию x^q, когда $q=-n;\ n=1,2,3,\ldots$, получим

$$d^{-m}x:x^{-n}=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m}:x^{-n}=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m-1}:d^{-1}x:x^{-n}=$$

$$=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m-1}:\frac{(-1)^1 n!}{(n-1)!}x^{-n-1}=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m-2}:\frac{(-1)^1 n!}{(n-1)!}\frac{(-1)^2(n+1)!}{(n)!}x^{-n-2}=$$

$$=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m-3}:\frac{(-1)^1 n!}{(n-1)!}\frac{(-1)^2(n+1)!}{(n)!}\frac{(-1)^3(n+2)!}{(n+1)!}x^{-n-3}=$$

$$\dots$$

$$=d^{-1}x:\frac{(-1)^1 n!}{(n-1)!}\frac{(-1)^2(n+1)!}{(n)!}\frac{(-1)^3(n+2)!}{(n+1)!}\dots\frac{(-1)^{m-1}(n+m-2)!}{(n+m-1)!}x^{-n-(m-1)}=$$

$$=d^{-1}x:\frac{(-1)^1 n!}{(n-1)!}\frac{(-1)^2(n+1)!}{(n)!}\frac{(-1)^3(n+2)!}{(n+1)!}\dots$$

$$\dots\frac{(-1)^{m-1}(n+m-2)!}{(n+m-1)!}\frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{(n+m-2)!}x^{-n-m}.$$

После сокращений получим равенство, которое соответствует третьему равенству оператора (2.33)

$$d^{-m}x:x^{-n}=\underbrace{d^{-1}x:d^{-1}x:\dots d^{-1}x}_{m}:x^{-n}=\frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!}x^{-n-m}.$$

Оба равенства, соответствующие дифференцированию совпадают с соответствующими равенствами оператора (2.33) ■

При декомпозиции из m операторов дифференцирования первого порядка легко получить два оператора порядков p и h, для которых выполняется условие $m=p+h$, получим другое важное утверждение.

Теорема 5. d-операторы дифференцирования целочисленных порядков p и h являются коммутативными

$$d^{-p}x:d^{-h}x:x^q=d^{-h}x:d^{-p}x:x^q;\qquad p,h\in\mathbb{N};\ p,h\geq 0. \tag{2.35}$$

В соответствии с доказательством данной теоремы, очевидно, будет верно и обратное утверждение.

Теорема 6. Действие n операторов первого порядка на степенную функцию x^q эквивалентно действию композиции n операторов первого порядка $d^{-n}x$ на ту же функцию.

Для интегрирования степенных функций оператором целочисленных порядков композиция и декомпозиция в общем случае не выполняется. Но, когда операторы целочисленных порядков действуют на полиномы интегрирования целочисленных порядков, то возможна их декомпозиция и композиция.

Теорема 7. Если на полином интегрирования $C_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ целочисленного порядка *n* подействовать *d*-оператором дифференцирования целочисленного порядка *m* или *d*-оператором интегрирования целочисленного порядка *m*, то оператор с таким же результатом можно подвергнуть декомпозиции соответственно на декомпозицию *m* операторов дифференцирования первого порядка или декомпозицию *n* операторов интегрирования первого порядка

Доказательство. Рассмотрим случаи декомпозиции для операторов дифференцирования в операторе (2.33), т. е. для первого и третьего равенств

$$d^{-m}x : C_n(x) = C_{n-m}(x). \tag{2.36}$$

При декомпозиции оператора $d^{-n}x$, получим

$$\begin{gathered}\underbrace{d^{-1}x : d^{-1}x : \dots d^{-1}x}_{m} : C_n(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}}_{m} C_n(x) = \\ = \underbrace{d^{-1}x : d^{-1}x : \dots d^{-1}x}_{m} : \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k = C_{n-m}(x).\end{gathered} \tag{2.37}$$

При этом выполняется $C_{n-m}(x)\neq 0;\, n-m\geq 0;\, C_{n-m}(x)=0;\, n-m<0$

При интегрировании оператором $d^m x$, получим

$$d^m x : C_n(x) = d^m x : f(x) = \int C_n(x) d^m x = \tilde{C}_{n+m}(x) + \tilde{C}_m(x). \tag{2.38}$$

Переобозначив сумму полиномов интегрирования, получим

$$\tilde{C}_{n+m}(x) + \tilde{C}_m(x) = C_{n+m}(x)$$

При интегрировании декомпозицией операторов, получим

$$\begin{gathered}\underbrace{d^1x : d^1x : \dots d^1x}_{m} : C_n(x) = \underbrace{\int\int\dots\int}_{m} C_n(x)\underbrace{dxdx\dots dx}_{m} = \underbrace{d^1x : d^1x : \dots d^1x}_{n} : \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k = \\ = \tilde{C}_{n+m}(x) + \tilde{C}_{n+m-1}(x) + \dots + \tilde{C}_{n+1}(x).\end{gathered} \tag{2.39}$$

Преобозначив сумму полиномов интегрирования, получим первоначальное значение для полинома интегрирования с соответствующим порядком

$$\tilde{C}_{n+m}(x) + \tilde{C}_{n+m-1}(x) + \dots + \tilde{C}_{n+1}(x) = C_{n+m}(x).$$

Эти соотношения доказывают теорему ■

Из данных доказательств следует справедливость и обратной теоремы.

Теорема 8. Если на полином интегрирования целочисленного порядка *n* подействовать композицией *m* операторов дифференцирования первого порядка или композицией n операторов интегрирования первого порядка, то получим такой же результат, если на этот полином интегрирования подействовать оператором дифференцирования порядка m или, соответственно, подействовать оператором интегрирования порядка m.

Осуществив композицию из m операторов первого порядка, так, чтобы получить операторы порядков p и h, получим важное утверждение.

Теорема 9. d-операторы интегрирования целочисленных порядков p и h являются коммутативными, если они действуют на полиномы интегрирования целочисленных порядков

$$d^p x : d^h x : C_n(x) = d^h x : d^p x : C_n(x) = C_{n-m}(x); \qquad p, h \in \mathbb{N};\ p, h \geq 0;\ p + h = m.$$

В общем случае теоремы справедливые для операторов целочисленных порядков не будут справедливы для d-оператора нецелочисленных порядков.

2.6. Доказательство принципа соответствия

В частном случае из d-оператора целочисленных порядков (2.27) (или (2.33) легко получить для порядка s=1 формулы дифференцирования и интегрирования степенных функций классического анализа.

Ввиду особой значимости принципа соответствия для приложений, приведём его строгое доказательство. Для этого достаточно взять d-оператор целочисленных порядков (2.27) или (2.33), вывод которого приведён в [63].

Теорема 10. d-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования порядка m=0 соответствует тождественному преобразованию (единичному оператору) и ставит в соответствие функции, на которую он действует, эту же функцию.

Доказательство. Подставив значение порядка дифференцирования и интегрирования m=0 в первые четыре равенства d-оператора, получим тождественные преобразования для этих случаев.

Теорема 8. d-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования порядка m=1 степенных функций совпадает с операторами дифференцирования и интегрирования классического анализа.

Доказательство. Подставив значение порядка m=1 в первое и второе равенства (2.5)

$$d^{-1}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-1+1)} x^{q-1} = \frac{q\Gamma(q)}{\Gamma(q)} x^{q-1} = qx^{q-1};\ q \neq -1, -2, -3, \ldots;$$

$$d^{-1}x : x^{-n} = \frac{(-1)^1 (n+1-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = \frac{-n(n-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = -nx^{-n-1}; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Объединив эти два равенства, получим формулу дифференцирования степенных функций в классическом анализе

$$d^{-1}x:x^a \equiv \frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}; \qquad a \in \mathbb{R}; \quad a = \text{const}. \tag{2.40}$$

Полином интегрирования для порядка m=1 легко получить из (2.28)

$$C_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \xrightarrow{m=1} C_1(x) = \sum_{i=0}^{1-1} a_i x^i = a_0 x^0 \equiv C_1; \;\; C_1 \in \mathbb{R}; C_1 = \text{const}.$$

Полиномом интегрирования для порядка m=1 будет неопределённая константа интегрирования.

