УДК 517.53, 517.54

ГИПОТЕЗА КШИЖА И ОДНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.

Ступин Д. Л.
Тверь

Найдена точная оценка модулей тейлоровских коэффициентов на классах функций, ограниченных снизу по модулю. На основе ограниченных сверху подклассов упомянутых классов построены модели классов ограниченных не обращающихся в нуль функций, переводящих 0 в достаточно маленькие положительные числа.

The sharp estimation of the moduli of Taylor coefficients on classes of functions bounded from below modulo is found. On the basis of bounded from above subclasses of the mentioned classes, we constructed models of classes of bounded nonvanishing functions mapping 0 to small enough positive numbers.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, sharp Taylor coefficient modulus estimates.

1. Введение

Пусть $\Delta \coloneqq \{z \,:\, z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций F, таких, что $|F(z)| \geqslant 1$, $z \in \Delta$, обозначим через E.

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, то есть разложение функции F в ряд Тейлора будем записывать в виде

$$F(z) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \dots$$

Поскольку класс E инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w, то можно ограничиться изучением тех функций, для которых $F(0) > 1$. Далее, можно положить $\{F\}_0 \coloneqq e^t$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через E_t. Ясно также, что каждую функцию класса E_t можно представить в виде

$$F(z) = e^{t\cdot h(z)}, \qquad h(z) \in C, \tag{1}$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$. Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C и E_t.

2. Дифференциальное уравнение

Продифференцировав (1) имеем:

$$F'(z) = t \cdot h'(z) \cdot F(z). \tag{2}$$

Подставляя в равенство (2) тейлоровские разложения функций F и h получаем, что

$$\{F\}_0 \coloneqq e^t, \qquad \{F\}_n = \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{h\}_k\{F\}_{n-k}. \tag{3}$$

3. Точные оценки коэффициентов на классах E_t, $t > 0$

Получим оценки всех тейлоровских коэффициентов функций класса E_t. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $t > 0$, тогда для любой функции $F \in E_t$ имеют место точные неравенства*

$$|\{F\}_n| \leqslant \frac{2t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{F^*\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Равенства имеют место только для вращений функции $F^*(z) \coloneqq e^{t\cdot h^*(z)}$ в плоскости переменной z, где

$$h^*(z) \coloneqq \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k.$$

Доказательство. По индукции.

Покажем сначала, что $\{F^*\}_m > 0$, $m \geqslant 0$. Действительно, из формулы (3) следует, что $\{F^*\}_1 = 2t\{F^*\}_0 > 0$, так как $\{F^*\}_0 > 0$. Предположим, что $\{F^*\}_k > 0$ при $k = 0, \ldots, n$, тогда очевидно, что

$$\{F^*\}_{n+1} = \frac{2t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\{F^*\}_{n+1-k} > 0.$$

Покажем теперь, что $|\{F\}_m| \leqslant \{F^*\}_m$, $m \geqslant 0$, и равенства достигаются только на вращениях функции $F^*(z)$ в плоскости переменной z. Напомним [4], что только вращения функция h^* в плоскости переменной z являются экстремальными в проблеме коэффициентов для класса C.

Согласно формуле (3)

$$|\{F\}_1| = t|\{h\}_1|\{F\}_0 \leqslant 2t\{F\}_0 = 2te^t,$$

причём равенство тут достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z. Предположим, что точные оценки (4) справедливы для $|\{F\}_k|$ при $k = 0, \ldots, n$, и равенство достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z, тогда очевидно, что

$$|\{F\}_{n+1}| \leqslant \frac{t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k|\{h\}_k||\{F\}_{n+1-k}| \leqslant \frac{t}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\{h^*\}_k\{F^*\}_{n+1-k} = \{F^*\}_{n+1},$$

причём равенство здесь достигается только на вращениях функции F^* в плоскости переменной z. ∎

4. Формулировка гипотезы Кшижа

Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f, таких, что

$$f(z) = \frac{1}{F(z)}, \qquad F \in E, \tag{5}$$

обозначим через B. Формула (5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами B и E.

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [2, 3], что если $f \in B$, то для её тейлоровских коэффициентов $\{f\}_n$ справедливы неравенства

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается на функциях вида $e^{i\psi} f^*(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$f^*(z,t) \coloneqq e^{-t\,h^*(z)}, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{6}$$

Задачу об оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана только для первых шести тейлоровских коэффициентов [11]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное семейство функций.

Фиксируем $t > 0$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f, таких, что $f(z) = 1/F(z)$, $F \in E_t$, обозначим через B_t. Сравните с формулой (5).

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы проанализировать возможность применения формулы, аналогичной формуле (3) на классах B_t.

6. Подчинённые функции

Коснёмся представлений вида (1). Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ. Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [5], однако термин был введён Д. И. Литльвудом [6] и В. Рогозинским [4], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [7, 8, 12, 9, 10]).

В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z,t)$.

Теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчинённых функции $F(z)$.

7. Модели классов B_t при больших t

Будем считать t большим при $t > 2$, иначе считаем t малым.

В классах B_t проблема оценки модулей коэффициентов существенно сложнее, чем в классах E_t. Подтверждению сказанного служит хотя бы тот факт, что за пол века ни одна попытка её полного решения не увенчалась успехом.

Формулу (3) можно записать для класса B_t, $t > 0$ следующим образом:

$$\{f\}_0 := e^t, \qquad \{f\}_n = -\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} k\{h\}_k\{f\}_{n-k}. \tag{7}$$

Видимо впервые дифференциальное уравнение аналогичное (2), появилось в статье [1], где в частности получены точные оценки $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ на классах B_t, $t > 0$. Формула (7) позволяет решить проблему Кшижа если $\{h\}_k = 0$ или $\{f\}_k = 0$ при некоторых k. В работе [13] с помощью формулы (7) обобщены некоторые частные случаи, описанные в более ранних работах. Соответствующие ссылки см. в [13].

