УДК 517.3

ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛЮБЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В *d*-АНАЛИЗЕ

В. А. Чуриков
e-mail: vachurikov@list.ru.

Аннотация. В работе рассмотрено обобщение обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка на случай любых вещественных (дробных) порядков второй степени, а также обобщению метода их решения с помощью характеристических уравнений. Принципиальной особенностью у таких уравнений является, в общем случае, более одного общего решения. При формулировании характеристического уравнения необходимо дополнительно задавать ещё уравнения для экспонент дробного порядка. Кроме этого, например, в задаче Коши необходимо задавать дополнительные начальные условия.

Ключевые слова. *d*-анализ, *d*-оператор, экспоненциальное вырождение, экспоненциальное уравнение.
Keywords. *d*-analysis, *d*-operator, exponential degeneracy, exponential equation.

Оглавление

Введение

Линейные обыкновенные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами играют важную роль в математике и в естествознании. Теория ЛОДУ с постоянными коэффициентами достаточно простая, но важная для разных приложений. Данная теория является основой для разных обобщений.

Одной из таких возможностей, является обобщений ЛОДУ на случай дробного дифференцирования и дробного интегрирования *(дробного интегродифференцирования)*, когда производные и интегралы могут иметь любой вещественный или комплексный порядок. В основе разных направлений дробного анализа лежат операторы дробного интегродифференцирования, которых было предложено не менее нескольких десятков [1 – 4].

С другой стороны, в дробном анализе ЛОДУ уже частично рассматривались [5].

В данной работе развивается общая теория ЛОДУ второй степени любого вещественного порядка в рамках *d*-анализа, в основе которого лежит *d*-оператор дробного интегродифференцирования. Для *d*-анализа важной положительной особенностью является выполнение *принципа соответствия*, когда для случая интегродифференцирования порядка 1, *d*-анализ даёт классический анализ [6 - 7].

Постановка задачи

Обобщением однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами a, b и c в d-анализе являются дифференциальные уравнения комплексного порядка s степени 2

$$a\frac{d^s}{dx^s}\frac{d^s}{dx^s}X(x)+b\frac{d^s}{dx^s}X(x)+cX(x)=0. \tag{1}$$

Это уравнение можно переписать в других обозначениях

$$aX^{(s.s)}(x)+bX^{(s)}(x)+cX(x)=0.$$

Здесь $\frac{d^s}{dx^s}$ и $X^{(s)}\equiv\frac{d^s}{dx^s}X(x)$ - оператор и производная порядка s степени 1; $\frac{d^s}{dx^s}\frac{d^s}{dx^s}$ - оператор любого вещественного порядка s степени 2,

$X^{(s.s)} \equiv \frac{d^s}{dx^s}\frac{d^s}{dx^s}X(x)$ - производная любого вещественного порядка s степени 2.

Из уравнения (1) видно, что степень уравнения определяется наибольшим числом операторов дифференцирования порядка s в произведении операторов, здесь степень равна 2. Степень производной и дифференциального уравнения всегда натуральное число, как в первых двух слагаемых или ноль, как в третьем слагаемом. При переходе к классическому анализу порядок s интегродифференцирования будет равен 1, а степень и порядок отождествляются.

Уравнение (1) будем рассматривать как модельное, которое позволит построить общую теорию линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами любых постоянных вещественных и комплексных порядков и любых конечных степеней. Также возможно обобщение на случай неоднородных уравнений. Не исключена возможность обобщение и на случай переменных комплексных порядков с вещественной переменной.

В d-анализе для нецелочисленных порядков в общем случае справедливо неравенство

$$X^{(s.s)}(x) \neq X^{(2s)}(x), \qquad s \neq 0,1,3,\ldots,$$

а для целочисленных порядков s=m=0, 1, 3, … всегда справедливо равенство [6 - 7] $X^{(m.m)}(x) = X^{(2m)}(x)$.

Для нахождения решения уравнения (1) представим неизвестную функцию $X(x)$ в виде экспонент дробных порядков [6 - 7]

$$X(x) = \exp_s^{\{p|q\}}(rx); \qquad r = \text{const}. \tag{2}$$

Здесь $\exp_s^{\{p|q\}}(rx)$ - экспоненты порядка s, множество которых для одного порядка будет разным в зависимости от значения порядка s. Для порядков $1/q$ (q=1, 2, 3, …) будет одна экспонента. Для рациональных нецелых порядков представимых в виде несократимой дроби p/q, (p и q натуральные числа и $p>q$) будет p экспонент, для целых порядков p число экспонент будет p^2, а для иррациональных порядков будет бесконечное счётное множество экспонент [6 - 7]. Индексы p и q в (2) пробегают все экспоненты соответствующих порядков.

Подставив экспоненту $\exp_s^{\{p|q\}}(rx)$ в уравнение (1), получим следующее уравнение

$$(ar^s r^s(x) + br^s + c)\exp_s^{\{p|q\}}(rx) = 0,$$

которое удовлетворяется, когда выполняются два равенства отдельно или оба сразу

$$a(r^s)^2 + br^s + c = ar^{2s} + br^s + c = 0 \tag{3}$$

и

$$\exp_s^{\{p|q\}}(rx) = 0. \tag{4}$$

Первое равенство (3) является *характеристическим уравнением порядка s, степени* 2, а второе равенство (4) *экспоненциальное*, при выполнении которого у уравнения появляются *экспоненциальные корни*. В частности, все экспоненты, порядок которых $s \le 1$, не имеют экспоненциальных корней. К этому случаю относится и случай классического анализа $s=1$, а экспонента будет $\exp_s^{\{p|q\}}(rx) = \exp_1^{\{1|1\}}(rx) \equiv \exp(rx)$. В случаев, когда порядок экспонент $s>1$, все экспоненты имеют корень в точке $x=0$. Для дробных и целых нечётных порядков, экспоненты всегда имеют *тривиальный экспоненциальный корень*

$$\exp_s^{\{p|q\}}(0) = 0, \qquad s > 1.$$

Если порядок целый и чётный, то экспоненты имеют более одного корня, возможно, что корней в этих случаях будет бесконечное счётное множество [6 - 7].

Для решения уравнения рассмотрим вначале характеристическое уравнение (3) относительно r^s, если дискриминант положительный, $b^2 - 4ac > 0$, решения квадратного уравнения будут

$$r_{1,2}^s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$

Решения относительно r распадаются на два множества комплексных корней, отмеченные индексом k

$$r_{1:s\{k\}} = (r_1^s)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{\frac{1}{s}}; \quad r_{2:s\{k\}} = (r_2^s)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{6}$$

Решения (6) $r_{1,2:s\{k\}}$ можно записать в показательном виде, если $r_{1,2}^s$ корни вещественные, или $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$

$$r_{1,\,2:\,s\{k\}} = \begin{cases} |\,r_{1,\,2}^{s}\,|^{\frac{1}{s}} \exp\left(\dfrac{i2\pi k}{s}\right); & r_{1,\,2}^{s} > 0; \\ |\,r_{1,\,2}^{s}\,|^{\frac{1}{s}} \exp\left(\dfrac{i\pi}{s} + \dfrac{i2\pi k}{s}\right); & r_{1,\,2}^{s} < 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь первое равенство относится только к одному из корней $r_{1,\,2:\,s\{k\}}$, или сразу к обоим корням, если они положительные, а второе к одному из этих же корней, или к обоим корням, если они отрицательные.

Если дискриминант равен нулю $b^2 - 4ac = 0$, то имеется пара совпадающих корней относительно r^s

$$r_1^s = r_2^s = \frac{-b}{2a}.$$

Тогда относительно *r*, решения будут

$$r_{1:\,s} = r_{2:\,s} = (r_1^s)^{\frac{1}{s}} = (r_2^s)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{-b}{2a}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Случаи кратных корней характеристического уравнения требует отдельного рассмотрения и в данной работе не рассматривается.