Из третьего и четвёртого равенств, для интегрирования порядка m=1 степенных функций получим

$$d^1x:x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+1)}x^{q+1} + C_1 = \frac{1}{q+1}x^{q+1} + C_1; \qquad q \neq -1, -2, -3, \ldots;$$

$$d^1x:x^{-n} = \frac{(-1)^1(n-1-1)!}{(n-1)!}x^{1-n} + C_1 = \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_1; \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Объединив эти два равенства, получим формулу интегрирования степенных функций в классическом анализе

$$d^1x:x^a \equiv \int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C_1; \qquad a = \text{const}; \;\; a \in \mathbb{R}; \;\; a \neq -1. \tag{2.41}$$

Пятое равенство для порядка интегрирования m=1 функции x^{-1} дают

$$d^1x:x^{-1} \equiv \int x^{-1}dx = \ln_1(x) + C_1. \tag{2.42}$$

Для выполнения принципа соответствия необходимо, чтобы логарифм первого порядка $\ln_1(x)$ совпадал бы с натуральным логарифмом классического анализа, что изначально предполагается, т. е. $\ln_1(x) \equiv \ln(x)$, а интеграл запишется $d^1x:x^{-1} \equiv \int x^{-1}dx = \ln(x) + C_1$, из которого следует интеграл классического анализа [74]

$$d^1x:x^{-1} \equiv \int x^{-1}dx = \ln|x| + C_1. \tag{2.43}$$

Полученные формулы (2.41) - (2.43) интегродифференцирования для порядка равного 1 соответствуют формулам интегродифференцирования степенных функций классического анализа. Кроме этого, не возникает ничего «лишнего», чего нет в классическом анализе, что тоже очень важно. Полученные операторы, соответствуют операторам интегродифференцирования классического анализа, что подтверждает выполнение принципа соответствия.

Теорема и Теорема 8 названы *теоремами соответствия*.

Выполнение принципа соответствия позволяет развить классический анализ как частный случай d-анализа для интегродифференцирования порядка 1.

В работе [76] был сформулирован расширенный принцип соответствия, в котором для дробного анализа предъявляются более жёсткие требования по сравнению с первоначальным принципом соответствия. d-анализ удовлетворяет также расширенному принципу соответствия.

2.7. Симметризация *d*-оператора

В соответствии с Теоремой 2.2, d-оператор не является коммутативным, а по теореме 2.3 невозможна в общем случае его композиция (произведение) и декомпозиция (разложение на сомножители).

В d-анализе имеется три причины не коммутативности d-оператора [15], а в классическом анализе - одна, которая связана с не коммутативностью операторов дифференцирования и интегрирования.

Эти свойства d-оператора делают его не всегда удобным.

Устраним часть недостатков d-оператора с помощью симметризации [77].

Введём обозначение для композиции двух операторов

$$d^{\pm\alpha,\pm\beta}x: f(x) \equiv d^{\pm\alpha}x : d^{\pm\beta}x : f(x);$$
$$d^{\mp\beta,\pm\alpha}x: f(x) \equiv d^{\mp\beta}x : d^{\pm\alpha}x : f(x).$$

Из этих операторов можно построить *симметризованные операторы*

$$d^{(\pm\alpha,\pm\beta)}x: f(x) = \frac{d^{\pm\alpha,\pm\beta}x + d^{\pm\beta,\pm\alpha}x}{2} f(x) = \frac{d^{\pm\alpha}x : d^{\pm\beta}x + d^{\pm\beta}x : d^{\pm\alpha}x}{2} f(x); \qquad (2.44)$$

$$d^{(\pm\alpha,\mp\beta)}x: f(x) = \frac{d^{\pm\alpha,\mp\beta}x + d^{\mp\beta,\pm\alpha}x}{2} f(x) = \frac{d^{\pm\alpha}x : d^{\mp\beta}x + d^{\mp\beta}x : d^{\pm\alpha}x}{2} f(x). \qquad (2.45)$$

Из данного определения следует свойство коммутативности симметризованных операторов

$$d^{(\pm\alpha,\pm\beta)}x: f(x) = d^{(\pm\beta,\pm\alpha)}x: f(x);$$
$$d^{(\pm\alpha,\mp\beta)}x: f(x) = d^{(\mp\beta,\pm\alpha)}x: f(x). \qquad (2.46)$$

Симметризация в случае n операторов будет

$$d^{\pm s}x: f(x) \equiv d^{\pm\alpha,\pm\beta,\dots,\pm\gamma}x: f(x) =$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\sum_{k=1}^{N=n!}(\mathrm{P}_k(d^{\pm\alpha}x : d^{\pm\beta}x : \dots : d^{\pm\gamma}x))\, f(x); \quad |s| = |\alpha| + |\beta| + \dots + |\gamma|. \qquad (2.47)$$

Здесь $\mathrm{P}_k(d^{\pm\alpha}x : d^{\pm\beta}x : \dots : d^{\pm\gamma}x)$ - все $n!$ возможных комбинаций из n произведений операторов.

Аналогично симметризации, можно провести и *антисимметризацию операторов*

$$
\begin{aligned}
d^{[\pm\alpha,\pm\beta]}x: f(x) &\equiv \frac{d^{\pm\alpha}x:d^{\pm\beta}x - d^{\pm\beta}x:d^{\pm\alpha}x}{2} f(x); \ \ |s|=|\alpha|+|\beta|; \\
d^{[\pm\alpha,\pm\beta]}x: f(x) &\equiv \frac{d^{\pm\alpha}x:d^{\mp\beta}x - d^{\mp\beta}x:d^{\pm\alpha}x}{2} f(x); \ \ |s|=|\alpha|+|\beta|.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Из данного определения следует свойство антикоммутативности антисимметризованных операторов

$$
d^{[\pm\alpha,\pm\beta]}x: f(x) = -d^{[\pm\beta,\pm\alpha]}x: f(x). \tag{2.49}
$$

Справедливы равенства:

$$
\begin{aligned}
d^{\pm\alpha}x:d^{\pm\beta}x: f(x) = d^{\pm\alpha,\pm\beta}x: f(x) = (d^{(\pm\alpha,\pm\beta)}x + d^{[\pm\alpha,\pm\beta]}x) f(x); \\
d^{\pm\beta}x:d^{\pm\alpha}x: f(x) = d^{\pm\beta,\pm\alpha}x: f(x) = (d^{(\pm\alpha,\pm\beta)}x - d^{[\pm\alpha,\pm\beta]}x) f(x).
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Симметризация и антисимметризация d-оператора аналогична симметризации антисимметризации матричных операторов и тензоров [78].

2.8. Обобщённый *G*-оператор комплексных порядков вещественной переменной

В d-анализе принцип соответствия является основополагающим и обязательно должен выполняться. Для d-оператора выполняется также принцип простоты, выполнение которого желательно, но не представляется обязательным.

Поэтому возможно обобщение d-оператора, когда принцип простоты не соблюдается, но принцип соответствия выполняется. Операторов дробных порядков основанных на d-операторе постоянных комплексных порядков удовлетворяющих принципу соответствия можно ввести бесконечное множество.

