

**СЕЛЮГИН Сергей Васильевич**

**АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИН И ПАНЕЛЕЙ ИЗ  
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

***ВСЕМ СВОИМ САМЫМ БЛИЗКИМ ПОСВЯЩАЮ***

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В этой книге представлены результаты моих исследований по композиционным материалам и конструкциям, проводившихся начиная с 2005 года. Выражаю признательность коллегам за многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению материала.

Селюгин С.В.

Москва, 2022 г.

# **Оглавление**

## **Введение**

## **Основные условные обозначения**

## **Глава 1. Векторы, матрицы и тензоры**

- 1.1.Предварительные замечания
- 1.2.Евклидово пространство с декартовой системой координат
- 1.3.Векторы и матрицы
- 1.4.Тензоры

## **Глава 2. Основные сведения о композиционных материалах**

- 2.1. Предварительные замечания
- 2.2. Основные допущения
- 2.3. Упругие свойства пластины
- 2.4. Прочность пластины
  - 2.4.1. Критерий разрушения наиболее нагруженного слоя
  - 2.4.2. Критерии максимального напряжения и максимальной деформации
  - 2.4.3. Критерии Цая-Хилла, Цая-Ву и другие, им подобные
  - 2.4.4. Критерии для болтовых соединений пластин с другими элементами
  - 2.4.5. Местная потеря устойчивости
- 2.5. Уравнения равновесия
- 2.6. Потеря устойчивости пластины

## **Глава 3. О задачах оптимизации конструкций**

- 3.1. Виды задач оптимизации конструкций
- 3.2. Задачи конечномерной оптимизации
- 3.3. Задачи бесконечномерной оптимизации

## **Глава 4. Основные принятые предположения**

## **Глава 5. Потеря устойчивости пластин и выбор наилучшей укладки**

5.1. Теоретические основы

5.2. Оценка влияния учёта изгибной анизотропии на критическое значение устойчивости

5.3. Теорема взаимности

5.4. Пластина при комбинированном нагружении

5.5. Использование метода Галёркина

5.6. Выбор наилучшей укладки слоёв (одно нагружение)

5.6.1. Вывод условий оптимальности

5.6.2. Соотношения для параметров ламинирования оптимальной укладки

5.6.3. Особые (ортотропные) решения условий оптимальности

5.6.4. Некоторые свойства оптимальных решений

5.7. Выбор наилучшей укладки слоёв при двух альтернативных нагрузлениях

5.8. Примеры, иллюстрирующие выбор наилучшей укладки

5.8.1. Одно сдвиговое нагружение длинной пластины

5.8.2. Два противоположно направленных сдвиговых

нагружения длинной пластины

5.8.3. Квадратная пластина при сжатии

5.8.4. Квадратная пластина при двустороннем сжатии

5.8.5. Квадратная пластина, нагруженная сдвигом

5.8.6. Случай четырёх возможных углов оптимальной ориентации волокон слоёв в некоторой точке пластины

Упражнения

## **Глава 6. Умеренные закритические прогибы и выбор наилучшей укладки**

6.1. Деформирование пластины в соответствии с приближением фон Кармана

- 6.2. Кинематический вариационный принцип
- 6.3. Статический вариационный принцип (теорема о дополнительной энергии)
- 6.4. Условия оптимальности для укладки
- 6.5. Параметры ламинации для оптимальной укладки
- 6.6. Особые (ортотропные) решения условий оптимальности
- 6.7. Примеры
  - 6.7.1. Предварительные замечания
  - 6.7.2. Численный подход к анализу потери устойчивости и закритического поведения
  - 6.7.3. Длинная пластина, нагруженная сдвигом в одном направлении
  - 6.7.4. Пластины при нагружении сдвигом в двух противоположных направлениях
  - 6.7.5. Обсуждение результатов для пластин с прямолинейными волокнами
  - 6.7.6. Квадратная пластина, нагруженная сжатием или сдвигом

## Упражнения

- ### Глава 7. Большие закритические прогибы и выбор наилучшей укладки
- 7.1. Кинематика деформирования
  - 7.2. Вывод уравнений равновесия из принципа виртуальных перемещений
  - 7.3. Кинематический вариационный принцип
    - 7.3.1. Обобщённые соотношения напряжение-деформация
    - 7.3.2. Потенциальная энергия деформации и её вариация
    - 7.3.3. Потенциал внешних сил
    - 7.3.4. Кинематический вариационный принцип

- 7.4. Условия совместности деформаций
- 7.5. О возможности анализа прощёлкивания
- 7.6. Условия оптимальности углов ориентации слоёв укладки
  - 7.6.1. Предварительные замечания
  - 7.6.2. Условия оптимальности
  - 7.6.3. Некоторые особые решения условий оптимальности

## **Список литературы**

## **Приложение**

## **Введение**

Композиционные материалы в XXI веке широко применяются в несущих конструкциях различных промышленных изделий, давая выигрыш в весе порядка 20% по сравнению с металлической конструкцией. Это и самолеты (до 50% состава конструкции), и морские суда и конструкции, и строительные конструкции, и многое другое.

Монографическая литература и учебники по композиционным материалам и конструкциям в значительных количествах выпускалась в СССР до начала 90-х годов прошлого века, описывая понимание предмета на тот период. Список книг того периода включает в себя следующие издания: Лехницкий 1947 и 1977, Елпатьевский и Васильев 1972, Образцов, Васильев и Бунаков 1977, Малмейстер, Тамуж и Тетерс 1980, Болотин и Новичков 1980, Алфутов, Зиновьев и Попов 1984, Победря 1984, Васильев 1988, Нарусберг и Тетерс 1988, Баничук, Кобелев и Рикардс 1988.

В частности, рассматривались только ортотропные конструкции с прямолинейной укладкой слоёв и не учитывалось возможное закритическое поведение конструкции. Отдельные монографии, появившиеся в России после распада СССР (Вильдеман, Соколкин и Ташкинов 1997, Андреев и Немировский 2001, Белозеров и Киреев 2003, Матвеев и Пустовой 2005, Зиновьев и Смердов 2006, Митрофанов 2012, Гришин, Дзюба и Дударьков 2013, Дудченко 2014, Полилов 2016, Голован и др. 2022), продолжали методологическую линию предыдущих изданий, указанных выше (отметим, как наиболее современные в некоторых аспектах учебник НГТУ 2015 года авторов Максименко, Олегина и Пустового, ориентированный в основном на вопросы механики разрушения при упругом деформировании ортотропных конструкций с прямолинейноложенными слоями; и учебники МАИ Митрофанова 2020, а также Митрофанова и Кайкова 2017, где рассматриваются ограничения по потере устойчивости, по прочности и

ресурсу для закритических деформаций ортотропных конструкций с прямолинейно уложенными слоями). Иностранная же (англоязычная) литература и учебники, широко выпускаемые в последние 30 лет, покрывают все новые разделы предмета и все новые методические подходы, в частности, учёт анизотропной и криволинейной укладки слоёв (называемой Steered Fibre или Variable Angle Tow) и закритического деформирования, которое необходимо рассматривать при анализе нагружения уровня выше эксплуатационных нагрузок.

В связи со сказанным выше, имеется необходимость создания отечественного, соответствующего сегодняшнему дню, издания, которое могло бы быть как учебным пособием для студентов-старшекурсников, так и могло бы использоваться также аспирантами, специалистами-инженерами и научными работниками. Эта задаче и посвящена настоящая книга, использующая результаты автора за период 2005-2022 гг. (см. Список литературы и материалы автора на ResearchGate.net). Данная книга описывает современную методологию, применимую при статическом анализе и прочностном проектировании композиционных пластин и панелей (как в условиях ограничений по потере устойчивости, так и при закритическом деформировании). Вопросы безопасной повреждаемости и выносливости при этом не рассматриваются, так как, по нашему мнению, эти вопросы являются отдельно стоящим большим разделом авиационной науки о прочности конструкций из композиционных материалов и требуют специального рассмотрения.

Зарубежные работы в области прочности и проектирования конструкций из композиционных материалов представлены в литературе достаточно обширно, см. Ashton and Whitney 1970, Gibson 1994, Turvey and Marshall 1995, Kollar and Springer 2003, Reddy 2004, Falzon and Aliabadi 2008, Kassapoglou 2010, Jones 2018, а также некоторые обзорные статьи в англоязычных журналах (видимо, одна из последних Wu et al 2018).

Как известно, рассмотрение устойчивости и закритического деформирования пластин применимо для анализа стенок лонжеронов и нервюр между соседними ребрами жесткости, а также панелей несущих поверхностей (крыла или оперения) между соседними стрингерами и нервюрами.

Ряд разделов данной книги посвящены выбору наилучшей укладки слоёв (как с прямолинейными, так и с криволинейными волокнами) для оптимизации работы анизотропной конструкции. Подход с криволинейными волокнами слоёв начинает применяться в силовых протяжённых конструкциях типа крыла или панели, приводя к дополнительному выигрышу веса конструкции до 20% (по сравнению с прямолинейной укладкой).

Предполагаемое знание математики читателем соответствует программе технического университета (за исключением деталей разделов с оптимизацией укладки, которые могут быть пропущены студентами-старшекурсниками без ущерба для понимания основного содержания).

## **Основные условные обозначения**

X, Y, Z - декартова система координат

$x, y, z$  - координаты в этой системе

$u, v, w$  либо  $u_i, i=1, \dots, 3$  - соответствующие  $x, y, z$  перемещения в этой системе

$u_{i,j}$  - производная перемещения  $i$  по координате  $j$

$\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора деформаций Грина

$e_{ij}$  - компоненты инфинитезимального тензора деформаций

$\sigma_{ij}^p$  - первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа

$\sigma_{ij}$  - второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа

$h$  – толщина пластины

$h_{ply}$  – толщина слоя

$\pi_{plate}$  – удельная потенциальная энергия деформации

$\pi_{ply}$  – удельная потенциальная энергия деформации слоя

$\Pi$  – общая потенциальная энергия деформации

$U$  – общая энергия пластины

$W$  – потенциал внешних сил

$\pi_c$  – удельная дополнительная энергия

$\pi_{c\_ply}$  – удельная дополнительная энергия слоя

$\Pi_c$  – общая дополнительная энергия

$\delta$  – знак вариации

$k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}$  – кривизны поверхности по  $xx, yy, xy$ , соответственно

$K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}$  – обобщенные кривизны поверхности по  $xx, yy, xy$ , соответственно

$\vec{n}$  - обозначение вектора, состоящего из компонент  $n_i$

$\bar{Q}_{ij}$  - матрица жесткости слоя

$U_1, \dots, U_4$  - четыре упругих константы слоя

$A, D$  - матрицы жесткости пластины

$N_x, N_y, N_{xy}$  - погонные силы

$M_x, M_y, M_{xy}$  - погонные моменты

МКЭ – метод конечных элементов

КЗН - коэффициент закритической нагрузки

## **Глава 1. Векторы, матрицы и тензоры**

### **1.1. Предварительные замечания**

В данной Главе будут приведены сведения из курса линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые для понимания предмета этой книги. Также будут описаны нужные выборочные сведения из тензорного анализа. Эта Глава может быть пропущена читателем, владеющим курсом высшей математики на уровне технического университета.

### **1.2. Евклидово пространство с декартовой системой координат**

Подходы, описываемые в этой книге, имеют дело с разнообразными числовыми величинами, описывающими поведение конструкции. Все рассматриваемые нами величины являются вещественными, то есть, имеющими значения, которые, в принципе, можно измерить тем или иным образом.

Числовые величины могут иметь числовое значение сами по себе, отдельно от других, и тогда они называются скалярными величинами.