Если дискриминант отрицательный, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, тогда решениями относительно r^s будет два комплексно сопряжённых корня

$$r_{1,\,2}^{s} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \chi \pm i\gamma. \qquad (8)$$

Относительно *r* решения будут

$$r_{1,\,2:\,s(k)} = (r_{1,\,2}^{s})^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{\frac{1}{s}} = (\chi \pm i\gamma)^{\frac{1}{s}}. \qquad (9)$$

Здесь $\chi = \dfrac{-b}{2a}$; $\quad \gamma = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Комплексные решения $r_{1,\,2:\,s\{k\}}$ в показательном виде будут

$$r_{1,\,2:\,s\{k\}} = \left|r_{1,\,2}^{s}\right|^{\frac{1}{s}} \exp\frac{i}{s}(\mathrm{Arg}\varphi) = \left|\sqrt{\chi^2 + \gamma^2}\right|^{\frac{1}{s}} \exp\frac{i}{s}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\chi}\right) + L + 2\pi k\right). \qquad (10)$$

Здесь k=0, ±1, ±2, …, константы L будут иметь значения для важных частных случаев [8]:

$$L = 0\,(\chi > 0);$$
$$L = \pi\,(\chi < 0; +\gamma);$$
$$L = -\pi\,(\chi < 0; -\gamma);$$
$$L = \pi / 2\,(\chi = 0; +\gamma);$$
$$L = -\pi / 2\,(\chi = 0; -\gamma).$$

В частности, когда b=0, тогда корни $r^s_{1,2}$ будут мнимые и $\chi = 0;\quad \gamma = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$$r_{1,\,2:\,s\{k\}} = \left(i\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^{\frac{1}{s}} = (i\gamma)^{\frac{1}{s}}.$$

Решения $r_{1,\,2:\,s\{k\}}$ можно записать в показательном виде

$$r_{1,\,2:\,s\{k\}} = |\,\gamma\,|^{\frac{1}{s}} \exp\frac{i}{s}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Здесь знак «+» перед $\pi/2$ соответствует положительному значению γ, а знак «-» - отрицательному.

Рассмотрим второе экспоненциальное уравнение (4), в котором на экспоненты дробного порядка приравниваются к нулю. В отличии от классической экспоненты классического анализа экспоненты вещественных порядков отличных от 1, могут принимать нулевые значения [6 - 7].

Решения уравнения (1) качественно отличаются для разных значений порядков s, в зависимости от того является s целым, рациональным, или иррациональным числом, поэтому рассмотрим решения (1) для этих частных случаев порядков s.

Случаи целочисленных порядков

Целочисленный порядок s=1. Данный случай соответствует линейным однородным дифференциальным уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, методы решения которых, подробно исследованы в классическом анализе [9]. Далее эти методы решения классического анализа будут обобщаться для получения решений уравнения (1) с любыми вещественными порядками отличными от 1.

Для целочисленных порядков, когда $s=m$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 1$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^m}{dx^m}aX(x)+\frac{d^m}{dx^m}bX(x)+cX(x)=0. \quad (11)$$

В частном случае, когда порядок дифференцирования $m=1$, данное уравнение совпадает с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами на основе классического анализа [9].

В d-анализе для производных целочисленных порядков всегда справедливо равенство [6 - 7]

$$X^{(m.m)}(x)=X^{(2m)}(x).$$

Для нахождения решения уравнения (11) представим искомую функцию $X(x)$ в виде экспонент целочисленного порядка $\exp_m^{\{q|l\}}(x)$ m [7]

$$X(x)=\exp_m^{\{q|l\}}(x)\equiv\exp_m^{\{q\}}(\alpha_l x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_l x)^{mn-q}}{(mn-q)!}. \quad (12)$$

Здесь α_l - *корни инвариантности порядка* m, удовлетворяющие уравнению

$$\alpha_l^m=1; \quad |\alpha_l|=1,$$

которые определяются

$$\alpha_l=1^{\frac{1}{l}}=\exp\left(\frac{i2\pi n}{l}\right)=\cos\left(\frac{2\pi n}{l}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi n}{l}\right); \quad l=0,1,2,3,\ldots,m-1.$$

Подставив экспоненту $\exp_m^{\{q|l\}}(rx)$ в уравнение (11), получим уравнение

$$(ar^m r^m(x)+br^m+c)\exp_m^{\{q|l\}}(rx)=0,$$

которое справедливо, когда выполняются два равенства отдельно, или одновременно.

$$a(r^m)^2+br^m+c=ar^{2m}+br^m+c=0 \quad (13)$$

и

$$\exp_m^{\{q|l\}}(rx)=0. \quad (14)$$

Первое равенство (13) является *характеристическим уравнением порядка m, степени 2*, а второе равенство (14) *экспоненциальное уравнение*.

Экспоненциальное уравнение для целочисленных порядков может иметь решения для случаев $m>1$. Для каждого чётного порядка m будет одно решение экспоненциального уравнения в точке $x=0$. Когда m нечётное, то экспоненты могут иметь, возможно, бесконечное счётное множество корней в отрицательной области, включая точку $x=0$.

В общем случае для целочисленных порядков область определения $-\infty<x<\infty$ и область допустимых значений будет $-\infty < \exp_m^{\{q|l\}}(rx) < \infty$.

Рассмотрим характеристическое уравнение (13) относительно r^m, если дискриминант $b^2-4ac>0$ положительный, решения квадратного уравнения будут

$$r_{1,2}^m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{15}$$

Относительно r решения квадратного уравнения распадаются на два множества комплексных корней, отмеченные индексом k

$$r_{1,2:m\{k\}} = (r_1^m)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{16}$$

Комплексные решения $r_{1,2:m\{k\}}$ в показательном виде будут

$$r_{1,2:m\{k\}} = \begin{cases} |r_{1,2}^m|^{\frac{1}{m}} \exp\left(\frac{i2\pi k}{m}\right); & r_{1,2}^m > 0; \\ |r_{1,2}^m|^{\frac{1}{m}} \exp\left(\frac{i\pi}{m} + \frac{i2\pi k}{m}\right); & r_{1,2}^m < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если дискриминант равен нулю $b^2-4ac=0$, то имеется пара совпадающих корней относительно r^m

$$r_1^m = r_2^m = \frac{-b}{2a}.$$

Относительно r, решения в этом случае будут

$$r_{1:m} = r_{2:m} = (r_1^m)^{\frac{1}{m}} = (r_2^m)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{-b}{2a}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Этот случай предполагается подробно рассмотреть в других работах.

Рассмотрим случай, когда решения характеристического уравнения комплексные. Если дискриминант отрицательный, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, тогда решениями относительно r^m будет пара комплексно сопряжённых корней

$$r_{1,2}^m = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \chi \pm i\gamma. \tag{18}$$

Относительно *r* решения будут

$$r_{1,2:m(k)} = \left(\frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^{\frac{1}{m}} = (\chi \pm i\gamma)^{\frac{1}{m}}. \tag{19}$$

Здесь $\chi = \dfrac{-b}{2a}$; $\gamma = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Комплексные решения $r_{1,2:m\{k\}}$ можно записать в показательном виде

$$r_{1,2:m\{k\}} = |r_{1,2}^m|^{\frac{1}{m}} \exp\frac{i}{m}\mathrm{Arg}\varphi =$$
$$= \left|\sqrt{\chi^2 + \gamma^2}\right|^{\frac{1}{m}} \exp\frac{i}{m}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\chi}\right) + L + 2\pi k\right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{20}$$

Здесь константы *L* будут иметь значения для разных случаев [8]:

$$L = 0\,(\chi > 0);\ L = \pi\,(\chi < 0; +\gamma);\ L = -\pi\,(\chi < 0; -\gamma);$$
$$L = \pi/2\,(\chi = 0; +\gamma);\ L = -\pi/2\,(\chi = 0; -\gamma).$$

В частности, когда *b*=0, тогда корни $r_{1,2}^m$ будут мнимые, т. е. $\chi = 0;\ \ \gamma = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$$r_{1,2:m\{k\}} = \left(i\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^{\frac{1}{m}} = (i\gamma)^{\frac{1}{m}}.$$

Решения $r_{1,2:m\{k\}}$ можно записать в показательном виде

$$r_{1,2:m\{k\}} = |\gamma|^{\frac{1}{m}} \exp\frac{i}{s}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right); k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, m-1.$$

Здесь знак «+» соответствует положительному значению γ, а знак «-» - отрицательному.