В связи с этим, в работе [79] был введён *G-оператор* вещественной переменной комплексных порядков интегродифференцирования действующий на степенные функции с комплексными показателями. *G*-оператор, это множество всех локальных операторов дробного интегродифференцирования, удовлетворяющих принципу соответствия, которое назовём *множеством G-оператора*. В *G*-операторе были учтены полиномы дифференцирования и введены более адекватные для приложений логарифмические случаи [80].

Определение 11. Оператор $G^s x$ будем называть *обобщённым локальным оператором дифференцирования и интегрирования дробных комплексных порядков* $s=\chi+i\gamma$, $\chi,\gamma\in\mathbb{R}; \chi,\gamma=\text{const}; \chi,\gamma\geq 0$, действующим над множеством степенных функций x^q вещественной переменной x с комплексными показателями $q=\mu+i\nu; \mu,\nu\in\mathbb{R}; \mu,\nu=\text{const}$

$$\begin{cases} G^{-s}x:x^q = K(-s,q;x)x^{q-s} + C_{-s}(x); \\ G^0x:x^q = K(0,q;x)x^{q+0} + C_0(x) = x^q; \quad C_0(x) = 0; \\ G^sx:x^q = K(s,q;x)x^{q+s} + C_s(x); \quad s \neq -q; \\ G^sx:x^{-s} = K(s,-s;x)\ln_s(x) + C_s(x). \end{cases} \tag{2.51}$$

Здесь $C_{\mp s}(x)$ - полиномы интегродифференцирования вещественного порядка s для данного случая определяется как (2.7); $\ln_s(x)$ - логарифм комплексного порядка s (2.6).

Рассмотрим частные случаи интегродифференцирования порядков s.

Если порядок $s = \chi = \gamma = 0$, то это соответствует *единичному оператору*, который переводит функции самих в себя, что можно записать $G^0x = \mathbf{1}$.

Если порядок интегродифференцирования вещественный, $s = \mathrm{Re}(s) = \chi > 0$, а в равенствах (2.51) перед показателем порядка оператора s, стоит знак минус, то это соответствует *оператору дробного дифференцирования вещественного порядка* χ, а если перед показателем порядка оператора стоит знак плюс, тогда это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования вещественного порядка* χ.

Когда порядок мнимый, $s = i\,\mathrm{Im}(s) = i\gamma; \gamma > 0$, а в равенствах (2.51) перед показателем порядка оператора s стоит знак минус, то это будет соответствовать *G-оператору дробного дифференцирования мнимого порядка* γ, а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет *G-оператор дробного интегрирования мнимого порядка* γ.

Если порядок интегродифференцирования комплексный, $s = \chi + i\gamma; \chi, \gamma > 0$, и перед ним стоит знак минус, то это соответствует *дробному дифференцированию комплексного порядка* s, а если знак плюс - *дробному интегрированию комплексного порядка* s.

В случаях, когда знаки у вещественной и мнимой части порядка интегродифференцирования различаются, т. е. $s = -\chi + i\gamma$ или $s = \chi - i\gamma$, то такие порядки будем называть *смешанными комплексными порядками*. Тогда нельзя говорить только о дифференцировании или только об интегрировании.

Если в операторе у смешанного порядка перед вещественной частью стоит знак минус, то формально будем говорить, что это *G-оператор смешанного дифференцирования комплексного порядка* s, а если знак плюс, то это *G-оператор смешанного интегрирования комплексного порядка* s.

Далее $C_{-s}(x)$ – *полиномы дифференцирования порядка* s; $C_s(x)$ и C_1 – соответственно, *полиномы интегрирования порядков* s и 1.

Полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования для удобства легко объединить в *полиномы интегродифференцирования* $C_{\mp s}(x)$.

Произвольные полиномы интегродифференцирования $C_{\mp s}(x)$ и $\tilde{C}_{\pm s}(x)$ дробного порядка s при их интегродифференцировании порядка s удовлетворяют уравнениям

$$G^{\pm s} x : C_{\mp s}(x) = \tilde{C}_{\pm s}(x) \qquad (2.52)$$

Коэффициенты дробного интегродифференцирования $K(s, q; x)$ определяют вид операторов дробного интегродифференцирования; $C_{\mp s}(x)$ – *полиномы интегродифференцирования дробного порядка* s, вид которых определяется коэффициентами $K(s, q; x)$.

В каждом конкретном случае при интегродифференцировании необходимо задавать конкретный вид коэффициентов $K(s, q; x)$.

Кроме этого, на коэффициенты $K(s, q; x)$ и полиномы интегродифференцирования необходимо наложить дополнительные условия, которые должны обеспечить выполнение принципа соответствия [63]. Тогда для вещественных порядков 1 и 0, дробного интегриродифференцирования, что соответствует классическому анализу, эти условия будет

$$\begin{aligned} &K(-1, q; x) = q; && K(0, q; x) = 1; \\ &K(1, q; x) = (q+1)^{-1};\ q \neq -1; && K(1, -1; x) = 1;\ q = -1; \\ &\ln_1(x) = \ln(x);\ \ C_1(x) = C_1 x^0 = C_1 = \text{const};\ \ C_{-1}(x) = 0;\ \ C_0(x) = 0. && \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Множество всех возможных функций коэффициентов $K(s, q; x)$ образуют *пространство коэффициентов* обобщённого вещественного локального оператора комплексных порядков s и комплексных показателей степеней q: $\mathbf{K}(\pm s, q) \subset \mathbf{K}(\pm s, q; x)$. Каждый элемент пространства $\mathrm{K}(\pm s, q; x)$ задаёт оператор дробного интегродифференцирования, отличный от других операторов, задаваемых другими элементами пространства коэффициентов. Поэтому каждый из элементов пространства $\mathrm{K}(\pm s, q; x)$ может лежать в основе построения локального дробного анализа, отличного от других подобных направлений, основанных на других операторах, определяемых другими элементами $\mathrm{K}(\pm s, q; x)$.

Заданное таким образом пространство коэффициентов $\mathrm{K}(\pm s, q; x)$ является очень широким, поэтому имеет смысл его сузить. Для этого на коэффициенты из $\mathrm{K}(\pm s, q; x)$ наложим дополнительные условия.

Потребуем, чтобы коэффициенты были независимы от переменной x или $K(\pm s, q; x) \to K(\pm s, q);\ \ \partial K(\pm s, q) / \partial x = 0$.

Коэффициенты $K(s, q)$ определены для всех значений s, q, однозначны и являются кусочно-непрерывными функциями по s и q.

Эти условия сужают пространство коэффициентов и приводят к пространству $\mathrm{K}(\pm s, q)$, которое назовём *суженным пространством коэффициентов,* тогда $\mathbf{K}(\pm s, q) \subset \mathbf{K}(\pm s, q; x)$.

Одним из самых простых коэффициентов в суженном пространстве задающих конкретные направления дробного анализа, является d-оператор комплексных порядков, который в рамках G-оператора задаётся соотношениями

$$\begin{cases} K(-s,q)=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}; & \neg[(q=-1,-2,-3,...)\wedge(q-s\neq -1,-2,-3,...)]; \\ K(s,q)=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}; & \begin{cases}\neg[(q=-1,-2,-3,...)\wedge(q+s\neq -1,-2,-3,...)]; \\ s\neq -q; \end{cases} \\ K(-s,-n)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-s-n+1)}; & m\in\mathbb{N}; -s-m\neq -1,-2,-3,...; \\ K(s,-n)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)}; & \begin{cases} m\in\mathbb{N}; s-m\neq -1,-2,-3,...; \\ s\neq m; \end{cases} \\ K(s,-s)=1; \quad s\neq 0. \end{cases} \tag{2.54}$$

Операторы из множества оператора $G^s x$ могут быть использованы, как d-оператор, в приложениях и, для описания пространств с дробной размерностью и разных процессов в них.