Если же числовые величины используются как некоторый набор из них постоянного состава (например, три координаты какой-то точки физического пространства), то такие наборы величин называются векторными величинами.

Привычное нам физическое пространство, в котором мы находимся, с точки зрения математики, это - так называемое евклидово пространство трёх измерений. Прямоугольная система координат (с одинаковыми масштабами по осям координат), введённая в этом пространстве, называется декартовой системой координат. В данной книге мы будем использовать только такую систему координат, введённую в трёхмерном физическом пространстве. Это

предположение существенно упрощает используемый математический аппарат.

Точка в этом пространстве имеет три значения координат по каждой из осей координат.

Запись вида  $H_x$  означает  $\frac{\partial H}{\partial x}$  для любой величины  $H$ .

### 1.3. Векторы и матрицы

Вектором называется направленный отрезок, имеющий начало, конец, направление и длину. Обозначается вектор, например, так:  $\vec{n}$ . Вектор-столбец – это три значения, равные разности соответствующих координат точек конца и начала направленного отрезка. Эти разности называются координатами вектора.

Матрицей 3x3, обозначаемой, например,  $B$ , называется набор из девяти чисел  $b_{ij}$ , где  $i, j$  принимают целочисленные значения от единицы до трёх. Запись матрицы:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Матрица называется диагональной, если все элементы, кроме  $b_{ii}$ , равны нулю. Матрица называется симметричной, если элементы  $b_{ij}$  и  $b_{ji}$  равны между собой.

Транспонированная матрица – это матрица (обозначаемая  $B^T$ ), зеркально отражённая относительно главной диагонали (линии от  $b_{11}$  до  $b_{33}$ ).

Собственные числа матрицы 3x3 определяются как три корня  $\lambda$  уравнения:

$$\det(B - \lambda E) = 0 \quad (1.2)$$

(где Е – единичная матрица). Если матрица симметрична, то все её корни – вещественны.

Собственные векторы матрицы получаются из соотношений:

$$B\vec{n} = \lambda\vec{n} \quad (1.3)$$

Линейное преобразование векторов при линейном преобразовании координат даётся формулой:

$$\vec{n}' = C\vec{n} \quad (1.4)$$

Квадратичной формой с матрицей  $B$  и вектором  $\vec{n}$ , называется форма

$$\vec{n}^T B \vec{n} \quad (1.5)$$

Матрица, квадратичные формы от которой положительны для любых векторов  $\vec{n}$ , называется положительно определённой. Все собственные числа такой матрицы – положительны. В базисе из собственных векторов такие квадратичные формы – диагональны, а на диагонали стоят собственные числа.

Напомним также кратко содержание теоремы Гаусса, говорящей, что интеграл по объему от дивергенции некоторого вектора равен потоку этого вектора через граничную поверхность этого объема.

## 1.4. Тензоры

Тензором называется математический объект, заданный в векторном пространстве размерности  $n$ , имеющий так называемый ранг и обладающий некоторыми свойствами. Так, скаляр – это тензор 0 ранга, вектор – это тензор 1 ранга. В данной книге максимальный ранг тензоров равен двум. Размерность пространства, как правило, равна двум (в задачах для пластин). Индексы тензора меняются от единицы до числа, равного размерности пространства. Число индексов тензора равно рангу тензора.

В двумерном пространстве тензор второго ранга (например, тензоры деформаций в плоскости) записывается

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

В трёхмерном пространстве тензор второго ранга (например, тензоры деформаций в пространстве) записывается

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{xzy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

В каждой системе координат каждому тензору соответствует некоторая матрица его компонент. В осях главных направлений (собственных векторов этих матриц) тензора его компоненты – это главные значения (собственные числа этих матриц) тензора.

По повторяющимся цифровым индексам – суммируется, то есть запись вида  $a_i b_i$  означает  $\sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

## **Глава 2. Основные сведения о композиционных материалах**

### **2.1. Предварительные замечания**

Данная Глава описывает основные закономерности композиционных материалов, их жёсткостные и прочностные характеристики (см. Васильев 1988, Gibson 1994). Также изложены основы теории пластин. Как известно, пластины являются частью силовых панелей и ограничены по периметру другими силовыми элементами типа рёбер, балок и т.д. Так, отсеки лонжеронов и нервюр между рёбрами жёсткости могут рассматриваться (в консервативном приближении) как пластины. Пластины также являются частью крыльевых поверхностей.

Читатель, знакомый с этим материалом, может пропустить данную Главу.

### **2.2. Основные допущения**

Композитные пластины, в соответствии с (Васильев 1988, Gibson 1994), составлены из некоторого числа слоёв, состоящих из волокон (обычно это углеволокно или другие волокна с высокими жесткостными характеристиками) и заполнителя типа, например, эпоксидной смолы. Волокна слоёв в каждой точке ориентированы вдоль некоторого направления, зависящего от слоя и от координат точки. Слои уложены симметрично относительно срединной плоскости (общее их число  $2K$ ). Пластины считаются тонкими, то есть, их толщина  $h$  много меньше любого линейного размера. Принята гипотеза прямых нормалей Кирхгоффа, означающая равенство нулю  $xz$ ,  $yz$ ,  $zz$  компонент тензора деформаций (иногда называемого тензором деформаций Грина).

## 2.3. Упругие свойства пластины

Принято следующее соглашение о знаке угла ориентации слоя (Рис. 2.1):

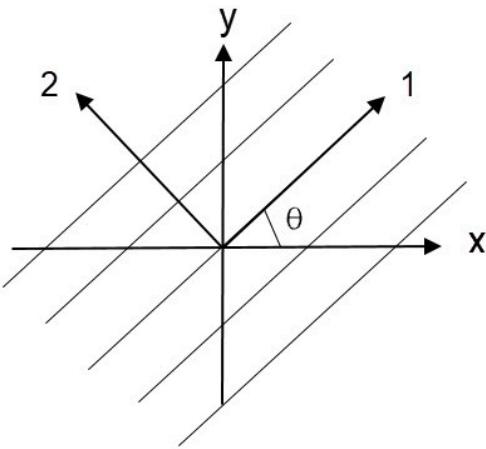


Рис. 2.1. Соглашение о знаке угла ориентации слоя.

Напряжения и деформации слоя в осях 1-2 слоя связаны соотношением

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

где  $Q_{ij}$  - компоненты матрицы жёсткости слоя

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$  - соответственно модули Юнга для направлений 1 и 2, модуль сдвига, два коэффициента Пуассона.

Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  в осях XY связаны соотношением

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

где  $\bar{Q}_{ij}$  - компоненты преобразованной матрицы жёсткости слоя

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Известно, что имеется четыре упругих константы слоя  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , такие, что

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{66} &= \frac{1}{2} (U_1 - U_4) - U_3 \cos 4\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эти константы легко выражаются через упругие характеристики слоя, используя соотношения (2.2) и (2.4).

Для слоистой пластины вводятся силовые характеристики  $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$  (это погонные усилия и моменты, приложенные к пластине). Например,

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k dz \right\} \quad (2.6)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k z dz \right\} \quad (2.7)$$

( $z$  – это координата поперёк пластины). Используются также кривизны срединной поверхности

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$

Вводятся следующие матрицы жёсткости пластины

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{Q}_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^K (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.9)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{Q}_{ij})_k z^2 dz = \sum_{k=1}^K (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.10)$$

В матричной форме основные жесткостные соотношения записываются

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ 2\hat{\varepsilon}_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

где «крышка» означает величину в срединной плоскости. Матрицы  $A$ ,  $D$  отвечают за плоское деформирование и изгиб пластины, соответственно.

## 2.4. Прочность пластин с подкрепляющими элементами

### 2.4.1. Критерий разрушения наиболее нагруженного слоя

Статический анализ пластин позволяет выявить наиболее нагруженный слой. Нагрузки, приводящие к разрушению наиболее нагруженного слоя, необязательно являются нагрузкам разрушения всей пластины, так как в пластине имеются слои с различными ориентациями, по-разному сопротивляющиеся при начавшемся первичном разрушении. Должно быть накоплено разрушение нескольких слоёв, для того, чтобы разрушилась вся пластина. Таким образом, критерий разрушения наиболее нагруженного слоя является, возможно, достаточно консервативным. Тем не менее, этот критерий широко употребляется на практике. Описанные ниже критерии прочности используют критерий разрушения наиболее нагруженного слоя.

## 2.4.2. Критерии максимального напряжения и максимальной деформации

Слои предполагаются ортотропными. Пусть  $\sigma_L^{(+)}$ ,  $\sigma_L^{(-)}$  – соответственно максимально допускаемые напряжения растяжения и сжатия вдоль волокон слоя,  $\sigma_T^{(+)}$  и  $\sigma_T^{(-)}$  - соответственно максимально допускаемые напряжения растяжения и сжатия поперек волокон слоя,  $\tau_{LT}$  - максимальные напряжения сдвига.

Тогда критерий разрушения для максимальных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  в осях материала запишется в виде (индексы  $L, T$  означают направление вдоль и поперек волокон, соответственно):

$$-\sigma_L^{(-)} < \sigma_1 < \sigma_L^{(+)} \quad (2.12)$$

$$-\sigma_T^{(-)} < \sigma_2 < \sigma_T^{(+)} \quad (2.13)$$

$$|\tau_{12}| < \tau_{LT} \quad (2.14)$$

Критерий максимальной деформации обычно используется в виде ограничения сверху на величину максимальной сжимающей деформации (с учётом знака).

## 2.4.3. Критерии Цая-Хилла, Цая-Ву и другие, им подобные

Критерий Цая-Хилла для наиболее нагруженного слоя записывается в виде:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{ax}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\sigma_{ax}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ay}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_a^2} = 1 \quad (2.15)$$

где  $\sigma_{ax}, \sigma_{ay}, \tau_a$  - пределы прочности при растяжении (сжатии) по осям ортотропии слоя ( $x, y$ ) и предел прочности при сдвиге.

Критерий Цая-Ву для наиболее нагруженного слоя записывается в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{ax-tens}\sigma_{ax-comp}} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ay-tens}\sigma_{ay-comp}} \\
& - \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{\sigma_{ax-tens}\sigma_{ax-comp}\sigma_{ay-tens}\sigma_{ay-comp}}} \\
& + \left( \frac{1}{\sigma_{ax-tens}} - \frac{1}{\sigma_{ax-comp}} \right) \sigma_x + \left( \frac{1}{\sigma_{ay-tens}} - \frac{1}{\sigma_{ay-comp}} \right) \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_a^2} = 1
\end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\sigma_{ax-tens}, \sigma_{ax-comp}, \sigma_{ay-tens}, \sigma_{ay-comp}$  - соответствующие допускаемые напряжения растяжения (tens) и сжатия (comp).

Есть ещё несколько подобных критериев, использующих, как и предыдущие, известный подход фон Мизеса.

Указанные выше критерии широко использовались в большом числе работ (перечисленных, например, в книге Дудченко, 2014) при выборе укладки слоёв композиционного пакета по условиям прочности. Была установлена важная роль главных напряжений и их направлений для выбора ориентации волокон и оптимальной укладки слоёв.

#### **2.4.4. Критерии для болтовых соединений пластин с другими элементами**

Смятие под болтами (bearing) необходимо учитывать в местах соединения пластины с соседними элементами. Наибольшее допускаемое усилие рассчитывается с помощью предварительно полученных экспериментальных кривых.

Продёргивание головок болтов (pull-through), соединяющих пластины с соседними элементами, также недопустимо и рассчитывается с помощью экспериментальных кривых. Эмпирическое правило (Kassapoglou 2010) гласит, что потайная головка не должна доходить глубже в соединяемом элементе, чем 2/3 толщины этого элемента.