Общие решения можно записать в общем виде

$$X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x) = C_1 \exp_{m_1}^{\{q_1|l_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}x) + C_2 \exp_{m_1}^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}x) \tag{21}$$

$$C_1, C_2 = \text{const}; \quad m \in \mathbb{N}, \quad m > 1; \quad k_1, q_1, l_1, k_2, q_2, l_2 \in \mathbb{N}.$$

Здесь C_1, C_2 - неопределённые константы интегрирования. Функция $X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x)$ является общим решением уравнения (10), которые представляются в виде суммы двух линейно независимых решений для каждого набора индексов q_1, l_1, k_1 и q_2, l_2, k_2

$$\begin{cases} \exp_m^{\{q_1|l_1\}}(r_{1.\lambda\{k_1\}}x) = \exp_m^{\{q_1\}}(r_{1.m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x); \\ \\ \exp_m^{\{q_2|l_2\}}(r_{2.\lambda\{k_2\}}x) = \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x). \end{cases} \tag{22}$$

Функции (22) образуют *фундаментальную систему решений* (11). Для каждого из наборов индексов q_1, l_1, k_1 и q_2, l_2, k_2.

Для нахождения частных решений дифуравнения (11) необходимо найти неопределённые константы интегрирования C_1, C_2 исходя из заданных дополнительных условий, начальных и граничных, наложенных на общее решение (21) и на производную порядка *m* первой степени от общего решения (21).

В случае задачи Коши при нахождении частных решений уравнения (11) в наиболее общем случае необходимо наложить начальное условие на аргумент $x = x_0$, на общие решения $X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)$ и на производные $X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)$. Тогда система для определения констант интегрирования в задаче Коши, будет [5]

$$\begin{cases} C_1 \exp_m^{\{q_1|l_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) + C_2 \exp_m^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0) = X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0); \\ \\ C_1(r_{1:m\{k_1\}})^m \exp_m^{\{q\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) + C_2(r_{2:m\{k_2\}})^m \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0) = X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0). \end{cases} \tag{23}$$

Будем считать, что $r_1 \neq r_2$, тогда определитель Вронского системы будет отличен от нуля во всех точках *x* за исключением экспоненциальных корней, в которых экспонента обращается в ноль

$$\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=\begin{vmatrix}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:m\{k_1\}})^m\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:m\{k_2\}})^m\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда константы интегрирования частного решения легко получить, используя метод Крамера

$$C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}\begin{vmatrix}X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) & \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\\ X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0) & (r_{2:m\{k_2\}})^m\exp_m^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}=$$

$$=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{2:m\{k_2\}})^m-X_{m:k_1k_2}^{(m)l_1l_2}(x_0)]\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0);$$

$$C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}\begin{vmatrix}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)\\ (r_{1:m\{k_1\}})^m\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)\end{vmatrix}=$$

$$=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)-X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{1:m\{k_1\}})^m]\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0).$$

Здесь для констант интегрирования C_1 и C_2, введены наборы индексов, т. е. $C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$, которые указывают в рамках какого общего решения найдено частное решение и соответствующие ему константы интегрирования.

В развёрнутом виде соотношения для $C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ записываются

$$C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=\frac{\begin{vmatrix}X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) & \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\\ X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0) & (r_{2:m\{k_2\}})^m\exp_m^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:m\{k_1\}})^m\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:m\{k_2\}})^m\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}},$$

$$C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=\frac{\begin{vmatrix}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)\\ (r_{1:m\{k_1\}})^m\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & \exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:m\{k_1\}})^m\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:m\{k_2\}})^m\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2:m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}}$$

Частные решения задачи Коши для начальных условий $X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)$ и $X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)$ будут

$$X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x;x_0)=C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1.m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x)+C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x).$$

В развёрнутом виде частные решения задачи Коши будет

$$\begin{gathered}X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x;x_0)=\\=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{2:m\{k_2\}})^m-X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)]\times\\\times\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1.m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x)+\\+(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)-X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{1:m\{k_1\}})^m]\times\\\times\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0)\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x).\end{gathered}\tag{24}$$

Главное частное решение $X_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2}(x;x_0)$ будет для начальных условий,

$$\begin{gathered}X_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2}(x;x_0)=C_{1:1_11_2}^{1_11_11_21_2}\exp_m^{\{1_1\}}(r_{1.m\{1_1\}}x)+C_{2:1_11_2}^{1_11_11_21_2}\exp_m^{\{1_2\}}(r_{2.m\{1_2\}}x)=\\=(\Delta_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2})^{-1}[X_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2}(x_0)(r_{2:m\{1_2\}})^m-X_{m:1_11_2}^{(m)1_11_11_21_2}(x_0)]\times\\\times\exp_m^{\{1_2\}}(r_{2.m\{1_2\}}x_0)\exp_m^{\{1_1\}}(r_{1.m\{1_1\}}x)+\\+(\Delta_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2})^{-1}[X_{m:1_11_2}^{(m)1_11_11_21_2}(x_0)-X_{m:1_11_2}^{1_11_11_21_2}(x_0)(r_{1:m\{1_1\}})^m]\times\\\times\exp_m^{\{1_1\}}(r_{1:m\{1_1\}}x_0)\exp_m^{\{1_2\}}(r_{2.m\{1_2\}}x).\end{gathered}\tag{25}$$

Здесь было учтено

$$\alpha_m^{\{1_1\}}=\alpha_m^{\{1_2\}}x=1.$$

Частные диагональные решения задачи Коши для начальных условий в развёрнутом виде будут

$$\begin{gathered}X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x;x_0)\Big|_{k_1=k_2}^{q_1=q_2;\,l_1=l_2}=\\=C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1.m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x)+C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x)=\\=(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{2:m\{k_2\}})^m-X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)]\times\\\times\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x_0)\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1.m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x)+\\+(\Delta_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{m:k_1k_2}^{(m)q_1l_1q_2l_2}(x_0)-X_{m:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{1:m\{k_1\}})^m]\times\\\times\exp_m^{\{q_1\}}(r_{1:m\{k_1\}}\alpha_m^{\{l_1\}}x_0)\exp_m^{\{q_2\}}(r_{2.m\{k_2\}}\alpha_m^{\{l_2\}}x).\end{gathered}\tag{26}$$

Случаи рациональных порядков

Для рациональных порядков имеются качественные различия между случаями, когда порядки s=1/q (q= 2, 3, …) и порядки s=p/q (q=2, 3, …; p=2, 3, 4 …), p/q несократимая дробь удовлетворяющая условиям: $p/q \notin \mathbb{N}$ и $p/q \neq 1/q$. Рассмотрим отдельно эти два случая.

Случаи рациональных порядков *s*=1/*q*. Наиболее простой случай для порядков s=1/q, q= 2, 3, … Уравнение (1) для данных случаев будет.

$$\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}aX(x)+\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}bX(x)+cX(x)=0. \qquad (27)$$

Здесь $\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}$ - производная порядка 1/q степени 2; $\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}}$ - производная порядка 1/q степени 1.

Для нахождения решения уравнения (27) представим неизвестную функцию X(x) в виде экспонент $\exp_{1/q}(rx)$ порядка 1/q

$$X(x)=\exp_{1/q}(rx)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(rx)^{-1+m/q}}{\Gamma(m/q)}; \quad r=\text{const}. \qquad (28)$$

Здесь $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера.

Для каждого порядка 1/q, имеется только одна экспонента $\exp_{1/q}(x)$, с областью определения 0≤x<∞ и областью допустимых значений $0<\exp_{1/q}(x_{1/q:\min})\le\exp_{1/q}(x)<\infty$. Справедливы соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\exp_{1/q}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\exp_{1/q}(x)=\infty$.

В случае, когда 1/q>1 экспонента в точке x=0 имеет корень, а если 1/q<1 экспонента в точке x=0 обращается в бесконечность, т. е. имеет полюс порядка 1-(1/q).

Для порядков 1/q экспоненциальное уравнение не имеет решений, т. е. $\exp_{1/q}(x)\neq 0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Подстановка (28) в (27) сводит уравнение (27), к уравнению

$$(ar^{2/q}+br^{1/q}+c)\exp_{1/q}(rx)=0,$$

которое приводит к характеристическому уравнению

$$ar^{2/q}+br^{1/q}+c=0 \qquad (29)$$

Если дискриминант положительный, $b^2 - 4ac > 0$, то относительно $r^{1/q}$, решения характеристического уравнения будут

$$r_{1,2}^{1/q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Константы $r_{1,2}$ легко найти

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{1/q})^q = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^q.$$

Здесь знак «+» перед $\sqrt{b^2 - 4ac}$ соответствует первому корню, а «-» - второму.