Формула (7) не применима на классах B_t для получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов даже при малых и больших t. Например, при больших t если $\{h^*\}_k$ положительны, то $\{f^*\}_k$ — знакопеременные и ноаборот.

С другой стороны, так как в классах E_t эта проблема решена, то можно попробовать решить её в подклассах класса E_t, состоящих из функций, ограниченных сверху по модулю. Дело в том, что с точностью до мультипликативной константы каждый ограниченный подкласс класса E_{t_1} является подклассом некоторого класса B_{t_2}.

Например, если $M > 1$ и голоморфная функция F отображает круг Δ в кольцо $K_{1,M} := \{z \,:\, 1 < |z| < M\}$, а ноль в e^{t_1}, то

$$f(z) = F(z)/M \in B_{t_2}, \qquad t_2 := \ln M - t_1.$$

Мы воспользуемся формулой (3) и получим оценки коэффициентов, подобные оценкам (4). К сожалению, этот метод работает в ограниченных подклассах класса E_t не так хорошо как в E_t. Метод оценки коэффициентов, основанный на применении формулы (3) требует, чтобы на экстремальных функциях все слагаемые в сумме (3) имели один и тот же знак. Рассмотрим примеры.

7.1. Пример 1

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$h^*_{(n)}(z) := -i\frac{n+1}{\pi}\ln(i\,g^*(z)), \quad g^*(z) := \frac{1+\omega^*(z)}{1-\omega^*(z)},$$
$$\omega^*(z) := i\frac{z+z_0}{1+z_0 z}, \qquad z_0 := i\frac{i-e^{\frac{\pi}{n+1}i}}{i+e^{\frac{\pi}{n+1}i}}.$$

Функция $h^*_{(n)}$ отображает круг Δ на полосу $\Pi_{(n)} := \{w \,:\, 0 < \operatorname{Re} w < n+1\}$, причём 0 переходит в 1.

Все тейлоровские коэффициенты функции $h^*_{(n)}(z)$ действительные. Поскольку $\Pi_{(n)} \to \Pi$, при $n \to \infty$, где $\Pi := \{w \,:\, 0 < \operatorname{Re} w\}$, то последовательность

$h^*_{(n)}$ сходится к h^* локально равномерно. Следовательно, сходятся и тейлоровские коэффициенты (чем меньше номер коэффициента тем быстрее сходимость). Это означает, что для каждого номера n существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что все коэффициенты $\{h^*_{(n)}\}_k > 0$, $k \in \{1, \ldots, N\}$. Эксперимент говорит, что $n = N$.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1 видим, что из формулы (3) следует, что как минимум N коэффициентов функции

$$F^*_{(n)}(z) \coloneqq e^{t\, h^*_{(n)}(z)}$$

положительны.

Класс $E_{n,t}$ определим как множество функций, подчинённых функции $F^*_{(n)}(z)$.

Если $h \in C$, то $|\{h\}_k| \leqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ [4]. Стало быть справедливы следующие оценки первых N тейлоровских коэффициентов функций $f \in E_{n,t}$

$$\{f\}_0 \coloneqq e^t, \qquad |\{f\}_n| < 2t \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \{F^*_{(n)}\}_{n-k}, \quad n \leqslant N. \tag{8}$$

У дальнейших коэффициентов уже нет такой согласованности в знаках членов сумм (3), поэтому мы не можем утверждать, что оценки вида (8) верны.

Итак, можно сделать следующие выводы. Классы $E_{n,t'}$, $t' > 0$ могут служить моделями классов B_t, $t = n \cdot t'$, то есть для достаточно больших t. В классе E_t с ростом n растёт и супремум $|\{f\}_n|$. В ограниченных подклассах класса E_t найдётся $N \in \mathbb{N}$ такой, что супремум $|\{f\}_n|$ возрастает с ростом n лишь при $n \leqslant N$. Скорее всего $\sup\limits_{\substack{f \in E_{n,t},\\ n \in \mathbb{N}}} |\{f\}_n| \leqslant \sup\limits_{f \in E_{n,t}} |\{f\}_N|$.

7.2. Пример 2

Если взять

$$h^*_a \coloneqq \frac{1+z}{1-az} = 1 + (1+a) \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} z^k, \qquad 0 < a < 1,$$

то $\{h^*_a\}_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассуждая по аналогии с примером 1 видим, что последовательность h^*_a сходится при $a \to 1$ к h^* локально равномерно. Стало быть, сходятся также и тейлоровские коэффициенты.

Из формулы (3) следует, что все коэффициентов функции

$$F^*_a(z) \coloneqq e^{t\, h^*_a(z)}$$

положительны. Класс $E_{a,t}$ определим как множество функций, подчинённых функции $F^*_a(z)$.

Поведение супремумов коэффициентов функций f из класса $E_{a,t}$ не сильно отличается от поведения коэффициентов функций из примера 1. То есть существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что супремум $|\{f\}_n|$ возрастает с ростом n лишь при $n \leqslant N$.

Класс функций, подчинённых функции F^*_a, при a близких к 1 также может служить моделью классов B_t при больших t. Скорее всего $\sup\limits_{\substack{f \in E_{a,t},\\ n \in \mathbb{N}}} |\{f\}_n| \leqslant \sup\limits_{f \in E_{a,t}} |\{f\}_N|$.

Список литературы

[1] Гальперин И. М. Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций. // УМН. 1965. Т. 20. Вып. 1(121). Стр. 197–202.

[2] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[3] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[4] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[5] Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.

[6] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

[7] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[8] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.

[9] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.

[10] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.

[11] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112619

[12] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[13] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.