#### 2.4.5. Местная потеря устойчивости

Местную потерю устойчивости (англ. crippling) между заклёпками необходимо учитывать при анализе несущей способности как пластины, так и прилегающего фланца стрингера/лонжерона/нервюры. Также возможна местная потеря устойчивости для свободных фланцев указанных силовых элементов. Анализ местной потери устойчивости и её влияния на несущую способность конструкции ведётся, как правило, с помощью МКЭ либо экспериментальных кривых (см. Kassapoglou 2010). В последней книге рекомендованы следующие формулы для напряжения местной потери устойчивости  $\sigma_{crip}$ :

- для свободного фланца  $\frac{\sigma_{crip}}{\sigma_c^u} = \frac{1.63}{\left(\frac{b}{t}\right)^{0.717}}$  при  $b \geq 1.98t$ , а при  $b < 1.98t$   $\sigma_{crip} = \sigma_c^u$ , где  $b, t, \sigma_c^u$  - соответственно толщина и ширина фланца и предельная прочность фланца на сжатие;
- фланец без свободного края  $\frac{\sigma_{crip}}{\sigma_c^u} = \frac{11.0}{\left(\frac{b}{t}\right)^{1.124}}$  при  $b \geq 8.443t$ , а при  $b < 8.443t$   $\sigma_{crip} = \sigma_c^u$

Для максимального шага заклёпок  $s_{max}$  без местной потери устойчивости между ними рекомендована формула  $s_{max} = \sqrt{\frac{c\pi^2 D_{11}}{1.63\sigma_c^u} \left(\frac{b}{t}\right)^{0.717}}$ , где  $c = 1$  для заклёпки с утопленной головкой,  $c = 3$  для заклёпки с выступающей головкой,  $D_{11}$  - элемент 11 (вдоль фланца) матрицы изгибной жёсткости фланца.

#### 2.5. Уравнения равновесия пластины

Уравнения равновесия пластины иллюстрируются Рисунком 2.2

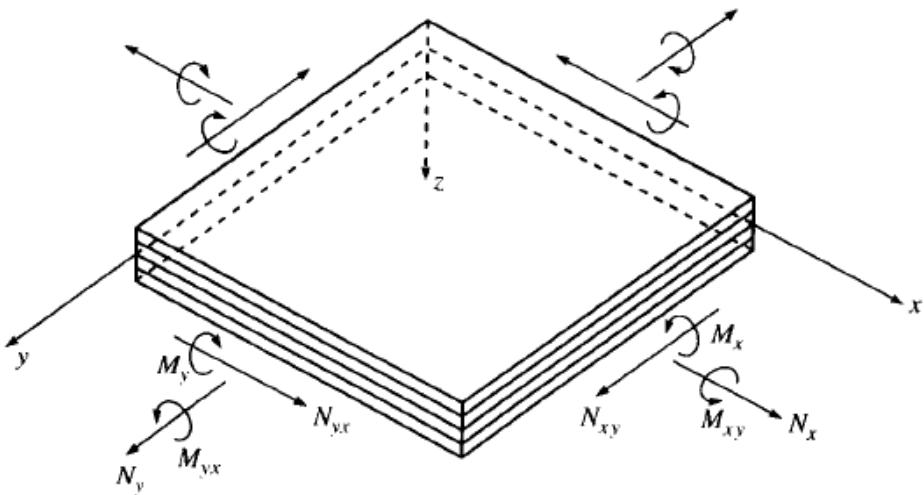


Рис. 2.2. Нагружение элемента пластины.

и записываются в виде ( $q(x,y)$  – нагрузка на поверхность пластины)

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (2.17)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (2.18)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + q(x,y) = 0 \quad (2.19)$$

Последнее уравнение применимо при очень малых прогибах и должно быть дополнено для случаев больших прогибов.

К этим уравнениям надо добавить уравнения упругих связей сил и моментов с деформациями срединной плоскости и её кривизнами (2.11).

## 2.6. Потеря устойчивости пластины

При рассмотрении устойчивости панели принимается (этот подход является консервативным), что устойчивость панели моделируется устойчивостью пластины с размерами и краевыми условиями, определяемыми способом крепления пластины к подкрепляющим элементам. Например, крепление однорядным заклёпочным швом может считаться простым

закреплением, а крепление двухрядным швом может считаться закреплением с защемлением. Размеры моделирующей пластины при этом определяются с помощью закономерностей, вытекающих из экспериментов для элементов конструкции. Отметим, что указанные выше краевые условия и подходы будут в дальнейшем изложении применяться и для закритического поведения конструкции.

Уравнение для определения потери устойчивости выводится с учётом подхода фон Кармана (появляются дополнительные члены в (2.19)) и записывается, с учётом (2.11) и необходимых краевых условий на  $C_1$  и  $C_2$ , в виде:

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + q(x,y) + q(x,y) + (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y})_{,y} = 0 \quad (2.20)$$

Приведём решение (Libove 1983) о критической нагрузке для сжатой ортотропной пластины длиной  $a$  и шириной  $b$  с прямолинейной укладкой слоёв (сжатие приложено на сторонах  $b$ ). Прогиб отыскивается в форме:

$$w(x,y) = w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.21)$$

Критическая нагрузка будет зависеть от числа полуволн по каждой оси координат  $m, n$ :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{a^2 m^2} \left[ D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( mn \frac{a}{b} \right)^2 + D_{22} \left( n \frac{a}{b} \right)^4 \right] \quad (2.22)$$

При произвольной (неортотропной) укладке слоёв критические силы нужно определять численными методами.

## **Глава 3. О задачах оптимизации конструкций**

### ***3.1. Виды задач оптимизации конструкций***

Задачи проектирования наилучшей конструкции естественным образом сводятся к задачам оптимизации конструкций. Приведем сведения, необходимые для понимания материала данной книги, следуя одному из последних учебников в этой области (Christensen and Klarbring, 2009).

В задачах оптимизации конструкций необходимо определить значения конструктивных параметров (толщин, сечений, ламинации и т.д.), максимизирующих (или минимизирующих) некоторый критерий качества / целевую функцию (или несколько критериев качества при многоцелевой оптимизации). Иногда отдельно выделяются так называемые переменные состояния, характеризующие поведение конструкции (равновесие, деформированность, напряжённость, общую или местную потерю устойчивости, запасы прочности, усталостные характеристики, аэроупругие характеристики и т.д.). Переменные состояния, вообще говоря, достаточно сложным образом зависят от конструктивных параметров. Для определения последних необходимо проведение анализа конструкции, например, с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

По количеству конструктивных параметров задачи оптимизации конструкций подразделяются на конечномерные задачи (задачи с конечным числом конструктивных параметров - переменных проектирования) и бесконечномерные задачи (или задачи с распределёнными параметрами). Пример конечномерной задачи – наилучший выбор сечений балок (постоянных по их длине) для рамы как системы нескольких балок. Пример бесконечномерной задачи – наилучший выбор параметров пластины (например, углов ориентации слоёв), меняющихся от точки к точке.

Задачи оптимизации бывают безусловные и условные. В первом случае отыскивается оптимум функции или функционала по переменным

проектирования. Во втором случае этот оптимум должен удовлетворять ещё и каким-то условиям.

### ***3.2. Задачи конечномерной оптимизации***

При безусловной конечномерной оптимизации необходимым условием оптимума первого порядка является равенство нулю градиента целевой функции. Достаточным условием оптимума в этом случае является положительная определённость матрицы вторых производных (называемой матрицей Гессе) целевой функции. Если задача конечномерной оптимизации включает в себя и некоторые условия, то следует отыскивать оптимум так называемой функции Лагранжа (иногда называемого Лагранжианом). Эта функция есть сумма целевой функции и функций условий вида  $g(x) \leq 0$  (где  $x$  – вектор переменных проектирования), домноженных на так называемые множители Лагранжа. К условиям первого порядка для функции Лагранжа добавятся так называемые условия Куна-Таккера, имеющие ясный смысл. А именно, если какое-то условие в оптимуме выполнено как равенство, то необходимое условие оптимума первого порядка таково: градиент Лагранжиана равен нулю и произведение его неотрицательного множителя Лагранжа на соответствующее ему ограничение  $g(x)$  равно нулю.

### ***3.3. Задачи бесконечномерной оптимизации***

Случай бесконечномерной оптимизации значительно сложнее и требует привлечения аппарата вариационного исчисления (Гельфанд и Фомин, 1961). Приведём здесь сведения, минимально необходимые для понимания результатов данной книги.

Возьмём пример одномерного множества изменений переменных задачи (например, координаты  $x$  вдоль балки). Для задачи минимизации функционала  $\Phi(F)$ , являющегося интегралом от функции  $F(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx})$  по некоторому множеству  $\Sigma$  переменной  $x$ , условием оптимума функционала будет равенство нулю первой вариации (обозначаемой  $\delta\Phi$ ) этого функционала по независимым переменным проектирования  $y$ . Здесь  $\delta$  – символ вариации.

Для условий оптимума важна так называемая основная лемма вариационного исчисления, позволяющая вычислить условие оптимума в виде уравнения Эйлера, имеющие в одномерном случае вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.1)$$

Для задач условной бесконечномерной оптимизации строится, аналогично конечномерному случаю, функция Лагранжа и отыскивается её оптимум. Условия Куна-Таккера обобщаются и на бесконечномерный случай.

## Глава 4. Основные принятые предположения

В данной книге приняты следующие основные предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной  $h$ , составленная из  $2K$  симметрично уложенных локально ортотропных слоёв (обобщение на нечётное число слоёв может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Толщина всей пластины много меньше любого её линейного размера.

Рис. 1.1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ, срединную плоскость  $\Gamma$  пластины, ограниченную кусочно-гладким контуром  $C$ , нормаль и касательный вектор к этому контуру.

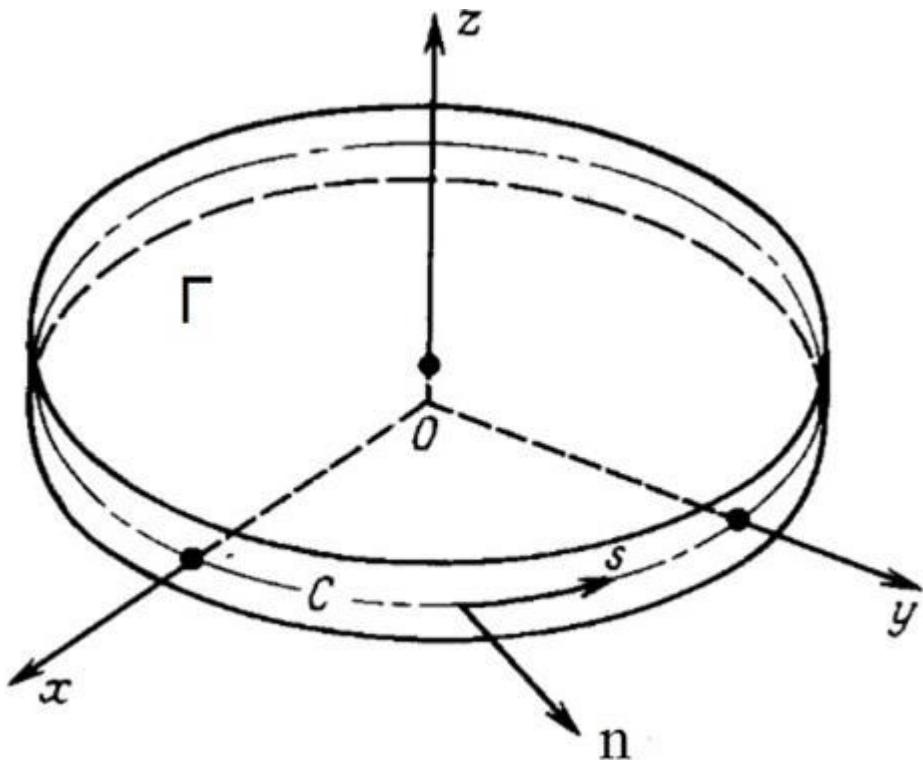


Рис. 1.1. Тонкая пластина.