Если дискриминант равен нулю, то решения будут два совпадающих корня

$$r_{1,2}^{1/q} = \frac{-b}{2a}.$$

Константы $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{1/q})^q = \left(\frac{-b}{2a} \right)^q.$$

Если дискриминант отрицательный, $b^2 - 4ac < 0$, то в этом случае корни $r_{1,2}^{1/q}$ комплексно сопряжённые

$$r_{1,2}^{1/q} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Тогда $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{1/q})^q = \left(\frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^q.$$

В частности, когда ещё b=0, тогда корни будут мнимые

$$r_{1,2}^{1/q} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Относительно $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{1/q})^q = \left(\pm i\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^q .$$

В случае чётных q, константы $r_{1,2}$ будут вещественными, а для нечётных - мнимыми.

Общее решение уравнения (27) можно записать

$$X(x) = C_1 \exp_{1/q}(r_1 x) + C_2 \exp_{1/q}(r_2 x). \qquad (30)$$

Здесь C_1, C_2 - константы интегрирования.

При нахождении частных решений уравнения (27) в случае задачи Коши необходимо задать начальные условия $x = x_0$ на общее решение $X(x_0) = X_0$ и на производную порядка $1/q$ степени 1 от $X(x)$, т. е. $X^{(1/q)}(x_0) = X_0^{(1/q)}$, или в развёрнутом виде

$$\frac{d^{1/q}}{dx^{1/q}} X(x) = C_1 r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x) + C_2 r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x) + C_{-1/q}(x). \qquad (31)$$

Особенностью производных в d-анализе является появление новых слагаемых, которых нет в классическом анализе, а именно, *полиномов дифференцирования* [10], которые в случае нецелочисленных порядков $1/q$ для производной первой степени имеют разложение в *дробностепенной ряд*

$$C_{-1/q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x^{-k-1/q}.$$

Здесь β_k - неопределённые константы дифференцирования.

Функция $C_{-1/q}(x)$ является произвольной функцией с точностью до задания констант дифференцирования. Поэтому для нахождения частных решений в задаче Коши, необходимо наложить дополнительные условия и на полином дифференцирования

$$C_{1:-1/q}(x_0) = A.$$

Наиболее простым случаем начального условия для полиномов дифференцирования является приближение *нулевых полиномов дифференцирования*

$$C_{-1/q}(x) = 0.$$

Если под знаком экспонент $\exp_{1/q}(rx)$ значения произведений $r_1 x_0$ и $r_2 x_0$ лежат в области определения экспонент, т. е. $0 < r_1 x_0, r_2 x_0 < \infty$, а $r_1 \neq r_2$, тогда система

$$\begin{cases} C_1 \exp_{1/q}(r_1 x_0) + C_2 \exp_{1/q}(r_2 x_0) = X_0 \\ C_1 r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) + C_2 r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) = X_0^{(1/q)} - A \end{cases} \tag{32}$$

будет невырожденная, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & \exp_{1/q}(r_2 x_0) \\ r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp_{1/q}(r_1 x_0) r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) - \exp_{1/q}(r_2 x_0) r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) \neq 0 \tag{33}$$

Тогда константы интегрирования частного решения будут

$$C_1 = \Delta^{-1}[X_0 r_2^{1/q} - (X_0^{(1/q)} - A)] \exp_{1/q}(r_2 x_0) = \frac{\begin{vmatrix} X_0 & \exp_{1/q}(r_2 x_0) \\ X_0^{(1/q)} - A & r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & \exp_{1/q}(r_2 x_0) \\ r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) \end{vmatrix}};$$

$$C_2 = \Delta^{-1}[(X_0^{(1/q)} - A) - X_0 r_1^{1/q}] \exp_{1/q}(r_1 x_0) = \frac{\begin{vmatrix} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & X_0 \\ r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & X_0^{(1/q)} - A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & \exp_{1/q}(r_2 x_0) \\ r_1^{1/q} \exp_{1/q}(r_1 x_0) & r_2^{1/q} \exp_{1/q}(r_2 x_0) \end{vmatrix}}. \tag{34}$$

Частное решение задачи Коши будет

$$X(x) = \Delta^{-1}\{[X_0 r_2^{1/q} - (X_0^{(1/q)} - A)] \exp_{1/q}(r_2 x_0)) \exp_{1/q}(r_1 x) +$$
$$+ [(X_0^{(1/q)} - A) - X_0 r_1^{1/q}] \exp_{1/q}(r_1 x_0) \exp_{1/q}(r_2 x)\}. \tag{35}$$

Порядок число рациональное *s*=*p*/*q*. Рассмотрим другие важные случаи, когда в уравнении (1) порядок число рациональное, которое можно представить в виде несократимой дроби $s=p/q$; $p, q \in \mathbb{N}$, $p>1$, тогда уравнение (1) будет

$$\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}aX(x)+\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}bX(x)+cX(x)=0. \qquad (36)$$

Здесь $\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}$ - *d*-оператор дифференцирования порядка *p*/*q* степени 1, $\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}$ - *d*-оператор дифференцирования порядка *p*/*q* степени 2.

В общем случае применение операторов $\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}$ и $\frac{d^{2p/q}}{dx^{2p/q}}$ приводят к разным результатам, ввиду того, что для рациональных порядков справедливо $\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}\neq\frac{d^{2p/q}}{dx^{2p/q}}$.

Для нахождения решения уравнения (36) представим неизвестную функцию *X*(*x*) в виде экспонент $\exp_{p/q}(rx)$ порядка *p*/*q*

$$X(x)=\exp_{p/q}(rx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(rx)^{-1+np/q}}{\Gamma(np/q)}; \qquad r=\mathrm{const}.$$

Тогда уравнение (36), сводится к следующему уравнению

$$(ar^{2p/q}+br^{p/q}+c)\exp_{p/q}(rx)=0,$$

которое распадается на *характеристическое уравнение порядка p/q степени* 2

$$ar^{2p/q}+br^{p/q}+c=0.$$

и экспоненциальное уравнение

$$\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(rx)=0; \qquad l=1,2,3,\ldots,p.$$

Для рациональных порядков имеет место экспоненциальное вырождение и для порядков *p*/*q* имеется *p* экспонент [11], которые обозначаются $\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x)$. В общем случае область определения экспонент 0≤*x*<∞ и область допустимых значений для (*p*/*q*)<1 будет $0<\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x_{p/q:\min})\leq\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x)<\infty$, или для (*p*/*q*)>1, будет $0\leq\exp_{m}^{\{q|l\}}(x)<\infty$.

Если порядок (*p*/*q*)>1 экспоненты в точке *x*=0 имеют корни, равные нулю, а для (*p*/*q*)<1 экспоненты не имеют корней, а в точке *x*=0 имеется полюс порядка 1-(*p*/*q*), т. е. экспоненты обращаются в бесконечность [11].

Рассмотрим вначале *характеристическое уравнение порядка p/q степени* 2.

Если дискриминант положительный, $b^2-4ac>0$, то относительно $r^{p/q}$, решения характеристического уравнения будут вещественные корни

$$r_{1,2}^{p/q}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Здесь знак «+» соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2.

Константы $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2\{k\}}=(r_{1,2}^{p/q})^{q/p}=\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{q/p}.$$

Здесь будет p решений данного характеристического уравнения для $r_{1\{k\}}$ и p решений для $r_{2\{k\}}$, где k=0, 1, 2, …, p-1. Модули этих решений равны

$$|r_{1,2\{0\}}|=|r_{1,2\{1\}}|=|r_{1,2\{2\}}|=...=|r_{1,2\{p-1\}}|=|r_{1,2}|=\left|\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{q/p}\right|,$$

или

$$|r_{1,2}|=\sqrt{(r_{1,2}^{p/q})^2}=+\sqrt{\left(\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{q/p}\right)^2}.$$

Решения для $r_{1,2\{k\}}$ в комплексном виде будут

$$r_{1,2\{k\}}=|r_{1,2}|\exp i\frac{q}{p}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k\right);\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...,\ p-1.$$

Здесь знак «+» соответствует случаю (или случаям), для положительных корней $r_{1,2}^{p/q}>0$, а знак минус «-» для случая (случаев) отрицательных корней $r_{1,2}^{p/q}<0$, а $|r_{1,2}|$ - модули первого и второго корня.

Если дискриминант равен нулю, то решения будут два совпадающих корня

$$r_{1,2}^{p/q}=\frac{-b}{2a}.$$

Константы $r_{1,2\{k\}}$ будут

$$r_{1,\,2\{k\}} = (r_{1,\,2}^{p/q})^{q/p} = \left(\frac{-b}{2a}\right)^{q/p}.$$

Случай $r_1 = r_2$ здесь не рассматривается, что предполагается сделать позже.