Возможно, что для одних процессов в пространствах дробных размерностей будут подходить одни операторы дробного интегродифференцирования из множества обобщённого оператора $G^s x$, а для других процессов больше подойдут другие операторы из того же множества.

При выборе операторов из множества $G^s x$ для приложений можно исходить из *принципа простоты*, в соответствии с которым из нескольких операторов правильным должен быть признан наиболее простой из них. Здесь, как и раньше, принцип простоты носит скорее рекомендательный характер. Окончательный отбор операторов из множества $G^s x$ надо проводить исходя из практических результатов.

2.9. *d*-оператор переменного вещественного порядка вещественной переменной

Операции дифференцирования и интегрирования обычно рассматриваются для порядков, имеющих постоянное значение. В дробном анализе вещественных порядков, порядки дифференцирования и интегрирования обобщаются на любой конечный вещественный и комплексный порядок. В связи с этим d-оператор дробного интегродифференцирования можно обобщить и на случай переменного порядка интегродифференцирования. Такой оператор был введён [81], но без полиномов дифференцирования и только с одним логарифмическим случаем для порядка 1.

Для обобщения операций интегродифференцирования на случай, когда показатель порядка дробного интегродифференцирования s заменяется вещественной функцией нескольких вещественных переменных $s=s(t_1,t_2,...t_m)$, $m\in\mathbb{N}$, которую назовём *функцией порядка* интегродифференцирования. Предположим конечность значений функции порядка,

$\infty > s(t_1,t_2,...t_m) > -\infty$, что равносильно требованию конечности порядков производных и интегралов дробных порядков. Переменные t_i в общем случае могут иметь как конечные, так и бесконечные значения.

Для функции порядка требование однозначности не является обязательным. Если функция порядка неоднозначна, то результатом воздействия оператора интегродифференцирования на функцию будет несколько функций, причём их количество будет соответствовать числу значений функций порядка для данного набора значений переменных.

Операция интегродифференцирования переменного порядка $s(t_1,t_2,...t_m)$ функции $f(x)$ можно записать

$$\begin{aligned} d^{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}x: f(x) = F^{(\pm s(t_1,t_2,...t_m))}(x) + C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x) = \\ = f^{(\mp s(t_1,t_2,...t_m))}(x) + C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Знаки «±» у функции порядка соответствуют дифференцированию для «–» и интегрированию для «+».

Если $C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x)$ и $\tilde{C}_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x)$ полиномы интегродифференцирования с одной функцией порядка, то для них справедливо равенство

$$d^{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}x : C_{\mp s(t_1,t_2,...t_m)}(x) = \tilde{C}_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x). \quad (2.56)$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что функция порядка зависит только от одной переменной t, т. е. $s(t)$.

Формальное обобщение функции порядка на случаи нескольких переменных или других математических объектов делается простой заменой функции порядков новыми математическими объектами.

Если в d-операторе вещественного порядка [60] постоянный порядок s заменим функцией вещественного порядка $s(t)$, то получим оператор.

Определение 12. *d-оператором дифференцирования и интегрирования вещественной переменной x вещественного переменного порядка $s(t)$*, зависящего от вещественной переменной t, которая независима от переменной x $(\partial t / \partial x = 0)$, действующим в пространстве степенных функций $x^{q(t)}$ с переменными показателем $q(t)$, называется отображение определяемое равенствами

$$
\begin{cases}
d^{-s(t)}x : x^{q(t)} \equiv \dfrac{d^{s(t)}}{dx^{s(t)}}x^{q(t)} = \dfrac{\Gamma(q(t)+1)}{\Gamma(q(t)-s(t)+1)}x^{q(t)-s(t)} + C_{-s(t)}(x); \\
\quad \neg[(q(t)=-1,-2,-3,\ldots) \vee (q(t)-s(t) \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\
d^{s(t)}x : x^{q(t)} \equiv \int x^{q(t)} d^{s(t)}x = \dfrac{\Gamma(q(t)+1)}{\Gamma(q(t)+s(t)+1)}x^{q(t)+s(t)} + C_{s(t)}(x); \\
\quad \begin{cases} \neg[(q(t)=-1,-2,-3,\ldots) \vee (q(t)+s(t) \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ s(t) \neq -q(t); \end{cases} \\
d^{-s(t)}x : x^{-m} \equiv \dfrac{d^{s(t)}}{dx^{s(t)}}x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s(t)-m+1)}x^{-m-s(t)} + C_{-s(t)}(x); \\
\quad m \in \mathbb{N};\ -s(t)-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\
d^{s(t)}x : x^{-m} \equiv \int x^{-m} d^{s(t)}x = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s(t)-m+1)}x^{-m+s(t)} + C_{s(t)}(x); \\
\quad \begin{cases} m \in \mathbb{N};\ s(t)-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\ s(t) \neq m; \end{cases} \\
d^{s(t)}x : x^{-q(t)} \equiv \int x^{-q(t)} d^{s(t)}x = \ln_{s(t)=q(t)}(x) + C_{s(t)}(x); \quad s(t)=q(t) \neq 0.
\end{cases}
\tag{2.57}
$$

Кратко этот оператор назовём *d-оператором переменного порядка*.

Функция порядка $s(t)$ может быть как непрерывной, так и иметь любое число разрывов. В простых случаях следует предполагать $s(t)$ непрерывной функцией или имеющей конечное или бесконечное счётное число разрывов, которые, в свою очередь, не образуют плотных множеств.

Значения $s(t)$ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Это значит, что в случае положительных значений $s(t)>0$ операции дифференцирования и интегрирования останутся, соответственно операциями дифференцирования и интегрирования. В случае отрицательных значений $s(t)<0$ операции дифференцирования перейдут в операции интегрирования, а операции интегрирования перейдут в операции дифференцирования. Значение, когда $s(t)=q$ соответствует интегрированию в логарифмическом случае. Когда $s(t)=0$ оператор действует как единичный оператор **1**, ставящий в соответствие функции, на которую он действует, саму эту функцию.

Если функция порядка будет константой $\pm s(t)=\mathrm{const}$, то тогда *d-оператор переменного порядка* будет давать частный случай дробного анализа вещественного порядка, а именно ветвь порядка $s=\mathrm{const}$.

Если $s(t)=\pm 1$, то оператор действует соответственно как оператор дифференцирования и интегрирования первого порядка, что соответствует операциям классического анализа (принцип соответствия).

Множество значений переменной t в которых функция порядка имеет положительные (отрицательные) значения называется *областью дифференциро-*

вания (интегрирования) оператора. Множество нулей функции порядка образуют *область значений единичного оператора*.

При расчётах нужно задавать область изменения аргумента(ов) функции порядка $\infty \geq a \geq t \geq b \geq -\infty$.

При интегрировании переменного порядка образуются полиномы интегродифференцирования переменных порядков, которые будут обобщениями полиномов интегродифференцирования постоянных вещественных порядков.

Определение 13. *Полиномами интегродифференцирования переменного вещественного порядка* $s(t)$ вещественной переменной x, будем называть функцию $C_{\pm s(t)}(x)$ задаваемую равенствами

$$C_{\pm s(t)}(x)=\begin{cases} C_{\alpha(t)}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha(t)}; \qquad s(t)=\alpha(t); \\ \qquad \alpha(t), a_k \in \mathbb{R}; \alpha(t)>0; \alpha(t), a_k=\text{const}<\infty; \alpha(t)\neq 1,2,3,...; \\ C_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k x^k; \qquad s(t)=m; b_k=\text{const}<\infty; m\in\mathbb{N}; \\ C_0(x)=0; \quad s(t)=0; \\ C_{-\alpha(t)}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k x^{-k-\alpha(t)}; \qquad -s(t)=-\alpha(t); \\ \qquad h_k\in\mathbb{R}; \alpha(t)>0; \alpha(t), h_k=\text{const}<\infty; \alpha(t)\neq 1,2,3,...; \\ C_{-m}(x)=0; \qquad -s(t)=-m; m\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.58}$$

Здесь коэффициенты a_k и b_k являются произвольными вещественными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными вещественными *константами дифференцирования*.