Волокна слоёв композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Принята гипотеза Кирхгоффа прямых нормалей к поверхности  $\Gamma$ , означающая равенство нулю  $xz$ ,  $yz$ ,  $zz$  компонент тензора деформаций Грина.

Возможные краевые условия для пластины – защемление или простое опирание.

Первое (наименьшее) собственное значение потери устойчивости считается некратным (изолированным). Заметим, что учёт возможной кратности первого собственного значения потери устойчивости требует знания математики, выходящего за пределы её изучения в техническом университете. По последней причине возможная кратность первого собственного значения не рассматривается. Автор предполагает в дальнейшем посвятить отдельное исследование вопросу кратности первого собственного значения потери устойчивости.

Рассматриваются различные аспекты задач анализа и оптимизации выбора укладки пластин и панелей по условиям прочности и жёсткости (как при ограничениях по потере устойчивости, так и при закритическом деформировании).

## Глава 5. Потеря устойчивости пластин и выбор наилучшей укладки

### 5.1. Теоретические основы

Известно, что уравнения предельного равновесия при потере устойчивости композитной пластины могут быть получены из соответствующего кинематического вариационного принципа. Этот принцип записывается в виде (см. Васидзу 1987):

$$\delta U = \delta \Pi - \delta W = 0 \quad (5.1)$$

где полная потенциальная энергия деформации пластины

$$\begin{aligned} \Pi = \iint dS & \left( \frac{1}{2} D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

а потенциал внешних сил

$$W = -\frac{1}{2} \iint dS \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (5.3)$$

где  $D_{ij}, i = 1,2,6; j = 1,2,6$ , - есть элементы матрицы жесткости пластины D, а  $N_x, N_y, N_{xy}$  - потоки сил в плоскости пластины, действующие соответственно в направлении  $x, y$  и на сдвиг.

Этот вариационный принцип может быть записан и как стационарность отношения потенциальной энергии пластины  $\Pi$  и потенциала  $W$  некоторых равновесных внешних сил, действующих в конструкции до потери устойчивости (эти силовые факторы обозначены верхним индексом (0)). Имеем

$$\delta \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] = 0 \quad (5.4)$$

где

$$W^{(0)} = - \iint dS \left[ \frac{1}{2} N_x^{(0)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_y^{(0)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (5.5)$$

Собственное значение, соответствующее решению  $w$  рассматриваемой задачи устойчивости, может быть вычислено как отношение Рэлея:

$$\lambda = \frac{\Pi}{W^{(0)}} \quad (5.6)$$

Уравнение предельного равновесия следует из указанного вариационного принципа и записывается в виде

$$\begin{aligned} & (-D_{11}w_{,xx} - D_{12}w_{,yy} - 2D_{16}w_{,xy})_{,xx} + 2(-D_{16}w_{,xx} - D_{26}w_{,yy} - 2D_{66}w_{,xy})_{,xy} \\ & + (-D_{12}w_{,xx} - D_{22}w_{,yy} - 2D_{26}w_{,xy})_{,yy} + (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + \\ & N_y w_{,y})_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

К этому уравнению должны быть присоединены соответствующие краевые условия.

Статический вариационный принцип для безмоментного опирания пластины заключается в стационарности по  $\vec{M}, \vec{Q}$  функционала  $\Pi_c(\vec{M}, \vec{Q})$  дополнительной энергии пластины (при удовлетворении уравнения предельного равновесия)

$$\Pi_c(\vec{M}, \vec{Q}) = -\frac{1}{2} \iint dS [\vec{M}^T D^{-1} \vec{M}] - \frac{1}{2} \iint dS [\vec{Q}^T F^{-1} \vec{Q}] \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}; Q_x = -N_x \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ Q_y &= -N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} - N_y \frac{\partial w}{\partial y}; F = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Функционал  $\Pi_c(\vec{M}, \vec{Q})$  равен нулю в точке стационарности, что ведет к следующей формуле для собственного значения потери устойчивости:

$$\lambda = -\frac{\frac{1}{2} \iint dS [\vec{Q}^T F^{(0)-1} \vec{Q}]}{\frac{1}{2} \iint dS [\vec{M}^T D^{-1} \vec{M}]} \quad (5.10)$$

где

$$F^{(0)} = \begin{bmatrix} N_x^{(0)} & N_{xy}^{(0)} \\ N_{xy}^{(0)} & N_y^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Вернемся к рассмотрению уравнения предельного равновесия. Для ортотропной пластины с прямолинейными волокнами слоёв элементы 16 и 26 матрицы  $D$  равны нулю, и уравнение предельного равновесия существенно упрощается и записывается

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.12)$$

Рассмотрим случай прямоугольной ортотропной пластины размерами  $a^*b$ , сжатой в направлении  $x$  погонной силой  $N$ . Пластина считается безмоментно опертой. Воспроизведём, для наглядности, указанное ранее решение. Следуя результату теоремы Либове (Libove 1983), отыскивается решение в форме

$$w(x, y) = w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.13)$$

Нетривиальное решение для критической нагрузки  $N_{cr}$  будет, как сказано в Главе 2

$$N_{cr} = \left( \frac{\pi}{am} \right)^2 \left[ \left( D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{mna}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{na}{b} \right)^4 \right) \right] \quad (5.14)$$

Наименьшее значение для критической нагрузки имеет место при  $n=1$ . Конкретная величина этой нагрузки зависит от отношения сторон пластины.

В конце этого подраздела скажем несколько слов о так называемых параметрах ламинирования.

Матрицы  $A$ ,  $D$  пластины с симметричной укладкой слоёв могут быть представлены с помощью таких параметров  $(W_1^*, W_2^*, W_3^*, W_4^*, W_9^*, W_{10}^*, W_{11}^*, W_{12}^*)$  как (см. Gibson 1994):

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} U_1 & W_9^* & W_{10}^* \\ U_1 & -W_9^* & W_{10}^* \\ U_4 & 0 & -W_{10}^* \\ U_5 & 0 & -W_{10}^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_{11}^* & W_{12}^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_{11}^* & -W_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} U_1 & W_9^* & W_{10}^* \\ U_1 & -W_9^* & W_{10}^* \\ U_4 & 0 & -W_{10}^* \\ U_5 & 0 & -W_{10}^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_{11}^* & W_{12}^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_{11}^* & -W_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

где так называемые параметры ламинации определяются как

$$\begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4^* \end{bmatrix} = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} W_9^* \\ W_{10}^* \\ W_{11}^* \\ W_{12}^* \end{bmatrix} = \frac{24}{h^3} \int_0^{h/2} z^2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{bmatrix} dz \quad (5.16)$$

и  $\theta$  – это угол ориентации слоя (угол между направлением волокон и осью  $x$ , см. Глава 2).

Инварианты материала  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$  являются функциями упругих свойств слоя, а именно  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$  (модули Юнга вдоль и поперёк волокон, два коэффициента Пуассона и модуль сдвига, соответственно).

## 5.2. Оценка влияния учёта изгибной анизотропии на критическое значение устойчивости

Если пластина нагружена сдвиговой или сжимающей нагрузкой, то величина критической нагрузки будет, по сравнению с возможным приближенным ортотропным решением, зависеть от учета членов 16 и 26 матрицы  $D$ . Пусть  $w(x,y)$  – это форма прогиба из плоскости, соответствующая критической нагрузке  $\lambda$ , полученной с использованием ортотропной модели материала пластины. Ортотропная модель потери устойчивости при сжатии приводит к уравнению устойчивости вида

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 2N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.17)$$

Тогда, используя метод возмущений, можно подсчитать поправку на учет ненулевых членов 16 и 26 матрицы  $D$ . Как показано в работе Grenestedt 1989, такой учет влияния может приводить к снижению критической нагрузки до 20%, по сравнению с ортотропным решением, для пластины из Кевлара-эпоксидной смолы с укладкой слоёв +/- 45°.

### 5.3. Теорема взаимности

Используя результаты (Selyugin 2019a), рассмотрим далее аналог известной из теории упругости теоремы Бетти для случая двух критических нагружений. Было доказано, что работа, совершенная критическими силами в состоянии 1 на прогибах из плоскости пластины в состоянии 2, равна работе, совершенной критическими силами в состоянии 2 на прогибах из плоскости пластины в состоянии 1.

Действительно, рассмотрим два различных критических состояния. Первое из них будем помечать верхним значком ', а второе – верхним значком ". Эти два критических состояния соответствуют, вообще говоря, разным нагрузлениям.

Рассмотрим следующее выражение и проинтегрируем его по частям, учитывая краевые условия типа защемления или простого опирания:

$$\begin{aligned} \iint dS \overrightarrow{M'}^T \overrightarrow{k''} &= - \iint dS w'' \left[ \frac{\partial^2 M'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M'_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M'_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \\ &= - \iint dS w'' \left[ \frac{\partial Q'_x}{\partial x} + \frac{\partial Q'_y}{\partial y} \right] = \iint dS \overrightarrow{Q'}^T \vec{\phi}'' \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}; \quad \vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}; \quad \phi_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \vec{M} = D \vec{k}$$

С другой стороны

$$\iint dS \vec{M}'^T \vec{k}'' = \iint dS \vec{k}'^T D \vec{k}'' = \iint dS \vec{M}''^T \vec{k}' \quad (5.19)$$

Это ведет к соотношению

$$\iint dS \vec{Q}'^T \vec{\phi}'' = \iint dS \vec{Q}''^T \vec{\phi}' \quad (5.20)$$

которое и означает, что работа, совершенная критическими силами в состоянии 1 на прогибах из плоскости пластины в состоянии 2, равна работе, совершенной критическими силами в состоянии 2 на прогибах из плоскости пластины в состоянии 1. Подставляя  $\vec{Q}$  через  $\vec{\phi}$  (см. Васидзу 1987), получаем:

$$\vec{Q} + F \vec{\phi} = 0$$

$$\iint dS \vec{\phi}'^T F' \vec{\phi}'' = \iint dS \vec{\phi}''^T F'' \vec{\phi}' \quad (5.21)$$

Утверждение доказано.

Например, для прямого (прогибы  $w_{dir}$ ) и обратного (прогибы  $w_{opp}$ ) сдвигового нагружений имеет место равенство

$$\iint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial w_{dir}}{\partial x} \frac{\partial w_{opp}}{\partial y} + \frac{\partial w_{dir}}{\partial y} \frac{\partial w_{opp}}{\partial x} \right] dS = 0 \quad (5.22)$$

#### **5.4. Пластина при комбинированном нагружении**

Рассмотрим далее композитную пластину, подвергающуюся одновременно нескольким различным нагружениям в плоскости (см. Selyugin 2016). Такой случай называется комбинированным нагружением.

Консервативные аппроксимационные формулы и кривые разной степени точности, описывающие комбинированное нагружение очень длинных

ортотропных пластин, известны и приведены в (Weaver and Nemeth, 2008). Вводится параметр

$$\beta = \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$$

и предлагаются формулы взаимодействия

$$\begin{aligned} R_x + R_s^{1.9+0.1\beta} &\leq 1 \\ R_b^{\frac{13.8+\beta}{6}} + R_s^{\frac{12+\beta}{6}} &\leq 1 \\ R_x + R_b^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

где  $R_x, R_s, R_b$  - соответственно безразмерные усилия потери устойчивости при сжатии, сдвиге и изгибе в плоскости (для обезразмеривания взяты критические усилия при одиночном соответствующем нагружении).

Ниже будут рассмотрены более общие случаи геометрии пластин и их анизотропии.