Если дискриминант отрицательный, $b^2 - 4ac < 0$, то в этом случае корни комплексно сопряжённые

$$r_{1,\,2}^{p/q} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \chi + i\gamma.$$

Здесь знак «+» у второго слагаемого соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2. Введены обозначения $\chi = \dfrac{-b}{2a}$ и $\gamma = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Тогда $r_{1,\,2}$ будут

$$r_{1,\,2} = (r_{1,\,2}^{p/q})^{q/p} = \left(\frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{q/p} = (\chi + i\gamma)^{q/p}.$$

Здесь знак «+» у второго слагаемого соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2.

В комплексном виде $r_{1,\,2}$ будут

Здесь знак «+» у второго слагаемого соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2.

В комплексном виде $r_{1,\,2}$ будут

$$r_{1,\,2:\{k\}} = |(r_{1,\,2}^{p/q})^{q/p}| \exp i\frac{q}{p}(\mathrm{Arg}\varphi) =$$

$$= \left|\sqrt{\chi^2 + \gamma^2}\right|^{q/p} \exp i\frac{q}{p}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\chi}\right) + L + 2\pi k\right); \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., p-1;$$

$$L = 0\ (\chi > 0);\ L = \pi\ (\chi < 0; \gamma \geq 0);\ L = -\pi\ (\chi < 0; \gamma < 0).$$

В частности, когда ещё b=0, тогда корни будут мнимые

$$r_{1,\,2}^{p/q} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Относительно $r_{1,\,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{p/q})^{q/p} = \left(\pm i\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^{q/p}.$$

Дробностепенные ряды экспонент $\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x)$ порядка *p/q* будут

$$\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{-1+np/q}}{\Gamma(np/q)}.$$

$$\exp_{p/q}^{\{1|l\}}(x) \equiv \exp_{p/q}^{\{1\}}(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x) \equiv \exp_{p/q}^{\{1|h+1\}}(x) \equiv \exp_{p/q}^{\{q\}}(\alpha_{p/q}^{\{h+1\}}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{np/q-1}}{\Gamma(np/q)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{(m+1)p/q-1}}{\Gamma((m+1)p/q)} = \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{p/q-1}}{\Gamma(p/q)} + \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{2p/q-1}}{\Gamma(2p/q)} + \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}}x)^{3p/q-1}}{\Gamma(3p/q)} + \dots$$

Здесь $\alpha_{p/q}^{\{l\}}$ - *корни инвариантности* порядка *p/q*, которые удовлетворяют *уравнению инвариантности*

$$(\alpha_{p/q}^{\{l\}})^{p/q} = 1.$$

Решения данного уравнения будут

$$\alpha_{p/q}^{\{l\}} = 1^{q/p} = \exp(i2\pi lq/p).$$

Общее решение уравнения (36) с учётом экспоненциального вырождения и многозначности корней $r_{1,2}^{p/q}$ можно записать

$$X_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(x) = C_1\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x) + C_2\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x) \quad (37)$$

Здесь C_1, C_2 - константы интегрирования. Константы и экспоненты каждого слагаемого пробегают по *p* значений, что в решениях $X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x)$ описывается индексами $l_1, l_2 = 0, 1, 2, \dots, p-1$ для экспонент $\exp_{p/q}^{\{1\}}(\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x)$ и $\exp_{p/q}^{\{1\}}(\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x)$, а также индексами $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, p-1$ для констант $r_{1:\,p/q\{k_1\}}$ и $r_{2:\,p/q\{k_2\}}$.

Фундаментальное решение для каждого общего решения имеет набор из двух линейно независимых функций

$$\begin{cases} \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x); \\ \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x). \end{cases} \quad (38)$$

Множество общих решений уравнения (36) будет более одного. Рассмотрим сколько всего имеется решений общих решений уравнения (36). В решении у каждого слагаемого будет по p экспонент за счёт экспоненциального вырождения, значит всего p^2 сочетаний решений для двух слагаемых.

Многозначность констант $r_{1,\,2\{k\}}$ даёт по p констант для каждой первого и второго корня, т. е. p^2 вариантов сочетания констант в двух слагаемых. С другой стороны, каждое слагаемое в решении (36) имеет по p^2 вариантов, т. е. по p констант и по p экспонент.

Всего для рациональных порядков число общих решений определяется множеством всех возможных комбинаций экспонент и констант будет множество из $p\times p\times p\times p=p^2\times p^2=p^4$ общих решений.

Среди общих решений можно выделить

Главное общее решение, когда все индексы равны нулю $l_1=l_2=k_1=k_2=0$. Главные решения всегда являются вещественными

$$X^{1_1 1_2}_{p/q:1_1 1_2}(x)=C_1\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}\alpha^{\{1_1\}}_{p/q}x)+C_2\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}\alpha^{\{1_2\}}_{p/q}x)=$$
$$=C_1\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}x)+C_2\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}x). \tag{39}$$

Здесь было учтено

$$\alpha^{\{1_1\}}_{p/q}=\alpha^{\{1_2\}}_{p/q}x=1.$$

Диагональные общие решения, это такие решения, когда все индексы равны между собой $l_1=l_2=k_1=k_2=0,1,2,...,p-1$. Всего будет p диагональных элементов, а значит и p диагональных общих решений, первым из которых будет главное общее решение.

Недиагональные общие решения, это те решения, которые не являются диагональными, которых будет p^2 - p^4.

Все решения кроме главного общего решения, в общем случае являются комплексными функциями с комплексными константами.

При нахождении частных решений дифференциального уравнения (36) в случае задачи Коши в наиболее общем случае необходимо задать одно начальное условие на аргумент $x=x_0$ начальные условия на общие решения $X^{l_1 l_2}_{p/q:k_1 k_2}(x)$ и на производную порядка p/q степени 1 от $X^{(p/q)l_1 l_2}_{p/q:k_1 k_2}(x)$, т. е.

$$\frac{d^{p/q}}{dx^{p/q}}X^{l_1 l_2}_{p/q:k_1 k_2}(x)=C_1(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}(\alpha^{\{l_1\}}_{p/q})^{p/q}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+$$
$$+C_2(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}(\alpha^{\{l_2\}}_{p/q})^{p/q}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x)+C_{-p/q}(x).$$

Учитывая, что

$$(\alpha_{p/q}^{\{l_1\}})^{p/q} = (\alpha_{p/q}^{\{l_2\}})^{p/q} = 1,$$

получим для производной $\dfrac{d^{p/q}}{dx^{p/q}} X_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(x) \equiv X_{p/q:k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x)$

$$X_{p/q:k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x) = C_1(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q} \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x) +$$
$$+C_2(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q} \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x) + C_{-p/q}(x). \qquad (40)$$

В случае нецелочисленных порядков p/q для производной порядка p/q первой степени полиномы дифференцирования имеют разложение в дробностепенной ряд [6 - 7]

$$C_{-p/q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_n x^{-k-p/q}.$$

Здесь β_n - неопределённые константы дифференцирования.