Произвольность констант a_k, b_k и h_k влечёт произвольность полиномов интегродифференцирования.

Для случаев, когда переменный порядок не является целочисленным, т. е. $s(t)<0$ и $s(t)\neq 0, 1, 2, 3, \ldots$, полиномы интегрирования можно записать подробно

$$C_{s(t)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n+s(t)} = b_1 x^{-1+s(t)} + b_2 x^{-2+s(t)} + b_3 x^{-3+s(t)} + b_4 x^{-4+s(t)} + \ldots$$

Если порядки становятся положительными целочисленными, $s(t) = 1, 2, 3, \ldots$ то полиномы интегрирования будут иметь такой же вид, как и в случае, когда порядки интегродифференцирования постоянные и целые

$$C_m(x)=\sum_{j=0}^{m-1} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}.$$

При попадании переменных порядков в область нецелочисленных отрицательных порядков $s(t)<0$ и $s(t)\neq 0, -1, -2, -3, \dots$ получим полиномы дифференцирования

$$C_{-s(t)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k x^{-k-s(t)}h_1x^{-1-s(t)}+h_2x^{-2-s(t)}+h_3x^{-3-s(t)}+h_4x^{-4-s(t)}+\dots$$

Когда переменные порядки становятся равными нулю или целым отрицательным значениям $s(t)=0, -1, -2, -3, \dots$, то полиномы дифференцирования будут равны нулю, $C_0(x)=C_{-m}(x)=0$.

В случае, когда переменные порядки меняют знак, то полиномы дифференцирования будут переходить в полиномы интегрирования, а полиномы интегрирования будут переходить в полиномы дифференцирования.

Операция интегродифференцирования переменного порядка $s(t)$ функции $f(x)$ будем обозначать так

$$d^{\pm s(t)}x: f(x)=F^{(\pm s(t))}(x)+C_{\pm s(t)}(x)=f^{(\mp s(t))}(x)+C_{\pm s(t)}(x) \quad (2.59)$$

Знаки «±» у функции порядка формально соответствуют дифференцированию в случае знака «–» и интегрированию в случае знака «+».

Здесь функцию $f^{(s(t))}(x)\equiv F^{(-s(t))}(x)$ будем называть *базовой производной переменного прядка $s(t)$* функции $f(x)$, а $F^{(s(t))}(x)\equiv f^{(-s(t))}(x)$ - *базовой первообразной переменного прядка $s(t)$* функции $f(x)$.

Для полиномов интегродифференцирования переменного порядка справедливо утверждение.

Теорема 12. Если $C_{\pm s(t)}(x)$ и $\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)$ произвольные полиномы интегродифференцирования переменного порядка $s(t)$, то при их интегродифференцировании d-оператором переменного порядка $s(t)$ выполняются уравнения [83]

$$d^{\pm s(t)}x: C_{\mp s(t)}(x)=\tilde{C}_{\pm s(t)}(x) \quad (2.60)$$

Доказательство. Покажем выполнение первого и четвёртого равенств

$$d^{\pm s(t)}x: C_{\mp s(t)}(x)=d^{s(t)}x:\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^{-k\mp s(t)}=C_{\mp s(t)}^{(\mp s(t))}(x)+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\,\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\Gamma(-k\mp s(t)\pm s(t)+1)}x^{-k\mp s(t)\pm s(t)}+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\,\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\Gamma(-k+1)}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\infty}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=0+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=\tilde{C}_{\pm s(t)}(x).$$

Здесь $-k \mp s(t)+1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ В случаях выполнения условия $-k \mp s(t)+1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, надо использовать интегродифференцирование целочисленных порядков, включая случай нулевого порядка.

Второе равенства будет справедливо, когда $s(t)=m$

$$d^{-m}x:C_m(x)=d^{-m}x:\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)}x^{k-m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\infty}x^{k-m}=0.$$

Для третьего равенства, когда $s(t)=0$, будет: $d^0x:C_0(x)=d^0x:0=0$.

Для пятого равенства, кода $s(t)=-m$, будет: $d^m x:C_{-m}(x)=d^m x:0=C_m(x)$, что и доказывает теорему ■

d-оператор переменного порядка линейный, т. е. для него справедливо

$$\begin{gathered}d^{\pm s(t)}x:(\mu f(x)+\nu g(x))=\\=\mu d^{\pm s(t)}x:f(x)+\nu d^{\pm s(t)}x:g(x);\quad s(t),t\in\mathbb{R};\mu,\nu\in\mathbb{C};\mu,\nu=\mathrm{const}.\end{gathered}\tag{2.61}$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ некоторые функции интегродифференцируемые d-оператором переменного порядка $s(t)$, если перед s стоит знак плюс и интегрируемые d-оператором функции, если перед s стоит знак минус.

d-оператор переменного порядка $d^{\pm s(t)}(x)$ может быть положен в основу d-анализа который обобщает локальный дробный анализ на основе d-оператора в котором операции дробного интегродифференцирования обобщаются на случай переменных порядков.

В работе [84] рассматривался оператор переменного порядка на основе обобщения оператора Римана – Лиувилля.

В работах [85 - 87] были получены некоторые обобщения d-анализа и полиномов интегродифференцирования для многомерных случаев.

2.9. *d*-оператор дробного интегродифференцирования переменного вещественного порядка вещественной переменной

Операции дифференцирования и интегрирования обычно рассматриваются для порядков, имеющих постоянное значение. В дробном анализе вещественных порядков, порядки дифференцирования и интегрирования обобщаются на любой конечный вещественный и комплексный порядок. В связи с этим d-оператор дробного интегродифференцирования можно обобщить и на случай переменного порядка интегродифференцирования. Такой оператор был введён [81], но без полиномов дифференцирования и только с одним логарифмическим случаем для порядка 1.

Для обобщения операций интегродифференцирования на случай, когда показатель порядка дробного интегродифференцирования s заменяется вещественной функцией нескольких вещественных переменных

$s = s(t_1, t_2, ... t_m), m \in \mathbb{N}$, которую назовём *функцией порядка* интегродифференцирования. Предположим конечность значений функции порядка, $\infty > s(t_1, t_2, ... t_m) > -\infty$, что равносильно требованию конечности порядков производных и интегралов дробных порядков. Переменные t_i в общем случае могут иметь как конечные, так и бесконечные значения.

Для функции порядка требование однозначности не является обязательным. Если функция порядка неоднозначна, то результатом воздействия оператора интегродифференцирования на функцию будет несколько функций, причём их количество будет соответствовать числу значений функций порядка для данного набора значений переменных.

Операция интегродифференцирования переменного порядка $s(t_1, t_2, ... t_m)$ функции $f(x)$ можно записать так

$$d^{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}x : f(x) = F^{(\pm s(t_1,t_2,...t_m))}(x) + C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x) = \\ = f^{(\mp s(t_1,t_2,...t_m))}(x) + C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x). \quad (2.62)$$

Знаки «±» у функции порядка соответствуют дифференцированию для знака «–» и интегрированию для «+».

Если $C_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x)$ и $\tilde{C}_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x)$ полиномы интегродифференцирования с одной функцией порядка, то для них справедливо равенство

$$d^{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}x : C_{\mp s(t_1,t_2,...t_m)}(x) = \tilde{C}_{\pm s(t_1,t_2,...t_m)}(x). \quad (2.63)$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что функция порядка зависит только от одной переменной t, т. е. $s(t)$.

Формальное обобщение функции порядка на случаи нескольких переменных или других математических объектов делается простой заменой функции порядков новыми математическими объектами.