При нагружении сжатием и сдвигом кривая взаимодействия критических нагрузок будет иметь следующий наклон:

$$\frac{dN_x}{dN_{xy}} = -\frac{\int_{\Gamma} dS \frac{\partial w \partial w}{\partial x \partial y}}{1/2 \int_{\Gamma} dS \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad (5.23)$$

а при нагружении сдвигом и изгибом в плоскости имеем наклон для такой кривой взаимодействия:

$$\frac{dN_x^{max}}{dN_{xy}} = -\frac{\int_{\Gamma} dS \frac{\partial w \partial w}{\partial x \partial y}}{1/2 \int_{\Gamma} dS \frac{2(y-b/2)}{b} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad (5.24)$$

где изгиб в плоскости дается формулой

$$N_x = N_x^{max} \left( \frac{2(y-b/2)}{b} \right) \quad (5.25)$$

В работе (Selyugin 2016) показано, что поверхность взаимодействия критических нагрузок при комбинированном нагружении является выпуклой.

Кривые взаимодействия критических нагрузок могут быть также аппроксимированы с помощью конечных формул. Так, известна формула Балабуха, указанная Лехницким 1947:

$$\frac{N_x}{N_{x0}} = - \left( \frac{N_{xy}}{N_{xy01}} - 1 \right) \left( \frac{N_{xy}}{N_{xy02}} - 1 \right) \quad (5.26)$$

где индекс 0 означает собственное значение при одном нагружении сжатием, индекс 01 соответствует сдвиговому собственному значению в первом (рассматриваемом) направлении, индекс 02 соответствует сдвиговому собственному значению при противоположном направлении сдвига (оно имеет знак минус).

На основе идеи формулы Балабуха можно получить более точную аппроксимацию в виде полинома четвертого порядка:

$$\frac{N_x}{N_{x0}} = \frac{1}{q} \left( \frac{N_{xy}}{N_{xy01}} - 1 \right) \left( \frac{N_{xy}}{N_{xy02}} - 1 \right) \left[ (N_{xy})^2 - p(N_{xy}) + q \right] \quad (5.27)$$

$$q = - \frac{N_{xy01}^2 N_{xy02}}{N_{xy01} + 2N_{xy02} + \frac{f'_0 N_{xy01} N_{xy02}}{N_{x0}} - \frac{f'_1 N_{xy01} N_{xy02}^2}{N_{x0}(N_{xy01} - N_{xy02})}} \quad (5.28)$$

$$p = -q \left( N_{xy01} + N_{xy02} + \frac{f'_0 N_{xy01} N_{xy02}}{N_{x0}} \right) \quad (5.29)$$

где  $f'_0, f'_1$  - это производные кривой взаимодействия значений нагрузок потери устойчивости  $N_x(N_{xy})$  в точках  $N_x = 0$  (чистый положительный сдвиг) и  $N_{xy} = 0$  (чистое сжатие), соответственно.

## 5.5. Использование метода Галёркина

При численном нахождении критических нагрузок от комбинированного нагружения оказывается полезным следующий подход, использующий метод Галёркина (см. Канторович и Крылов 1962) специальным образом, описанным ниже (см. Selyugin 2016).

Предлагаемый подход использует собственные формы потери устойчивости от раздельных нагружений для анализа комбинированного нагружения. Предполагается, что комбинированный набор собственных форм потери устойчивости от отдельных нагружений является полной системой собственных форм (функций) для комбинированного нагружения. Также важно, что собственные формы для раздельных нагружений берутся для обоих возможных направлений нагружения.

Рассматривая кинематический вариационный принцип, мы видим, что в методе Галеркина отыскивается стационарное значение энергии  $U = \Pi - W$ , используя функции, удовлетворяющие краевым условиям. Обозначая указанные собственные функции  $w_i, i = 1, \dots, N$ , собственная функция для комбинированного нагружения будет

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i \quad (5.30)$$

где  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$  некоторые неизвестные множители.

Следуя формализму метода Галеркина, приходим к линейной однородной системе уравнений для множителей рассматриваемых собственных форм  $N$ -го порядка, коэффициенты которого включают в себя линейным образом неизвестное собственное значение нагрузки  $\lambda$ . Определитель этой системы должен быть равен нулю. Вычисление этого определителя приводит к нелинейному по  $\lambda$  уравнению  $N$ -го порядка. Первый положительный корень  $\lambda$  последнего нелинейного уравнения и даёт собственное (критическое) значение нагрузки  $\lambda$  для комбинированного нагружения.

Приведем примеры использования этого специального метода Галеркина.

Рассматривается пластина, изготовленная из материала слоёв Т300-углеволокно/ 5208-эпоксидная смола (см. также <http://composite.about.com/library/data/blc-t300-5208.htm>) толщиной 0.125 мм. Производитель материала - Hexcel Company. Свойства материала представлены в Таблице 5.1 ниже.

E11, GPa	E22, GPa	G12, GPa	v12
181	10.3	7.17	0.28

Таблица 5.1: T300/5208 углеволокно/эпоксидная смола, односторонний препрег.

Пластина имеет симметричную укладку  $[ [+45^\circ, -45^\circ ]_4 ]_S$ , внешний слой  $+45^\circ$ , направление  $0^\circ$  соответствует направлению более длинной стороны (направление  $x$ ), величина угла положительна при повороте от длинной к короткой стороне. Толщина пластины 2 мм, ее ширина 200 мм. Рассматривается соотношение сторон  $a$  и  $b$ :  $a/b = 3$ . Пластина свободно, т.е. безмоментно, оперта по контуру.

Ниже результаты расчетов потока напряжений представлены в безразмерном виде, отнесённые к 50 Н/мм. Компоненты матрицы изгибной жесткости  $D_{ij}$  таковы:  $D_{11}=D_{22}=37.8$  Нм,  $D_{12}=28.2$  Нм,  $D_{16}=D_{26}=5.36$  Нм,  $D_{66}=31.1$  Нм.

Параметр ортотропии  $\beta$  и параметры изгибной анизотропии  $\gamma, \delta$  (см. Selyugin 2016) соответственно равны 2.39, 0.142, 0.142. Формулы для этих параметров:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \\ \gamma &= \frac{D_{16}}{\sqrt[4]{D_{11}^3 D_{22}}} \\ \delta &= \frac{D_{16}}{\sqrt[4]{D_{11}^3 D_{22}}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Для длинных пластин (см. Weaver and Nemeth 2008) величина  $\beta$ , равная трём, указана как наибольшая для использования формул взаимодействия форм потери устойчивости, предложенных в этой работе. Ниже мы используем эти формулы для проведения сравнения результатов.

Следует отметить, что точность в 1% для критических значений нагрузки является приемлемой для большинства приложений, например, для авиационных конструкций. Ниже мы сравним полученные нами результаты с результатами МКЭ анализа высокой точности.

Рассматривается комбинированное нагружение пластины сдвигом и сжатием в направлении длинной стороны. Нагружение проводится на сжатие  $N_x = -50$  Н/мм и на сдвиг  $N_{xy} = 50$  Н/мм. Непосредственный анализ устойчивости проводится с помощью МКЭ высокой точности.

Отметим, что при  $\frac{N_x}{N_{xy}} = 0.8$  имеет место двукратное критическое значение комбинированной нагрузки, равное 1.14.

На Рис. 5.1 представлены кривые взаимодействия критических значений устойчивости в сравнении с решением высокой точности по МКЭ (сплошная линия). Формуле Балабуха соответствует пунктирная линия, описанному выше полиному 4-го порядка соответствует штрихпунктирная линия, формуле из (Weaver and Nemeth 2008) соответствуют ромбы при  $\beta = 2.39$ .

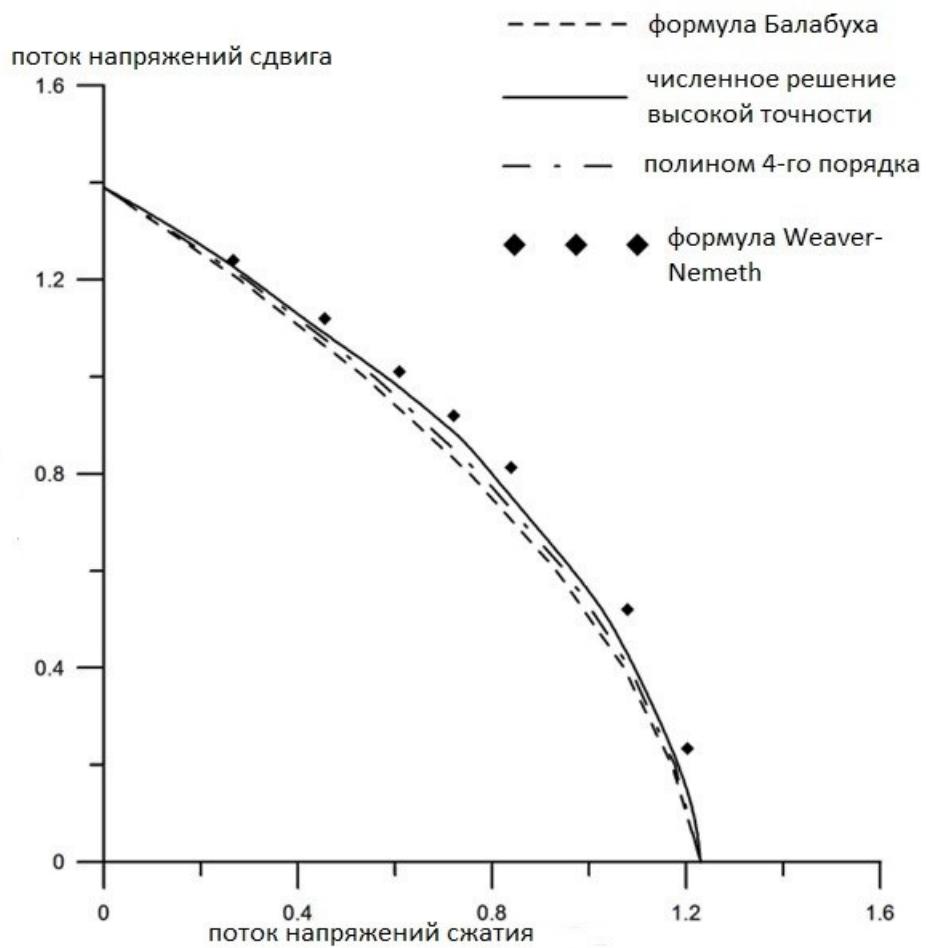


Рис. 5.1. Зависимость критического сдвига от критического сжатия (в сравнении с МКЭ высокой точности) для конечных аппроксимационных формул.

Как видно на Рис. 5.1, что результаты для полинома 4-го порядка ближе к МКЭ результатам высокой точности, чем результаты для формулы Балабуха (последние дают заниженные оценки критических значений). В то же время, пренебрежение изгибной анизотропией в формуле Вивера-Немета приводит к завышению оценок для критических значений, по сравнению с результатами МКЭ высокой точности. Этот результат понятен с физической точки зрения, поскольку учет изгибной анизотропии может понизить критические значения (см. Nemeth 1995).

Результаты для специального варианта метода Галеркина представлены в Таблице 5.2. Из этой Таблицы видно, что три «положительных» собственных формы сдвига (здесь и ниже слова «положительный сдвиг» означают сдвиг с растянутым внешним слоем) плюс три собственных формы сжатия приводят к практически значимому по точности результату.

Число используемых собственных форм потери устойчивости	Максимальная разница в первых собственных значениях для комбинированного нагружения, % от МКЭ решения
Одна форма сдвига (первая или вторая «положительные») + одна форма сжатия (первая или вторая)	2.
Две формы сдвига (первая и вторая «положительные») + две формы сжатия (первая и вторая)	1.7
Три формы сдвига (первая, вторая и третья «положительные») + три формы сжатия (первая, вторая и третья)	0.5

Таблица 5.2. Результаты для специального варианта метода Галеркина, комбинированный сдвиг-сжатие.