Функция $C_{-p/q}(x)$ является произвольной функцией с точностью до задания констант дифференцирования. Поэтому для нахождения частных решений в задаче Коши, необходимо наложить дополнительные условия и на полином дифференцирования

$$C_{-p/q}(x_0) = A = \text{const}.$$

Наиболее простым случаем начального условия для полиномов дифференцирования является приближение *нулевых полиномов дифференцирования*

$$C_{-p/q}(x) = 0.$$

Если под знаком экспонент $\exp_{p/q}(rx)$ значения произведений r_1x_0 и r_2x_0 лежат в области определения экспонент, т. е. $0 \le r_1x_0, r_2x_0 < \infty$, а $r_1 \ne r_2$, тогда система

$$\begin{cases} C_1 \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) + C_2 \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0) = X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0); \\ C_1(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q} \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) + \\ +C_2(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q} \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0) = X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0) - A. \end{cases} \qquad (41)$$

будет невырожденная, т. е.

$$\Delta_{k_1k_2}^{l_1l_2}=\begin{vmatrix}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда константы интегрирования частного решения легко получить

$$C_{1:k_1k_2}^{l_1l_2}=(\Delta_{k_1k_2}^{l_1l_2})^{-1}\begin{vmatrix}X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0) & \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\\ X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)-A & (r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}=$$

$$=(\Delta_{k_1k_2}^{l_1l_2})^{-1}[X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0)(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}-X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)+A]\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0); \tag{42}$$

$$C_{2:k_1k_2}^{l_1l_2}=(\Delta_{k_1k_2}^{l_1l_2})^{-1}\begin{vmatrix}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0)\\ (r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)-A\end{vmatrix}=$$

$$=(\Delta_{k_1k_2}^{l_1l_2})^{-1}[X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)-A-X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0)(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}]\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0). \tag{43}$$

Здесь для констант C_1 и C_2 интегрирования введены наборы индексов, т. е. $C_{1:k_1k_2}^{l_1l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{l_1l_2}$, которые указывают в рамках какого общего решения найдено частное решение и соответствующие ему константы интегрирования

Более подробно соотношения для $C_{1:k_1k_2}^{l_1l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{l_1l_2}$ можно записать

$$C_{1:k_1k_2}^{l_1l_2}=\frac{\begin{vmatrix}X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0) & \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\\ X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)-A & (r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}};$$

(44)

$$C_{2:k_1k_2}^{l_1l_2}=\frac{\begin{vmatrix}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & X_{k_1k_2}^{l_1l_2}(x_0)\\ (r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & X_{k_1k_2}^{(p/q)l_1l_2}(x_0)-A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & \exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\\ (r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha_{p/q}^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}\exp_{p/q}^{\{1\}}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha_{p/q}^{\{l_2\}}x_0)\end{vmatrix}}.$$

Частное решение задачи Коши будет для начальных условий $C_{-p/q}(x_0)=A$, $X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)$, $X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)$

$$X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x;x_0,A)=C^{l_1l_2}_{1:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+C^{l_1l_2}_{2:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x)=$$

$$=(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}-X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)+A]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+ \quad (45)$$

$$+(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)-A-X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x).$$

Главное частное решение будет для начальных условий $C_{-p/q}(x_0)=A$, $X^{1_11_2}_{1_11_2}(x_0)$, $X^{(p/q)1_11_2}_{1_11_2}(x_0)$

$$X^{1_11_2}_{p/q:1_11_2}(x;x_0,A)=C^{1_11_2}_{1:1_11_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}\alpha^{\{1_1\}}_{p/q}x)+C^{1_11_2}_{2:1_11_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}\alpha^{\{1_2\}}_{p/q}x)=$$

$$=C^{1_11_2}_{1:1_11_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}x)+C^{1_11_2}_{2:1_11_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}x)= \quad (46)$$

$$=(\Delta^{1_11_2}_{1_11_2})^{-1}[X^{1_11_2}_{p/q:1_11_2}(x_0)(r_{2:\,p/q\{1_2\}})^{p/q}-X^{(p/q)1_11_2}_{p/q:1_11_2}(x_0)+A]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}x)+$$

$$+(\Delta^{1_11_2}_{1_11_2})^{-1}[X^{(p/q)1_11_2}_{p/q:1_11_2}(x_0)-A-X^{1_11_2}_{p/q:1_11_2}(x_0)(r_{1:\,p/q\{1_1\}})^{p/q}]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{1_1\}}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{1_2\}}x).$$

Здесь было учтено $\alpha^{\{1_1\}}_{p/q}=\alpha^{\{1_2\}}_{p/q}=1$.

Частные диагональные решения задачи Коши будет для начальных условий $C_{-p/q}(x_0)=A$, $X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}$, $X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}$

$$X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}=C^{l_1l_2}_{1:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+C^{l_1l_2}_{2:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x)=$$

$$=(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}-X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)+A]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+ \quad (47)$$

$$+(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)-A-X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}]\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x).$$

Случай иррациональных порядков

Если порядок $s=\lambda$ число иррациональное, то общее множество корней характеристического уравнения (3) будет иметь бесконечное счётное множество для первой константы r_1 и бесконечное счётное множество для второй константы r_2, которые определяются (6) и (7), или (9) и (10).

В этом случае уравнение (1) будет

$$\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}aX(x)+\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}bX(x)+cX(x)=0. \qquad (48)$$

Для иррациональных порядков в общем случае $\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}\neq\frac{d^{2\lambda}}{dx^{2\lambda}}$.

Для нахождения решения уравнения (48) представим неизвестную функцию $X(x)$ в виде экспонент $\exp_{\lambda}(x)$ порядка λ

$$X_{\lambda}^{ql}(x)=\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x)\equiv\exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{h+1\}}x).$$

Тогда уравнение (48), сводится к следующему уравнению

$$(ar^{2\lambda}+br^{\lambda}+c)\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(rx)=0; \qquad r=\mathrm{const},$$

которое распадается на *характеристическое уравнение порядка p/q степени* 2

$$ar^{2\lambda}+br^{\lambda}+c=0$$

и экспоненциальное уравнение

$$\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x)=0.$$

В случае иррациональных порядков имеет место бесконечное экспоненциальное вырождение. Для каждого вещественного порядка λ имеется одна главная экспонента $\exp_{\lambda}^{\{1|1\}}(x)=\exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x)$, бесконечное счётное множество дополнительных экспонент $\exp_{\lambda}^{\{q|1\}}(x)=\exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x)$ и бесконечное счётное множество экспонент с комплексными коэффициентами [11]. Дробностепенные ряды экспонент порядка λ будут ($q=1,2,3,\ldots; l=1,2,3,\ldots$)

$$\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) \equiv \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{n\lambda-q}}{\Gamma(n\lambda-q+1)} =$$
$$= \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{\lambda-q}}{\Gamma(\lambda-q+1)} + \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{2\lambda-q}}{\Gamma(2\lambda-q+1)} + \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{3\lambda-q}}{\Gamma(3\lambda-q+1)} + \dots \quad (49)$$

Здесь $\alpha_{\lambda}^{\{l\}}$ - *корни инвариантности* порядка λ, которые удовлетворяют *уравнению инвариантности*

$$\alpha_{\lambda}^{\{l\}} = 1^{1/\lambda} = \exp\left(\frac{i2\pi l}{\lambda}\right) = \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right), \qquad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Уравнение инвариантности

$$(\alpha_{\lambda}^{\{l\}})^{\lambda} = 1, \qquad |\alpha_{\lambda}^{\{l\}}| = 1.$$

Дробностепенные ряды *главной экспоненты порядка* λ (q=l=1) будет

$$\exp_{\lambda}^{\{1|1\}}(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x)^{n\lambda-1}}{\Gamma(n\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n\lambda-1}}{\Gamma(n\lambda)}; \qquad \alpha_{\lambda}^{\{1\}} = 1.$$

Для иррациональных порядков имеется бесконечное вырождение корней инвариантности и бесконечное сдвиговое вырождение.

Каждой паре значений q и l будет соответствовать отдельная экспонента. Все эти экспоненты можно представить в виде матрицы $\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) \equiv \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)$ с бесконечным числом строк и столбцов

$$\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) = \begin{pmatrix} \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (50)$$

В общем случае область определения таких экспонент $0 \le x < \infty$ и область допустимых значений для $\lambda<1$ будет $0 < \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x_{p/q:\min}) \le \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) < \infty$, а для $\lambda>1$, будет $0 \le \exp_{\lambda}^{\{q|l\}} < \infty$. Если порядок $\lambda>1$, то экспоненты имеют корни в точке x=0, а для $\lambda<1$ экспоненты не имеют нулей, а в точке x=0, экспоненты обращаются в бесконечность (полюс порядка λ) [11].

Рассмотрим *характеристическое уравнение порядка* λ *степени* 2.

Если дискриминант положительный, $b^2 - 4ac > 0$, то относительно r^{λ}, решения характеристического уравнения будут вещественные корни

$$r_{1,2}^{\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Здесь знак «+» соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2.