Если в d-операторе вещественного порядка [60] постоянный порядок s заменим функцией вещественного порядка $s(t)$, то получим оператор.

Определение 15. *d-оператором дифференцирования и интегрирования вещественной переменной x вещественного переменного порядка $s(t)$*, зависящего от вещественной переменной t, которая независима от переменной x $(\partial t/\partial x = 0)$, действующим в пространстве степенных функций $x^{q(t)}$ с переменными показателем $q(t)$, называется отображение определяемое равенствами

$$
\begin{cases}
d^{-s(t)}x : x^{q(t)} \equiv \dfrac{d^{s(t)}}{dx^{s(t)}} x^{q(t)} = \dfrac{\Gamma(q(t)+1)}{\Gamma(q(t)-s(t)+1)} x^{q(t)-s(t)} + C_{-s(t)}(x); \\
\quad \neg[(q(t)=-1,-2,-3,\ldots) \vee (q(t)-s(t) \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\
d^{s(t)}x : x^{q(t)} \equiv \int x^{q(t)} d^{s(t)}x = \dfrac{\Gamma(q(t)+1)}{\Gamma(q(t)+s(t)+1)} x^{q(t)+s(t)} + C_{s(t)}(x); \\
\quad \begin{cases} \neg[(q(t)=-1,-2,-3,\ldots) \vee (q(t)+s(t) \neq -1,-2,-3,\ldots)]; \\ s(t) \neq -q(t); \end{cases} \\
d^{-s(t)}x : x^{-m} \equiv \dfrac{d^{s(t)}}{dx^{s(t)}} x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s(t)-m+1)} x^{-m-s(t)} + C_{-s(t)}(x); \\
\quad m \in \mathbb{N}; -s(t)-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\
d^{s(t)}x : x^{-m} \equiv \int x^{-m} d^{s(t)}x = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s(t)-m+1)} x^{-m+s(t)} + C_{s(t)}(x); \\
\quad \begin{cases} m \in \mathbb{N};\ s(t)-m \neq -1,-2,-3,\ldots; \\ s(t) \neq m; \end{cases} \\
d^{s(t)}x : x^{-q(t)} \equiv \int x^{-q(t)} d^{s(t)}x = \ln_{s(t)=q(t)}(x) + C_{s(t)}(x); \quad s(t)=q(t) \neq 0.
\end{cases}
\tag{2.64}
$$

Кратко этот оператор назовём *d-оператором переменного порядка*.

Функция порядка $s(t)$ может быть как непрерывной, так и иметь любое число разрывов. В простых случаях следует предполагать $s(t)$ непрерывной функцией или имеющей конечное или бесконечное счётное число разрывов, которые, в свою очередь, не образуют плотных множеств.

Значения $s(t)$ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Это значит, что в случае положительных значений $s(t)>0$ операции дифференцирования и интегрирования останутся, соответственно операциями дифференцирования и интегрирования. В случае отрицательных значений $s(t)<0$ операции дифференцирования перейдут в операции интегрирования, а операции интегрирования перейдут в операции дифференцирования. Значение, когда $s(t)=q$ соответствует интегрированию в логарифмическом случае. Когда $s(t)=0$ оператор действует как единичный оператор **1**, ставящий в соответствие функции, на которую он действует, саму эту функцию.

В частном случае, когда функция порядка будет константой $\pm s(t)=\text{const}$, то тогда *d-оператор переменного порядка* будет давать частный случай дробного анализа вещественного порядка, а именно ветвь порядка $s=\text{const}$.

Если $s(t)=\pm1$, то оператор действует соответственно как оператор дифференцирования и интегрирования первого порядка, что соответствует операциям классического анализа (принцип соответствия).

Множество значений переменной t в которых функция порядка имеет положительные (отрицательные) значения называется *областью дифференциро-*

вания (интегрирования) оператора. Множество нулей функции порядка образуют *область значений единичного оператора*.

При расчётах нужно задавать область изменения аргумента (аргументов) функции порядка $\infty \geq a \geq t \geq b \geq -\infty$.

При интегрировании переменного порядка образуются полиномы интегродифференцирования переменных порядков, которые являются обобщениями полиномов интегродифференцирования вещественных порядков.

Определение 16. *Полиномами интегродифференцирования переменного вещественного порядка* $s(t)$ вещественной переменной x, будем называть функцию $C_{\pm s(t)}(x)$ задаваемую равенствами

$$C_{\pm s(t)}(x) = \begin{cases} C_{\alpha(t)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha(t)}; \qquad s(t) = \alpha(t); \\ \qquad \alpha(t), a_k \in \mathbb{R}; \alpha(t) > 0; \alpha(t), a_k = \text{const} < \infty; \alpha(t) \neq 1, 2, 3, \ldots; \\ C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k; \qquad s(t) = m; b_k = \text{const} < \infty; m \in \mathbb{N}; \\ C_0(x) = 0; \quad s(t) = 0; \\ C_{-\alpha(t)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^{-k-\alpha(t)}; \qquad -s(t) = -\alpha(t); \\ \qquad h_k \in \mathbb{R}; \alpha(t) > 0; \alpha(t), h_k = \text{const} < \infty; \alpha(t) \neq 1, 2, 3, \ldots; \\ C_{-m}(x) = 0; \qquad -s(t) = -m; m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.65}$$

Здесь коэффициенты a_k и b_k являются произвольными вещественными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными вещественными *константами дифференцирования*.

Произвольность констант a_k, b_k и h_k приводят к произвольности полиномов интегродифференцирования.

Для случаев, когда переменный порядок не является целочисленным, т. е. $s(t)<0$ и $s(t) \neq 0$, 1, 2, 3, …, полиномы интегрирования можно записать подробно

$$C_{s(t)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n+s(t)} = b_1 x^{-1+s(t)} + b_2 x^{-2+s(t)} + b_3 x^{-3+s(t)} + b_4 x^{-4+s(t)} + \ldots$$

Если порядки становятся положительными целочисленными, $s(t) = 1, 2, 3, \ldots$ то полиномы интегрирования будут иметь такой же вид, как и в случае, когда порядок интегродифференцирования постоянная величина

$$C_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}.$$

При попадании переменных порядков в область нецелочисленных отрицательных порядков $s(t)<0$ и $s(t)\neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ получим полиномы дифференцирования

$$C_{-s(t)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k x^{-k-s(t)}h_1 x^{-1-s(t)}+h_2 x^{-2-s(t)}+h_3 x^{-3-s(t)}+h_4 x^{-4-s(t)}+\ldots$$

Когда переменные порядки становятся равными нулю или целым отрицательным значениям $s(t)=0, -1, -2, -3, \ldots$, то полиномы дифференцирования будут равны нулю, $C_0(x)=C_{-m}(x)=0$.

В случае, когда переменные порядки меняют знак, то полиномы дифференцирования будут переходить в полиномы интегрирования, а полиномы интегрирования будут переходить в полиномы дифференцирования.

Операция интегродифференцирования переменного порядка $s(t)$ функции $f(x)$ будем обозначать так

$$d^{\pm s(t)}x: f(x)=F^{(\pm s(t))}(x)+C_{\pm s(t)}(x)= f^{(\mp s(t))}(x)+C_{\pm s(t)}(x) \quad (2.66)$$

Знаки «±» у функции порядка формально соответствуют дифференцированию в случае знака «–» и интегрированию в случае знака «+».

Здесь функцию $f^{(s(t))}(x)\equiv F^{(-s(t))}(x)$ будем называть *базовой производной переменного прядка* $s(t)$ функции $f(x)$, а $F^{(s(t))}(x)\equiv f^{(-s(t))}(x)$ - *базовой первообразной переменного прядка* $s(t)$ функции $f(x)$.