Результаты в строке «Одна форма сдвига (первая или вторая «положительные») + одна форма сжатия (первая или вторая)» Таблицы 5.2 были получены следующим образом. Для  $N_x/N_{xy} \leq 0.8$  (потеря устойчивости с доминирующим сдвигом) использовались первая собственная форма (мода)

«положительного» сдвига и вторая мода сжатия (отношение 0.8 соответствует кратному критическому значению потери устойчивости, указанному выше).

Для  $N_x/N_{xy} \geq 0.8$  (потеря устойчивости при доминировании сжатия)

использовались вторая «положительная» форма сдвига и первая мода сжатия.

Соответствующие безразмерные результаты представлены на Рис. 5.2.

Сплошная линия соответствует МКЭ решению высокой точности, квадратики соответствуют специальному варианту решения по Галеркину. На этом

Рисунке видно, что последние результаты достаточно хороши, а наибольшее различие с результатами МКЭ – в центре Рисунка. Соответствующие

собственные формы сдвига (первая и вторая), а также первая и вторая собственные формы сжатия показаны на Рис. 5.3 – 5.6. Вследствие изгибной

анизотропии эти поверхности (по сравнению с чисто ортотропным случаем)

слегка наклонены по отношению к короткой стороне пластины.

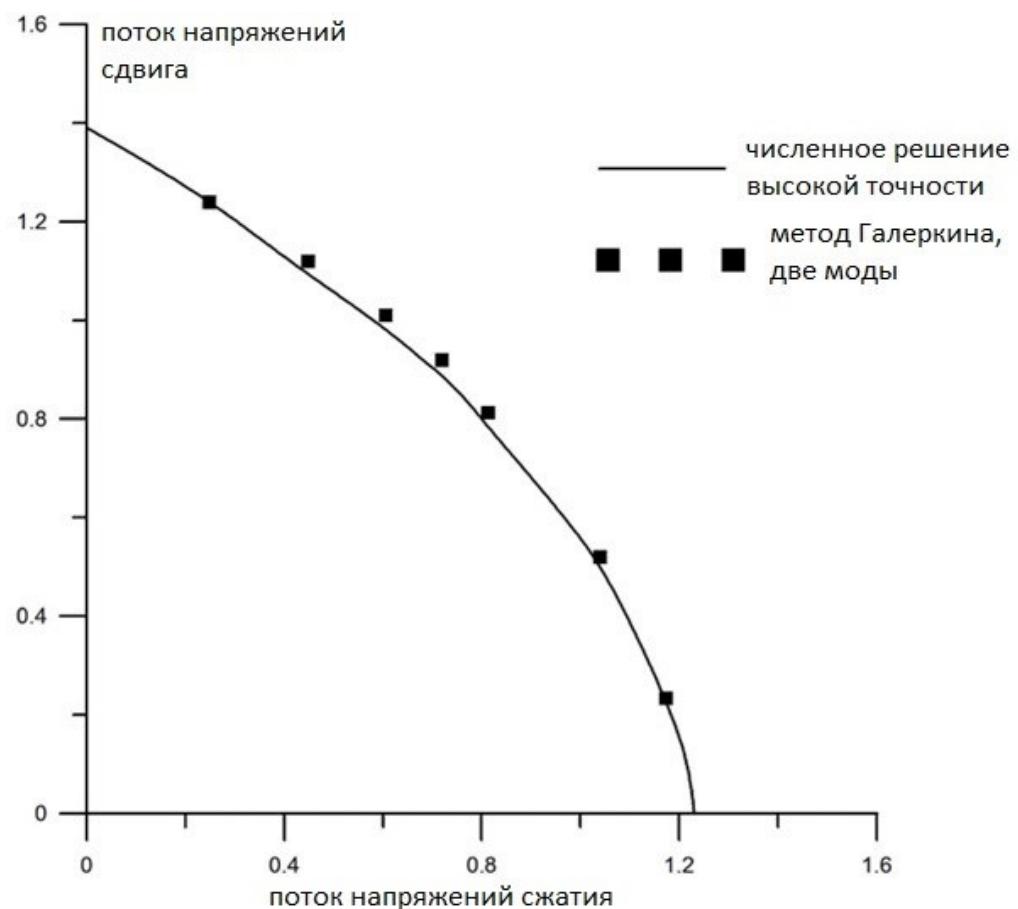


Рис 5.2. Критический поток сдвиговых напряжений в функции от критического потока сжимающих напряжений.

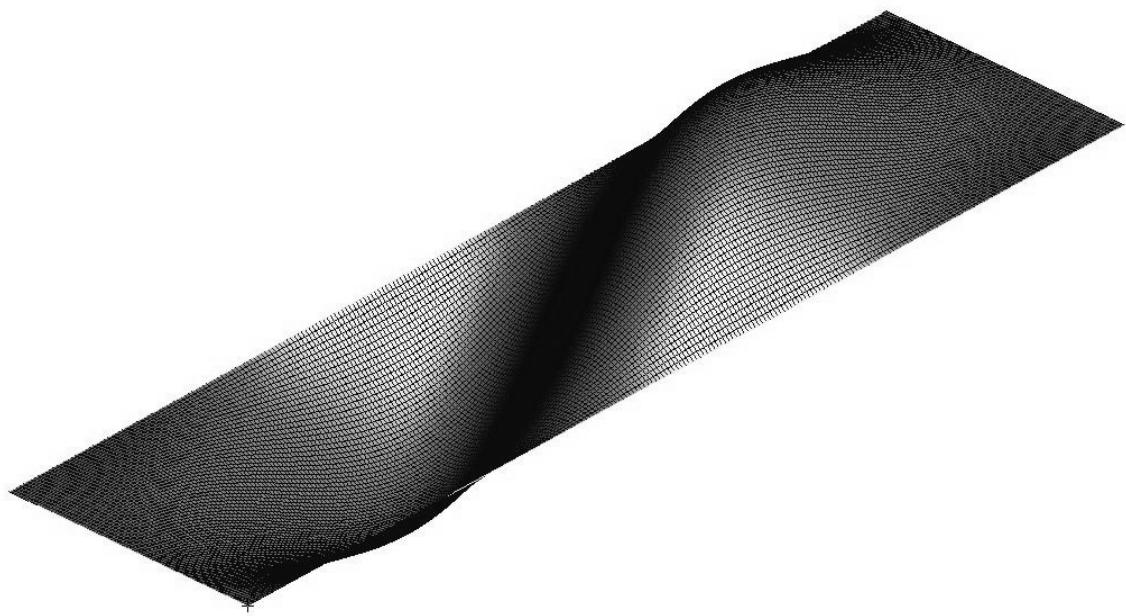


Рис. 5.3. Первая форма потери устойчивости при положительном сдвиге.

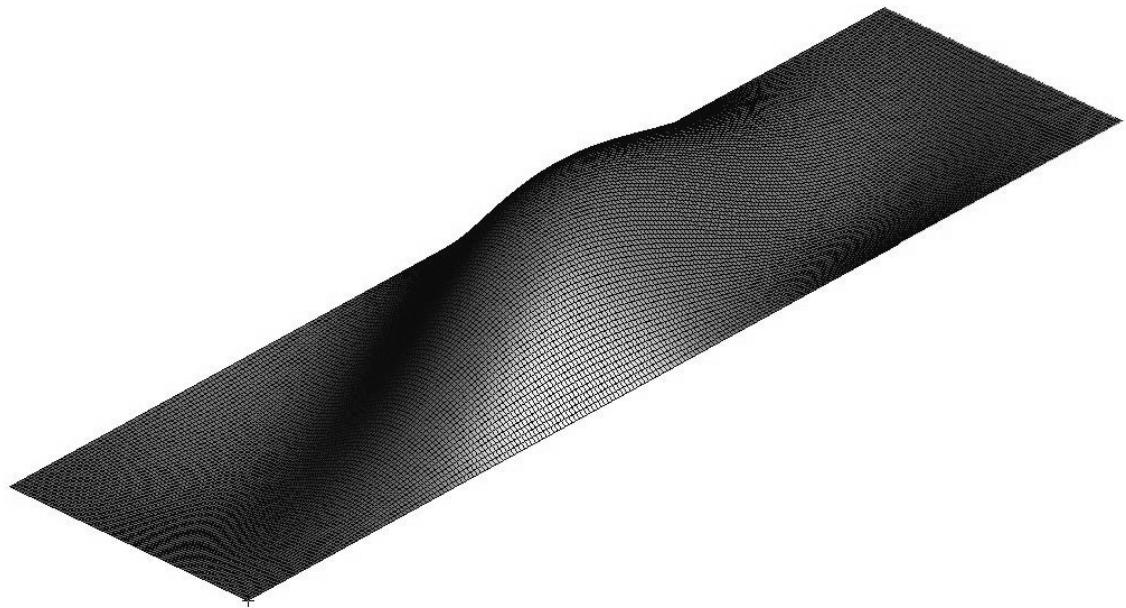


Рис. 5.4. Вторая форма потери устойчивости при положительном сдвиге.

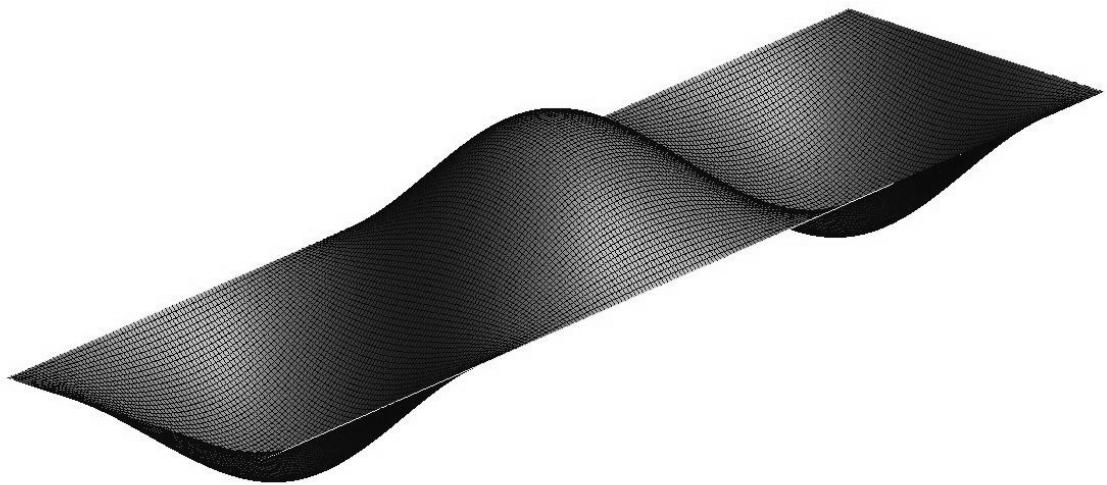


Рис. 5.5. Первая форма потери устойчивости при сжатии.