Константы $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2\{k\}} = (r_{1,2}^{\lambda})^{\lambda} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^{\lambda}.$$

Здесь будет *p* решений данного характеристического уравнения для $r_{1\{k\}}$ и *p* решений для $r_{2\{k\}}$, где *k*=0, 1, 2, …, *p*-1. Модули этих решений равны

$$|r_{1,2\{0\}}| = |r_{1,2\{1\}}| = |r_{1,2\{2\}}| = \ldots = |r_{1,2\{p-1\}}| = |r_{1,2}| = \left| \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^{\lambda} \right|,$$

или

$$|r_{1,2}| = \sqrt{(r_{1,2}^{\lambda})^2} = +\sqrt{\left(\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^{\lambda} \right)^2}.$$

Решения для $r_{1,2\{k\}}$ в комплексном виде будут

$$r_{1,2\{k\}} = |r_{1,2}| \exp i \frac{1}{\lambda} \left(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Здесь знак «+» соответствует случаю (или случаям), для положительных корней $r_{1,2}^{\lambda} > 0$, а знак минус «-» для случая (случаев) отрицательных корней $r_{1,2}^{\lambda} < 0$. $|r_{1,2}|$ - модули первого и второго корня.

Если дискриминант равен нулю, то решения будут два совпадающих корня

$$r_{1,2}^{\lambda} = \frac{-b}{2a}.$$

Константы $r_{1,2\{k\}}$ будут

$$r_{1,2\{k\}} = (r_{1,2}^{\lambda})^{1/\lambda} = \left(\frac{-b}{2a} \right)^{1/\lambda}.$$

Случай $r_1 = r_2$ здесь не рассматривается, что предполагается сделать позже.

Если дискриминант отрицательный, $b^2 - 4ac < 0$, то в этом случае корни $r_{1,2}^{1/n}$ комплексно сопряжённые

$$r_{1,2}^{\lambda} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \chi \pm i\gamma .$$

Здесь знак «+» у второго слагаемого соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2. Введены обозначения $\chi = \frac{-b}{2a}$ и $\gamma = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Тогда $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{\lambda})^{1/\lambda} = \left(\frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^{\lambda} = (\chi \pm i\gamma)^{\lambda} .$$

Здесь знак «+» у второго слагаемого соответствует первому корню r_1, а знак «-» - второму корню r_2.

В комплексном виде $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2:\{k\}} = |(r_{1,2}^{\lambda})^{1/\lambda}| \exp i \frac{1}{\lambda} \left(\mathrm{Arg}\varphi \right) =$$

$$= \left| \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \right|^{1/\lambda} \exp i \frac{1}{\lambda} \left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\chi} \right) + L + 2\pi k \right); \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

$$L = 0 \ (\chi > 0); \ L = \pi \ (\chi < 0; \gamma \geq 0); \ L = -\pi \ (\chi < 0; \gamma < 0).$$

В случае иррациональных порядков имеется бесконечное счётное множество решений характеристического уравнения.

В частности, когда ещё b=0, тогда корни будут мнимые

$$r_{1,2}^{\lambda} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}} .$$

Относительно $r_{1,2}$ будут

$$r_{1,2} = (r_{1,2}^{\lambda})^{1/\lambda} = \left(\pm i \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^{1/\lambda} .$$

Общие решения можно записать в общем виде

$$X^{q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x) = C_1 \exp^{\{q_1|l_1\}}_{\lambda}(r_{1:\lambda\{k_1\}} x) + C_2 \exp^{\{q_2|l_2\}}_{\lambda}(r_{2:\lambda\{k_2\}} x)$$

$$C_1, C_2 = \text{const}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \quad k_1, q_1, l_1, k_2, q_2, l_2 \in \mathbb{N}$$

Функция $X^{q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x)$ является общим решением дифуравнения (49), которые можно представить в виде суммы двух линейно независимых решений

$$X^{q_1 l_1}_{1.\lambda:k_1}(x) = C_1 \exp^{\{q_1|l_1\}}_{\lambda}(r_{1.\lambda\{k_1\}} x) = C_1 \exp^{\{q_1\}}_{\lambda}(r_{1.\lambda\{k_1\}} \alpha^{\{l_1\}}_{\lambda} x);$$

$$X^{q_2 l_2}_{2.\lambda:k_2}(x) = C_2 \exp^{\{q_2|l_2\}}_{\lambda}(r_{2.\lambda\{k_2\}} x) = C_2 \exp^{\{q_2\}}_{\lambda}(r_{2.\lambda\{k_2\}} \alpha^{\{l_2\}}_{\lambda} x).$$

Фундаментальное решение каждого общего решения из $X^{q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x)$ имеет набор из двух фундаментальных решений из двух линейно независимых функций

$$\begin{cases} \exp^{\{q_1|l_1\}}_{\lambda}(r_{1.\lambda\{k_1\}} x) = \exp^{\{q_1\}}_{\lambda}(r_{1.\lambda\{k_1\}} \alpha^{\{l_1\}}_{\lambda} x); \\ \exp^{\{q_2|l_2\}}_{\lambda}(r_{2.\lambda\{k_2\}} x) = \exp^{\{q_2\}}_{\lambda}(r_{2.\lambda\{k_2\}} \alpha^{\{l_2\}}_{\lambda} x). \end{cases} \tag{51}$$

В случае вещественных корней $r_{1:s\{k\}}$ и $r_{2:s\{k\}}$ решениями могут являться только такие функции, когда $r_{1:s\{k\}} < 0$ и/или $r_{2:s\{k\}} < 0$.

При нахождении частных решений дифуравнения (51) необходимо задать граничные (начальные и краевые) условия. Для нахождения частных решений в задаче Коши зададим начальное условие для аргумента x_0, для каждого решения $X^{q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x_0)$ и начальное условие для производных порядка λ первой степени от общих решений $X^{(\lambda) q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x_0)$.

Получим систему начальных условий

$$\begin{aligned} X^{q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x_0) &= C_1 \exp^{\{q_1|l_1\}}_{\lambda}(r_{1:\lambda\{k_1\}} x_0) + C_2 \exp^{\{q_2|l_2\}}_{\lambda}(r_{2:\lambda\{k_2\}} x_0) \\ X^{(\lambda) q_1 l_1 q_2 l_2}_{\lambda:k_1 k_2}(x_0) &= C_1 \cdot (r_{1:\lambda\{k_1\}})^{\lambda} \exp^{\{q_1|l_1\}}_{\lambda}(r_{1:\lambda\{k_1\}} x_0) + \\ &\quad + C_2 \cdot (r_{2:\lambda\{k_2\}})^{\lambda} \exp^{\{q_2|l_2\}}_{\lambda}(r_{2:\lambda\{k_2\}} x_0) + C_{-\lambda}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Особенностью этих производных является появление новых слагаемых, а именно полиномов дифференцирования $C_{-\lambda}(x)$ порядка λ.

Появление полиномов дифференцирования при нахождении производных нецелочисленных порядков является особенностью d-анализа [7, 8, 9].

Полиномы дифференцирования $C_{-\lambda}(x)$ порядка λ выражаются через дробностепенной ряд

$$C_{-\lambda}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x^{-n-\lambda}.$$

Здесь β_n - неопределённые константы дифференцирования.

Функция $C_{-\lambda}(x)$ носит произвольный характер с точностью до задания коэффициентов дифференцирования. $C_{-\lambda}(x)$ может быть переменной и постоянной функцией. Наиболее простым случаем является приближение *нулевых полиномов дифференцирования*

$$C_{-\lambda}(x)=0.$$

Функция $C_{-\lambda}(x)$ является произвольной функцией с точностью до задания констант дифференцирования. Поэтому для нахождения частных решений в задаче Коши, необходимо наложить дополнительные условия и на полином дифференцирования

$$C_{-\lambda}(x_0)=A.$$

Далее будем рассматривать решения в *приближении нулевых полиномов дифференцирования*.

При нахождении частных решений дифференциального уравнения (49) в случае задачи Коши в наиболее общем случае необходимо задать начальные условия, одно на аргумент $x=x_0$, на общие решения $X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)$ и на производные $X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0)$.