Для полиномов интегродифференцирования переменного порядка справедливо утверждение.

Теорема 17. Если $C_{\pm s(t)}(x)$ и $\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)$ произвольные полиномы интегродифференцирования переменного порядка $s(t)$, то при их интегродифференцировании d-оператором переменного порядка $s(t)$ выполняются уравнения [83]

$$d^{\pm s(t)}x: C_{\mp s(t)}(x)=\tilde{C}_{\pm s(t)}(x) \quad (2.67)$$

Доказательство. Покажем выполнение первого и четвёртого равенств

$$d^{\pm s(t)}x: C_{\mp s(t)}(x)=d^{s(t)}x:\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^{-k\mp s(t)}=C_{\mp s(t)}^{(\mp s(t))}(x)+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\,\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\Gamma(-k\mp s(t)\pm s(t)+1)}x^{-k\mp s(t)\pm s(t)}+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\,\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\Gamma(-k+1)}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\Gamma(-k\mp s(t)+1)}{\infty}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=0+\tilde{C}_{\pm s(t)}(x)=\tilde{C}_{\pm s(t)}(x).$$

Здесь $-k \mp s(t)+1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ В случаях когда выполняется условие $-k \mp s(t)+1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ надо использовать дифференцированием и интегрирование целочисленных порядков, включая случай нулевого порядка.

Второе равенства будет справедливо, когда $s(t)=m$

$$d^{-m}x:C_m(x)=d^{-m}x:\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)}x^{k-m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\frac{\Gamma(k+1)}{\infty}x^{k-m}=0.$$

Для третьего равенства, когда $s(t)=0$, будет: $d^0x:C_0(x)=d^0x:0=0$.

Для пятого равенства, кода $s(t)=-m$, будет: $d^m x:C_{-m}(x)=d^m x:0=C_m(x)$, что и доказывает теорему ■

d-оператор переменного порядка линейный, т. е. для него справедливо

$$\begin{aligned}&d^{\pm s(t)}x:(\mu f(x)+\nu g(x))=\mu d^{\pm s(t)}x:f(x)+\nu d^{\pm s(t)}x:g(x);\\&s(t),t\in\mathbb{R};\ \mu,\nu\in\mathbb{C};\ \mu,\nu=\text{const}.\end{aligned} \tag{2.68}$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ некоторые функции интегродифференцируемые *d*-оператором переменного порядка $s(t)$, если перед s стоит знак плюс и интегрируемые *d*-оператором функции, если перед s стоит знак минус.

d-оператор переменного порядка $d^{\pm s(t)}(x)$ может быть положен в основу *d*-анализа который обобщает локальный дробный анализ на основе *d*-оператора в котором операции дробного интегродифференцирования обобщаются на случай переменных порядков.

В работе [84] рассматривался оператор переменного порядка на основе обобщения оператора Римана – Лиувилля.

В работах [85 - 87] были получены некоторые обобщения *d*-анализа и полиномов интегродифференцирования [88] для многомерных случаев.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. - 234 p.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка. - Минск: Наука и техника, 1987. - 687 с. (*Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.,* Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach. - 1993. - 1006 p.).

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-HollandMathematicsStudies. Vol. 204. - Amsterdam –

Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San-Diego – San-Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo: Elsevier, 2006. - 520 p.

4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. - 272 с.

5. *Федорченко В.А.* Обобщенная (целочисленная и дробная, положительная и отрицательная, действительная, комплексная и мнимая) производная. Основы теории. М.: Издательский дом "ТТ", 2011. - 400 с.

6. *Liouville J.* Mémoire sur quelques questions de géométrie et de méchanique, et sur un nouveau genre de calcui pour rsoudre ces questions // J. I'Ecole Roy. Poly-téchn., 1832.- Vol.13(21), - P. 1-69.

7. *Riemann B.* Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation // Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331-334. (Рус. пер.: *Риман Б.* Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Б. Риман. Соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. - С. 262-275.)

8. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. - Т. 12. - С. 529-539.

9. *Caputo M.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II // Geophys J. Royal Astronom. Soc. 1967. - Vol.13. - P. 529-539.

10. *Fourier J.* The Analytical Theory of Heat. – N. Y.: Dover publ., 1955. – 466 p. (First publ.: Theorie Analytical de la Chaleur. A Paris: Chez firmid didot pere et fils, 1822).

11. *Grunwald A.K.* Uber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung // Zeit. fur Mathematik und Physik. – 1867. – 12. - P. 441-480.

12. *Летников А.В.* Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. Сб. – 1868. – Т. 3, вып.1. – С. 1-68.

13. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* Об одном обобщении рядов Фурье // Математический сборник, 1951. – Т. 29, - вып. 3. – С. 477 – 500.

14. *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévelopment de Taylor. – J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. V. VIII, – p. 101 – 186.

15. *Чуриков В.А.* Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апреля 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – с. 283 – 289.

16. *Чуриков В.А.* Сравнительный анализ нелокальных и локальных направлений в дробном анализе // Пятая Всероссийская молодежная научно-

инновационная школа «Математика и математическое моделирование»: сборник материалов, г. Саров, 11 – 14 апреля 2011, ФГБОУ ВПО ФТИ НИЯУ МИФИ: сборник материалов. – Саров: Альфа, – 2011, – С. 20–23.

17. .*Нахушев А.М.* Математические модели вязкоупругого тела // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. - № 3. - С. 107-109.

18. 18*Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 528 с.

19. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1991. - 254 с.

20. *Mandelbrot B.B.* The Fractals Geometry of Nature. – N. Y.: Freeman, 1982. - 468 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.).

21. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного ка. - Москва: Наука, 2005. - 199 с.

22. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. - Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2013. – 200 с.

23. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition. –Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer. 2010. - 247 p.

24. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations//Mathematics in Science and Endineering, Vol. 198. – Academic Press, 1999. – 340 p.

25. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. - San Diego, New York, London: Academic Press, 1999. – 340 p.

26. *Anastassiou G.* Fractional differentiation inequalities. – Dordrecht; Heidelberg; London; NewYork: Springer, 2009. – 672 p.

27. *Miller K., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – New York: John Wiley & Sons, - 1993. - 366 p.

28. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractaland Fractional Calculusin Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Coursesand Lectures. - 1997. - Vol. 378. - P. 223-276.

29. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 303 с.

30. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006. – 174 с.

31. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели процессов переноса в системах. – М.: Наука, 2007. – 167 с.

32. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. - 512 с.

33. *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I: Background and theory. – Berlin: Springer, 2013. – 385 pp.

34. *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. II Applications. – Berlin: Springer, 2013. – 466 pp.

35. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. - Москва, Ижевск: РХД. – 2010. – 568 с.

36. *Butzer P., Westphal U.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. *R. Hilfer*. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2000. – 90 p.

37. *Ross B.* Fractional Calculus and Its Applications. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, - 1975. - 386 p.

38. *Hilfer R.* (Ed.) Applicationsof Fractional Calculusin Physics. - Singapore: WSPC, 2000.

39. *Metzler R., Klafter J.* The random walkr's guideto anomalous diffusion: afractional dynamics approach // Phys. Reports. 2000. - Vol. 339. P. 1-77.

40. *Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.* (Eds.) Fractional Differentiation And its Applications. - Bordeaux: Bordeaux Univ. - 2005.

41. *Carpintery A., Mainardi F.* (Eds.) Fractals and Fractional Calculusin Continuum Mechanics. CIAM Cources and Lectures. Vol. 376. Wien: Springer. - 1997.

42. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки.–2-е изд., перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

43. *Потапов А.А.* Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах // Дополнение к книге: *Кроновер Р.* “Фракталы и хаос в динамических системах”: Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006.- С. 374–479.