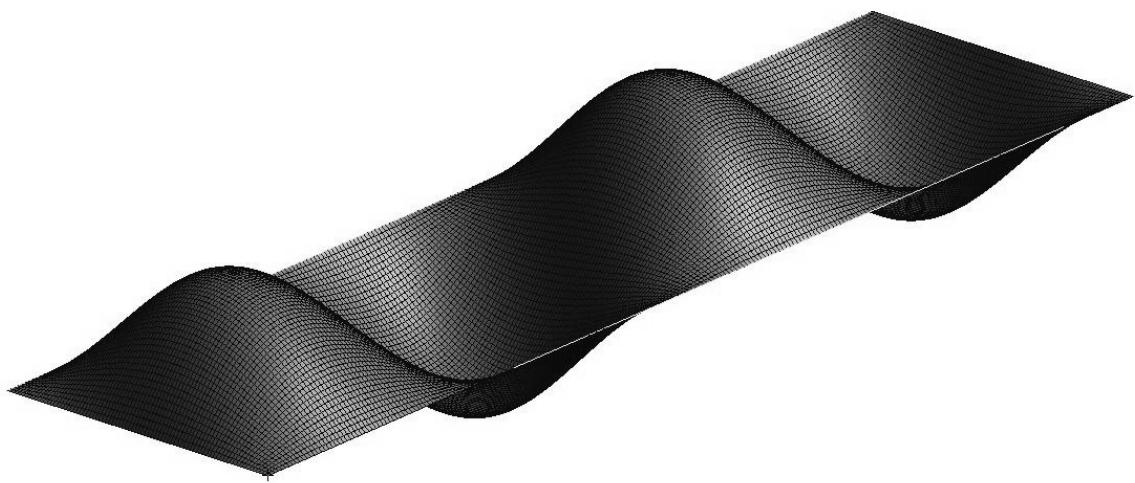


Рис. 5.6. Вторая форма потери устойчивости при сжатии.

Продемонстрируем возможность использования специального подхода типа Галеркина для случая комбинированного нагружения более чем двумя нагрузлениями.

Рассмотренная выше пластина  $a/b=3$  нагружена сдвигом  $N_{xy} = 50\text{Н}/\text{мм}$ , изгибом в плоскости  $N_x^{max}=500 \text{ Н}/\text{мм}$  и продольным сжатием  $N_x = \pm 50 \text{ Н}/\text{мм}$ .

При сжатии, скомбинированном со сдвигом и изгибом в плоскости, величина критической нагрузки (первое собственное значение) составляет 0.478 по МКЭ. Анализ по специальному варианту метода Галеркина с четырьмя «положительными» и четырьмя «отрицательными» собственными формами сдвига, с четырьмя «положительными» и четырьмя «отрицательными» собственными формами изгиба в плоскости и четырьмя собственными формами сжатия дает точность 0.2% по сравнению с решением МКЭ высокой точности.

При растяжении, скомбинированном со сдвигом и изгибом в плоскости, величина критической нагрузки (первое собственное значение) составляет 0.839 по МКЭ. Анализ по специальному варианту метода Галеркина с четырьмя «положительными» и четырьмя «отрицательными» собственными формами сдвига, с четырьмя «положительными» и четырьмя «отрицательными» собственными формами изгиба в плоскости и четырьмя собственными формами сжатия дает точность 0.4% по сравнению с решением МКЭ высокой точности. Важно подчеркнуть, что для случая учета растяжения мы, тем не менее, используем собственные формы потери устойчивости при сжатии.

Рис. 5.9 показывает сечение поверхности взаимодействия критических нагрузений для  $N_x^{max}/N_{xy}$ . На этом Рисунке представлены результаты по МКЭ высокой точности (квадраты)  $N_{xy}$  в функции от  $N_x$ . Результаты для специального варианта метода Галеркина не приведены на этом Рисунке, они максимально отличаются от МКЭ результатов на 0.3%.

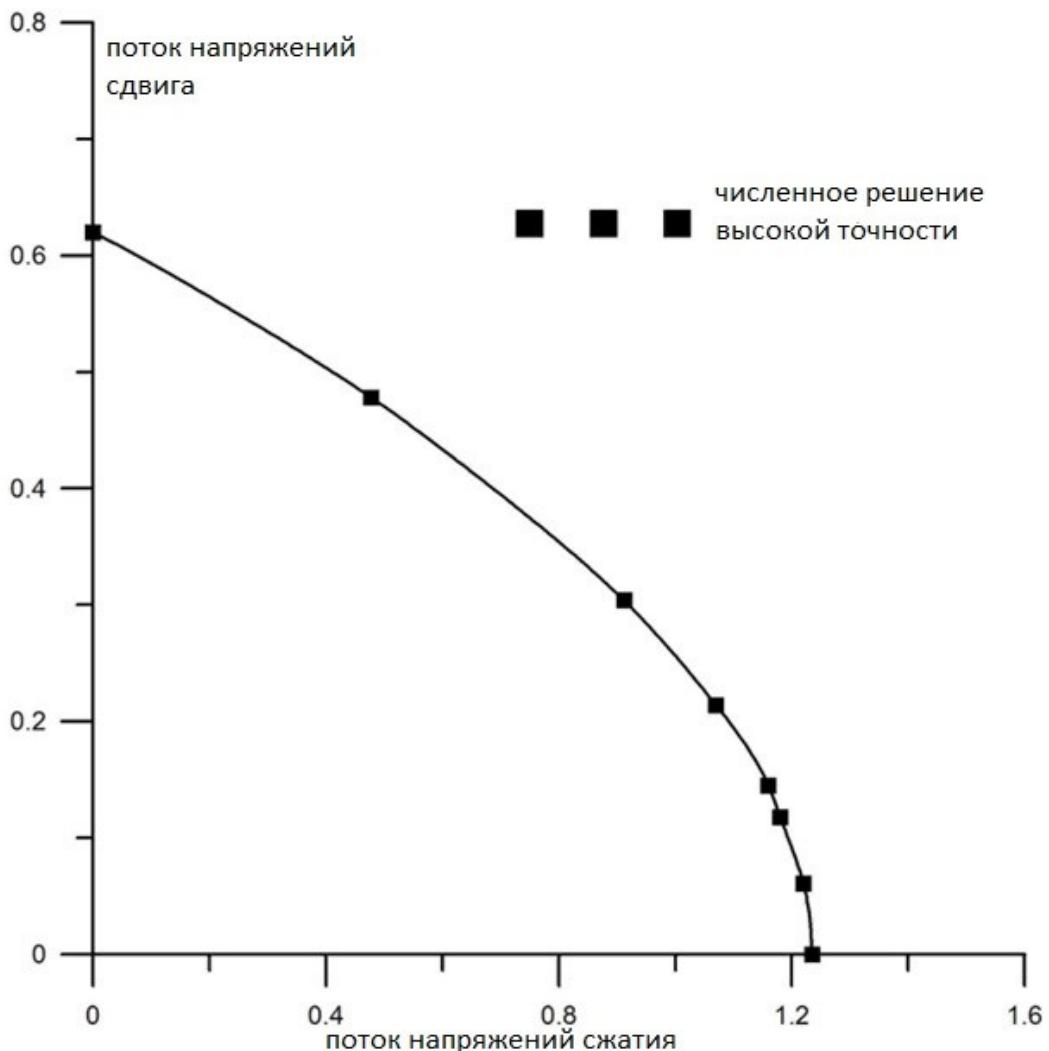


Рис. 5.9. Сдвиговой поток напряжений как функция от потока напряжений сжатия.  $N_x^{max}/N_{xy}$

Таким образом, специальный вариант метода Галеркина может быть распространен на произвольное число комбинируемых нагрузений.

### 5.6. Выбор наилучшей укладки слоёв (одно нагружение)

Далее рассмотрим вопрос о выборе наилучшей укладки слоёв (при заданном их числе) для сопротивления потере устойчивости. При этом возможны два варианта: 1) волокна каждого слоя прямолинейны, 2) их угол ориентации

может изменяться вдоль волокна и в зависимости от рассматриваемого волокна слоя.

### 5.6.1. Вывод условий оптимальности

В данном разделе используются результаты работ (Selyugin 2019g, 2020). Рассматриваемая пластина предполагается просто (безмоментно) опертой по направлению Z. Поведение пластины описывается классической теорией ламинированных пластин (см. Gibson 1994, Лехницкий 1947, Reddy 2004). Эта теория базируется на гипотезе прямых нормалей Кирхгоффа. Уравнение предельного равновесия (на границе потери устойчивости) для прогибов  $w$  из плоскости  $\Gamma$  приведено в данной главе выше, где также указана связь вектор-столбцов моментов  $\vec{M}$  и кривизн  $\vec{k}$ .

Распределение потоков напряжений в плоскости даётся соотношением:

$$\vec{N} = A \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

где  $A$  – матрица жесткости пластины в плоскости. Вектор-столбец слева в этом соотношении есть

$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T \quad (5.33)$$

верхний индекс  $T$  означает транспонирование.

Компоненты  $\vec{N}$  должны удовлетворять уравнениями равновесия в плоскости пластины, а перемещения в этой плоскости должны удовлетворять краевым условиям.

Приведём ряд соотношений, относящихся к упругой композитной пластине, базирующихся на данных Главы 2.

В соответствии с (Gibson 1994), производные для компонент матрицы жесткости слоя  $\bar{Q}_{ij}$  по углу ориентации слоя  $\Theta$  будут:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{Q}_{11}}{d\theta} &= -2U_2 \sin 2\theta - 4U_3 \sin 4\theta = -4\bar{Q}_{16} \\
\frac{d\bar{Q}_{22}}{d\theta} &= 2U_2 \sin 2\theta - 4U_3 \sin 4\theta = 4\bar{Q}_{26} \\
\frac{d\bar{Q}_{12}}{d\theta} &= 4U_3 \sin 4\theta = 2(\bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{26}) \\
\frac{d\bar{Q}_{16}}{d\theta} &= U_2 \cos 2\theta + 4U_3 \cos 4\theta \\
\frac{d\bar{Q}_{26}}{d\theta} &= U_2 \cos 2\theta - 4U_3 \cos 4\theta \\
\frac{d\bar{Q}_{66}}{d\theta} &= 4U_3 \cos 4\theta
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Определение матриц  $A_{ij}$  и  $D_{ij}$  через параметры слоя осуществляются по общим формулам (Gibson 1994),  $ij=11, 12, 22, 16, 26, 66$ :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \tag{5.35}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{5.36}$$

где  $z_k, z_{k-1}$  - это  $z$ -координаты верха и низа слоя ( $z=0$  соответствует срединной плоскости пластины).

Производные матриц жёсткости  $A, D$  по углу ориентации слоя  $\theta_k$  будут ( $ij=11, 12, 22, 16, 26, 66; k=1, \dots, K$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{ij}}{d\theta_k} &= (z_k - z_{k-1}) \frac{d(\bar{Q}_{ij})_k}{d\theta_k} \\
\frac{dD_{ij}}{d\theta_k} &= \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \frac{d(\bar{Q}_{ij})_k}{d\theta_k}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Перейдем к определению вариации собственного значения. Это значение предполагается некратным. Для вычисления этой вариации воспользуемся функцией Лагранжа (Лагранжиан)  $L$ , объединяющей целевую функцию и ограничения задачи.

Эти ограничения таковы:

- уравнения равновесия для потоков напряжений (Gibson, 1994)

$$\begin{aligned} N_{x,x}^{(0)} + N_{xy,y}^{(0)} &= 0 \\ N_{xy,x}^{(0)} + N_{y,y}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

- условия нагружения по X и Y, соответственно, нагрузками

$$\bar{N}_{xn}^{(0)}, \bar{N}_{yn}^{(0)}$$

$$\begin{aligned} N_x^{(0)}l + N_{xy}^{(0)}m &= \bar{N}_{xn}^{(0)} \\ N_{xy}^{(0)}l + N_y^{(0)}m &= \bar{N}_{yn}^{(0)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

- кинематические условия закрепления на  $C_2$

$$\begin{aligned} u = \bar{u} &= 0 \\ v = \bar{v} &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

- уравнение (5.7) для границы устойчивости, следующее из вариационного принципа (5.4).