Система для определения констант интегрирования в задаче Коши, будет

$$\begin{cases} X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)=C_1\exp_{\lambda}^{\{q_1|l_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_1\}}x_0)+C_2\exp_{\lambda}^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_2\}}x_0); \\ X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0)-A=C_1(r_{1:\lambda\{k_1\}})^{\lambda}\exp_{\lambda}^{\{q\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_1\}}x_0)+ \\ \qquad +C_2(r_{2:\lambda\{k_2\}})^{\lambda}\exp_{\lambda}^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_2\}}x_0). \end{cases} \tag{52}$$

Будем считать, что $r_1\neq r_2$, тогда определитель системы будет

$$\Delta_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}=\begin{vmatrix} \exp_{\lambda}^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_1\}}x_0) & \exp_{\lambda}^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_2\}}x_0) \\ (r_{1:\lambda\{k_1\}})^{\lambda}\exp_{\lambda}^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\lambda\{k_2\}})^{\lambda}\exp_{\lambda}^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_{\lambda}^{\{l_2\}}x_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда константы интегрирования частного решения легко получить

$$C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2} = (\Delta_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1} \begin{vmatrix} X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) & \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \\ X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0) - A & (r_{2:\lambda\{k_2\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= (\Delta_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{2:\lambda\{k_2\}})^\lambda - X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)l_1l_2}(x_0) + A]\exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0);$$

$$C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2} = (\Delta_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1} \begin{vmatrix} \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) \\ (r_{1:\lambda\{k_1\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0) - A \end{vmatrix} =$$

$$= (\Delta_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2})^{-1}[X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0) - A - X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)(r_{1:\lambda\{k_1\}})^\lambda]\exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0).$$

Здесь для констант C_1 и C_2 интегрирования введены наборы индексов, т. е. $C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$, которые указывают в рамках какого общего решения найдено частное решение и соответствующие ему константы интегрирования

В развёрнутом виде соотношения для $C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ и $C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}$ запишем

$$C_{1:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2} = \frac{\begin{vmatrix} X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) & \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \\ X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0) - A & (r_{2:\lambda\{k_2\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_2|l_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \\ (r_{1:\lambda\{k_1\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\lambda\{k_2\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \end{vmatrix}} \tag{53}$$

$$C_{2:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2} = \frac{\begin{vmatrix} \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0) \\ (r_{1:\lambda\{k_1\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0) - A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \\ (r_{1:\lambda\{k_1\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_1\}}(r_{1:\lambda\{k_1\}}\alpha_\lambda^{\{l_1\}}x_0) & (r_{2:\lambda\{k_2\}})^\lambda \exp_\lambda^{\{q_2\}}(r_{2:\lambda\{k_2\}}\alpha_\lambda^{\{l_2\}}x_0) \end{vmatrix}}. \tag{54}$$

Частное решение задачи Коши будет для начальных условий $C_{-\lambda}(x_0) = A$, $X_{\lambda:k_1k_2}^{q_1l_1q_2l_2}(x_0)$, $X_{\lambda:k_1k_2}^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}(x_0)$

$$\begin{aligned}
&X^{q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2}(x;x_0,A)= \\
&=C^{q_1l_1q_2l_2}_{1:k_1k_2}\exp^{\{q_1\}}_{\lambda}(r_{1.\,\lambda\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{\lambda}x)+C^{q_1l_1q_2l_2}_{2:k_1k_2}\exp^{\{q_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{\lambda}x)= \\
&=(\Delta^{q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2})^{-1}[X^{q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2}(x_0)(r_{2:\,\lambda\{k_2\}})^{\lambda}-X^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2}(x_0)+A]\times \\
&\times\exp^{\{q_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{\lambda}x_0)\exp^{\{q_1\}}_{\lambda}(r_{1.\,\lambda\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{\lambda}x)+ \\
&+(\Delta^{q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2})^{-1}[X^{(\lambda)q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2}(x_0)-A-X^{q_1l_1q_2l_2}_{\lambda:k_1k_2}(x_0)(r_{1:\,\lambda\{k_1\}})^{\lambda}]\times \\
&\times\exp^{\{q_1\}}_{\lambda}(r_{1:\,\lambda\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{\lambda}x_0)\exp^{\{q_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{\lambda}x).
\end{aligned} \tag{55}$$

Главное частное решение будет для начальных условий $C_{-\lambda}(x_0)=A$, $X^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)$, $X^{(\lambda)1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)$

$$\begin{aligned}
&X^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x;x_0,A)=C^{1_11_11_21_2}_{1:1_11_2}\exp^{\{1_1\}}_{\lambda}(r_{1.\,\lambda\{1_1\}}x)+C^{1_11_11_21_2}_{2:1_11_2}\exp^{\{1_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{1_2\}}x)= \\
&=(\Delta^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2})^{-1}[X^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)(r_{2:\,\lambda\{1_2\}})^{\lambda}-X^{(\lambda)1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)+A]\times \\
&\times\exp^{\{1_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{1_2\}}x_0)\exp^{\{1_1\}}_{\lambda}(r_{1.\,\lambda\{1_1\}}x)+ \\
&+(\Delta^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2})^{-1}[X^{(\lambda)1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)-A-X^{1_11_11_21_2}_{\lambda:1_11_2}(x_0)(r_{1:\,\lambda\{1_1\}})^{\lambda}]\times \\
&\times\exp^{\{1_1\}}_{\lambda}(r_{1:\,\lambda\{1_1\}}x_0)\exp^{\{1_2\}}_{\lambda}(r_{2.\,\lambda\{1_2\}}x).
\end{aligned} \tag{56}$$

Здесь было учтено $\alpha^{\{1_1\}}_{\lambda}=\alpha^{\{1_2\}}_{\lambda}=1$.

Частные диагональные решения задачи Коши будет для начальных условий $C_{-p/q}(x_0)=A$, $X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}$, $X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}$

$$\begin{aligned}
&X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)\Big|^{l_1=l_2}_{k_1=k_2}=C^{l_1l_2}_{1:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+C^{l_1l_2}_{2:k_1k_2}\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x)= \\
&=(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{2:\,p/q\{k_2\}})^{p/q}-X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)+A]\times \\
&\times\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x)+ \\
&+(\Delta^{l_1l_2}_{k_1k_2})^{-1}[X^{(p/q)l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)-A-X^{l_1l_2}_{p/q:k_1k_2}(x_0)(r_{1:\,p/q\{k_1\}})^{p/q}]\times \\
&\times\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{1:\,p/q\{k_1\}}\alpha^{\{l_1\}}_{p/q}x_0)\exp^{\{1\}}_{p/q}(r_{2:\,p/q\{k_2\}}\alpha^{\{l_2\}}_{p/q}x).
\end{aligned} \tag{57}$$

Заключение

Теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами связана со многими математическими теориями и физическими моделями, поэтому является основой для разного рода возможных обобщений, что должно привести к разным интересным математическим моделям. Такие обобщения возможны и для случая линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробных порядков, таких как:

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения вещественных порядков любых конечных степеней.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения комплексных порядков с комплексными коэффициентами.

1. Обобщение на случай линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решениями которых являются многие важные специальные функции.
2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения дробных порядков.
3. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений вещественных порядков.
4. Обобщение на случай линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными комплексных порядков с комплексными коэффициентами.
5. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
6. Динамические системы с любыми вещественными и комплексными порядками интегродифференцирования.
7. Теория колебательных процессов в однородных фракталах.

Кроме этого, необходимо рассмотреть, как многозначность общих решений связана с многозначностью частных решений. Как реализуются частные решения в реальных случаях. Реализуется одно решение или несколько решений сразу и как эти решения соотносятся между собой.

Сколько частных решений соответствует одному общему решению и в каких случаях?

В данной работе изложена теория обыкновенных дифференциальных уравнений дробных вещественных порядков второй степени не полностью, а именно, здесь отсутствуют способы получения решений уравнений для случаев совпадающих корней. Эти вопросы предполагается рассмотреть позже.

Литература

1. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. - 234 p.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка. - Минск: Наука и техника, 1987. - 687 с. (*Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.*, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach. - 1993. - 1006 p.).

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-HollandMathematicsStudies. Vol. 204. - Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San-Diego – San-Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo: Elsevier, 2006. - 520 p.

4. *Чуриков В.А.* Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апр. 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – с. 283 – 289.

5. *Чуриков В.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в *d*-анализе дробных порядков 1/*n* с постоянными коэффициентами) // Междунар. Российско-Китайская конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Нальчик, Приэльбрусье, 14 – 18 дек. 2015. – Нальчик: Из-во КБНЦ РАН – 2015. – С. 53-56.

6. *Чуриков В.А.* Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

7. *Чуриков В.А.* Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ,- 2011. – 72 с.

8. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. В 2-х томах. Том 1. Начала теории. М.: Наука, -1967. - 486 с.

9. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Ленанд, 2019. – 336 с.

10. *Чуриков В.А.* Полиномы дифференцирования в локальном дробном анализе на основе *d*-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 32 – 36.

11. *Чуриков В.А.* Экспоненциальное вырождение в случае нецелочисленных порядков в локальном дробном анализе на основе *d*-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2 (Математика и механика. Физика). – С. 29–33.