44. *Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А.* Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур / Под ред. *А.А. Потапова*.- М.: Радиотехника, 2003.- 720 с.

45. *Бункин Б.В., Реутов А.П., Потапов А.А. и др.* Вопросы перспективной радиолокации (Коллективная монография). - М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.

46. *Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А.* Новейшие методы обработки изображений / Под ред. *А.А. Потапова*.– М.: Физматлит, 2008. – 496 с.

47. *Быстров Р.П., Потапов А.А., Соколов А.В*. Миллиметровая радиолокация с фрактальной обработкой. – М.: Радиотехника, 2005. – 368 с.

48. *Бабенко Ю.И.* Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена - Санкт-Петербург: Профессионал,- 2007. – 584 с.

49. *Летников А.В., Черных В.А.* Основы дробного исчисления (с приложениями в теории разработки нефтяных и газовых залежей, подземной гидродинамике и динамике биологических систем. - М.: Нефтегаз, 2011. - 431 с.

50. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание - Киев. НАН Украины. 2008. - 256 с. ISBN 978-966-02-4384-2

51. *Нахушев А. М.* Математической методы и модели в исторических исследованиях. – Нальчик: Издательство М. и О. Котляровых (ООО «Полиграфсервис»), 2012. – 144 с.

52. *Шостак Р.Я.* Алексей Васильевич Летников // Сборник «Историко-математические исследования». Вып. 5 / Под ред. *Г.Ф. Рыбкина* и *А.П. Юшкевича*.- М.: ГТТИ, 1952.- С. 167-240. (Воспроизведена статья: Нелинейный мир, 2004, начиная с Т. 2,- вып. № 1).

53. *Потапов А.А., Черных В.А.* Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / Под ред. *А.А. Потапова*. – М.: Физматлит, 2009. – 820 с.

54. *Потапов А.А*. Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир, 2003. - Т. 1, - вып. № 1-2, - С. 69-81.

55. *Ross Bertram* A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus // Lect. Notes Math. 1975. – Vol.457. - P. 1-36.

56. *Ross Bertram* The development of Fractional Calculus 1695-1900 // Historia Mathematica. 1977. -V. 4. - P. 75-89.

57. *Rudin W*. Principles of Mathematical Analysis. – New York: Mc Graw-Hill, -1953. (Русский перевод: *Рудин У*. Основы математического анализа. М.: Мир, - 1976. – 320 с.).

58. 58*Алероев Т.С., Зверяев Е.М., Ларионов Е.А.* Дробное исчисление и его применение. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. Препринт ИПМ № 37.- 2013 -27 с. http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-37

59. *Чуриков В.А*. *d*-оператор дробного интегрирования и дифференцирования // Труды VII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 20 – 23 апреля 2010 г. (VII International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 20 – 23, 2010) – Томск: Изд-во ТПУ, – 2010, – С. 533–535.

60. *Чуриков В.А*. Локальный *d*-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Том-

ского политехнического университета. – 2011. – Т. 318, – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 5–10.

Глава 2

61. *Чуриков В.А.* Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

62. *Чуриков В.А.* Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ,- 2011. – 72 с.

63. *Чуриков В.А.* Доказательство принципа соответствия в дробном анализе на основе *d*-оператора // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», г. Нальчик, 5 - 8 декабря, 2011 г. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, – 2011, – С. 237–239.

64. *Чуриков В.А.* Производные и интегралы дробных комплексных порядков функций дискретной переменной // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 5 (Прикладная математика). – С. 11–13.

65. *Чуриков В.А.* Интегродифференцирование дробного порядка с помощью оператора Адамара в некоторых случаях наличия полюсов // Сборник материалов Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование», г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 19 – 22 апреля 2010. – Саров: Альфа, – 2010, – С. 24–25.

66. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 1. - М.: Наука, 1967. - 487 с.

67. *Чуриков В.А.* Краткое введение в дробный анализ на основе оператора Адамара – учебное пособие. Томск. ТПУ, 2009, Рег. № 75 от 27.05.04, 81 с.

68. *Чуриков В.А.* Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 16–20.

69. *Чуриков В.А.* Полиномы интегрирования в локальном дробном анализе на основе *d*-оператора // Пятая Всероссийская молодежная научно-инновационная школа «Математика и математическое моделирование»: сборник материалов, г. Саров, 11 – 14 апреля 2011, ФГБОУ ВПО ФТИ НИЯУ МИФИ: сборник материалов. – Саров: Альфа, – 2011, – С. 23–24.

70. *Чуриков В.А.* Полиномы дифференцирования в локальном дробном анализе на основе *d*-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 32 – 36.

71. *Чуриков В.А.* Замечания о полиномах дифференцирования в локальном дробном анализе на основе *d*–оператора // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-

инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013 г.) – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, – 2013, – С. 52.

72. *Чуриков В.А.* *d*-оператор целочисленных вещественных порядков // «Математика в естественнонаучных исследованиях». Сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 9 – 10 октября 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – С. 74 – 77.

73. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи* А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 295 с.

74. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. - М: Наука, 1973. – 736 с.

75. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.

76. *Чуриков В.А.* Расширенный принципа соответствия в дробном анализе // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013 г.) – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, – 2013, – С. 54.

77. *Чуриков В.А.* Симметризация *d*-оператора // Проблемы современной топологии и ее приложения: материалы республиканской конференции с участием учёных из стран СНГ. Ташкент, Ташкент, 5-6 мая 2016 г. – Ташкент: Издательство НУУ – 2016, – С. 141–143.

78. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

79. *Чуриков В.А.* Обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегродифференцирования // Материалы второго международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 28 мая – 1 июня 2012 г. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, –2012, – С. 285–287.

80. *Чуриков В.А.* Обобщённый *G*-оператор комплексных порядков вещественной переменной // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 42 – 44.

81. *Чуриков В.А.* Дробные производные и дробные интегралы с переменным порядком // Труды VIII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 26 – 29 апреля 2011 г. (VII International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 26 – 29, 2011). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2011, – С. 513–515.

82. *Чуриков В.А.* *d*-оператор дробного интегродифференцирования переменного вещественного порядка вещественной переменной // Математика и мате-

матическое моделирование: сборник материалов VIII всероссийской молодёжной научно-инновационной школы, г. Саров, 8 – 11 апреля 2014. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, – 2014, – С. 48-49.

83. *Чуриков В.А.* Полиномы интегродифференцирования переменного вещественного порядка // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных учёных (23 - 25 октября 2014 г., Ташкент). – Ташкент: Издательство НУУ – 2013, – С. 113–114.

84. *Вакулов Б.Г.*, *Кочуров Е.С.*, *Самко Н.Г.* Оценки типа Зигмунда для операторов дробного интегрирования и дифференцирования переменного порядка // Известия вузов. Математика, - 2011. - №6. - с. 25–34.

85. *Чуриков В.А.* Многомерный локальный оператор дробного интегрирования и дробного дифференцирования вещественных порядков вещественных переменных // Сборник научных трудов X Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 23 – 26 апреля 2013 г. (X International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 23 – 26, 2013). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2013, – С. 638–640.

86. *Чуриков В.А.* Локальный ∂-оператор комплексных порядков одной вещественной переменной действующий в пространствах многомерных функций // Труды XI Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 22 – 25 апреля 2014 г. (XI International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 22 – 25, 2014). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2012, - с. 694-697.

87. *Чуриков В.А.* Многомерный ∂-оператор интегродифференцирования комплексных порядков нескольких вещественных переменных // Труды XI Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 22 – 25 апреля 2014 г. (XI International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 22 – 25, 2014). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2014, - с. 697-700.

88. *Чуриков В.А.* Многомерные полиномы интегродифференцирования // Сборник научных трудов X Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 23 – 26 апреля 2013 г. (X International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 23 – 26, 2013). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2013, – С. 641–643.