Лагранжиан  $L$  задачи оптимизации запишем в виде:

$$\begin{aligned} L = \frac{\Pi}{W^{(0)}} + \int_{\Gamma} d\Gamma &\left[ \alpha_1 \left( N_{x,x}^{(0)} + N_{xy,y}^{(0)} \right) + \alpha_2 \left( N_{xy,x}^{(0)} + N_{y,y}^{(0)} \right) \right] + \\ + \int_{C_1} dC &\left[ \beta_1 \left( N_x^{(0)}l + N_{xy}^{(0)}m - \bar{N}_{xn}^{(0)} \right) + \beta_2 \left( N_{xy}^{(0)}l + N_y^{(0)}m - \bar{N}_{yn}^{(0)} \right) \right] \\ + \int_{C_2} dC (\gamma_1 u + \gamma_2 v) + \int_{\Gamma} d\Gamma &\left[ \vec{\omega}^T \left( A^{-1} \vec{N} - \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  - это множители Лагранжа; вектор-столбец  $\vec{\omega}$  имеет компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Первая вариация Лагранжиана (она должна быть равна нулю для оптимальной укладки слоёв) записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \delta_w \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] + \delta_D \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] + \delta_{\vec{N}^{(0)}} \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] \\
& + \delta \int_{\Gamma} d\Gamma \left[ \alpha_1 \left( N_{x,x}^{(0)} + N_{xy,y}^{(0)} \right) + \alpha_2 \left( N_{xy,x}^{(0)} + N_{y,y}^{(0)} \right) \right] + \\
& + \delta \int_{C_1} dC \left[ \beta_1 \left( N_x^{(0)} l + N_{xy}^{(0)} m - \bar{N}_{xn}^{(0)} \right) + \beta_1 \left( N_{xy}^{(0)} l + N_y^{(0)} m - \bar{N}_{yn}^{(0)} \right) \right] \\
& + \int_{C_2} dC (\gamma_1 \delta u + \gamma_2 \delta v) + \\
& + \delta_{\vec{N}^{(0)}, u, v} \left[ \int_S dS \vec{\omega}^T \left( A^{-1} \vec{N}^{(0)} - (u_{,x}; v_{,y}; u_{,y} + v_{,x})^T \right) \right] + \\
& + \sum_{i=1}^K \delta_{\theta_i} \int_S dS \vec{\omega}^T A^{-1} \vec{N}^{(0)} \tag{5.42}
\end{aligned}$$

где первый член равен нулю вследствие используемого кинематического вариационного принципа для границы устойчивости пластины, второй член обусловлен вариацией изгибо-крутильной жесткости и выведен в работе (Selyugin 2013) в пренебрежении влиянием варьирования сил в плоскости пластины, третий член учитывает варьирование сил в плоскости пластины, четвертый член соответствует условиям равновесия в плоскости пластины, пятый член соответствует нагружению пластины, шестой член соответствует краевым условиям в плоскости, седьмой член соответствует связи потоков напряжений и производных перемещений, восьмой член соответствует влиянию углов ориентации слоёв  $\theta_i, i=1, \dots, K$ , на последнюю связь.

Выполняя обычные преобразования с использованием теоремы Гаусса, получаем:

$$\delta_{\vec{N}^{(0)}} \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{W^{(0)}} \int_S dS (w_{,x}^2 \delta N_x + w_{,y}^2 \delta N_y + 2w_{,x} w_{,y} \delta N_{xy}) \tag{5.43}$$

$$\delta_{\vec{N}^{(0)}} \left[ \int_S dS \vec{\omega}^T \left( A^{-1} \vec{N} - (u_{,x}; v_{,y}; u_{,y} + v_{,x})^T \right) \right] = \int_S dS \vec{\omega}^T A^{-1} \delta \vec{N} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{u,v} \left[ \int_S dS \vec{\omega}^T \left( A^{-1} \vec{N} - (u_{,x}; v_{,y}; u_{,y} + v_{,x})^T \right) \right] = \\
& = \oint dl [(\omega_1 \delta u + \omega_3 \delta v) \cos(x, v) + (\omega_2 \delta v + \omega_3 \delta u) \cos(y, v)] -
\end{aligned}$$

$$-\int_S dS [\delta u(\omega_{1,x} + \omega_{3,y}) + \delta v(\omega_{2,y} + \omega_{3,x})] \\ (5.45)$$

Так как  $\delta u, \delta v$  это вариации независимых величин, то получаем из вариации  $L$  по  $u, v$  (с учетом последнего соотношения):

$$\omega_{1,x} + \omega_{3,y} = 0 ; \quad \omega_{2,y} + \omega_{3,x} = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (5.46)$$

$$\omega_1 \cos(x, n) + \omega_3 \cos(y, n) = 0 ; \quad \omega_3 \cos(x, n) + \omega_2 \cos(y, n) = 0 \quad \text{на } C_1 \\ (5.47)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad \text{на } C_2 \quad (5.48)$$

Откуда получаем

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \quad (5.49)$$

Следовательно, вариация по  $\vec{N}$  равна нулю.

Окончательно, опуская простые преобразования, получаем:

$$\delta L = \int_\Gamma d\Gamma \left\{ \delta \vec{N}^{(0)T} \begin{bmatrix} -\alpha_{1,x} + \frac{\lambda w_x^2}{2W^{(0)}} \\ -\alpha_{2,y} + \frac{\lambda w_y^2}{2W^{(0)}} \\ -\alpha_{1,y} - \alpha_{2,x} + \frac{\lambda w_x w_y}{W^{(0)}} \end{bmatrix} \right\} + \delta_D \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] + \\ + \int_{C_1} dC \delta \vec{N}^{(0)T} \begin{bmatrix} \beta_1 l + \alpha_1 l \\ \beta_2 m + \alpha_2 m \\ \beta_1 m + \beta_2 l + \alpha_2 l + \alpha_1 m \end{bmatrix} + \int_{C_2} dC \delta \vec{N}^{(0)T} \begin{bmatrix} \alpha_1 l \\ \alpha_2 m \\ \alpha_2 l + \alpha_1 m \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

где  $\delta \vec{N}$  содержит независимые вариации. Из последнего соотношения для  $\delta L$  получаем:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{на } C_2 \quad (5.51)$$

и

$$\beta_1 = \alpha_1 ; \quad \beta_2 = \alpha_2 \quad \text{на } C_1 \quad (5.52)$$

Также

$$-\alpha_{1,x} + \frac{\lambda w_x^2}{2W^{(0)}} = 0 ; \quad -\alpha_{2,y} + \frac{\lambda w_y^2}{2W^{(0)}} = 0 ; \quad -\alpha_{1,y} - \alpha_{2,x} + \frac{\lambda w_x w_y}{W^{(0)}} = 0 \quad \text{на } \Gamma \\ (5.53)$$

Полученные соотношения позволяют определить  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Единственный член для  $\delta L$ , содержащий вариации углов ориентации, это

$$\begin{aligned} \delta_D \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] = \\ = \int_{\Gamma} d\Gamma \sum_{i=1}^K \frac{\delta \theta_i}{W^{(0)}} \left\{ -4U_3 h_{ply} \sin 2(\theta_i - \psi) \begin{bmatrix} \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + \\ +(k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \end{bmatrix}^* \right. \\ \left. * \frac{1}{6} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.54)$$

где  $k_1, k_2, \psi, z_i, z_{i-1}$  - наибольшее и наименьшее значение главных кривизн средней плоскости пластины, угол между направлением  $k_1$  и осью X, верхняя и нижняя z координаты i-го слоя,  $i=1, \dots, K$ . Соотношение для  $\delta_D \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right]$  было получено в работе (Selyugin, 2013) в пренебрежении варьированием сил в плоскости.

Окончательно получаем условия оптимальности укладки с криволинейными волокнами слоёв в виде

$$\sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] = 0, \quad i=1, \dots, K \quad (5.55)$$

Итак, мы показали, что необходимые условия локальной оптимальности первого порядка для укладки слоёв не зависят от учёта или неучёта изменений распределения напряжений в плоскости пластины.

Нетрудно видеть, что в случае прямолинейных волокон слоёв и варьирования их наклона эти условия запишутся в виде:

$$\int_{\Gamma} dS \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] = 0, \quad i=1, \dots, K \quad (5.56)$$

## 5.6.2. Соотношения для параметров ламинации оптимальной укладки

Опираясь на (Selyugin 2019b), выведем некоторые соотношения. Введем следующие промежуточные величины:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{U_2}{4U_3}(k_1^2 - k_2^2) \\ \beta_2 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2 \end{cases} \quad (5.57)$$

Преобразуя условия оптимальности для криволинейных волокон на основе известных тригонометрических формул и суммируя эти условия для  $i=1, \dots, K$ , получаем следующее линейное соотношение для сумм синусов и косинусов двойного и четверного углов:

$$\begin{aligned} & \beta_1 \cos(2\psi) \sum_{i=1}^K \sin(2\theta_i) - \beta_1 \sin(2\psi) \sum_{i=1}^K \cos(2\theta_i) + \beta_2 \cos(4\psi) \sum_{i=1}^K \sin(4\theta_i) \\ & - \\ & - \beta_2 \sin(4\psi) \sum_{i=1}^K \cos(4\theta_i) = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Эти суммы, очевидно, пропорциональны параметрам ламинации ( $W_1^*, W_2^*, W_3^*, W_4^*$ ), соответственно. То есть, последние параметры ламинации для оптимальной укладки являются линейно зависимыми, и только три из них – линейно независимы.

## 5.6.3. Особые (ортотропные) решения условий оптимальности

Рассматривая условия оптимальности для укладки слоёв с криволинейными волокнами, нетрудно видеть, что эти условия будут удовлетворены, в том числе, и при

$$\sin 2(\theta_i - \psi) = 0, i=1, \dots, K \quad (5.59)$$

что означает для любых целых  $s$  положительных, отрицательных либо равных нулю

$$2(\theta_i - \psi) = \pi s \quad (5.60)$$

а реально 0 и  $+/-0.5\pi$  (как известно,  $\pi=3.14159\dots$ ). Значит, направление волокна слоя для таких решений или совпадает, или перпендикулярно направлению наибольшей главной кривизны срединной поверхности пластины.

#### 5.6.4. Некоторые свойства оптимальных решений

Рассмотрим некоторые свойства композитных пластин с оптимальной укладкой.

Возвращаясь к полученному ранее условию оптимальности для укладки слоёв с криволинейными волокнами, перепишем это условие в виде следующих трёх условий:

$$\sin 2(\theta_i - \psi) = 0, i=1,\dots,K \quad (5.61)$$

$$k_1 = k_2 \quad (5.62)$$

$$\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) = 0, \quad (5.63)$$

Эти условия, как нетрудно видеть, могут быть записаны в виде:

$$\delta_D \left[ \frac{\Pi}{W^{(0)}} \right] = \int_{\Gamma} d\Gamma \left( \sum_{i=1}^K \delta \theta_i \vec{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{k} \right) = 0 \quad (5.64)$$

Откуда, вследствие независимости между собой варьирования углов ориентации слоёв получаем

$$\vec{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{k} = 0, i=1,\dots,K \quad (5.65)$$

или, в системе координат, ориентированной по направлениям главных кривизн срединной поверхности пластины  $k_1, k_2$ :

$$(k_1, k_2)^T \begin{bmatrix} \frac{dD_{11}}{d\theta_i} & \frac{dD_{12}}{d\theta_i} \\ \frac{dD_{12}}{d\theta_i} & \frac{dD_{22}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0, i=1,\dots,K \quad (5.66)$$

Учитывая полученные ранее соотношения для  $k$ -го слоя (приведем их еще раз для наглядности)

$$\frac{dD_{ij}}{d\theta_k} = \frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \frac{d(\bar{Q}_{ij})_k}{d\theta_k}, k=1, \dots, K$$

$$\frac{d\bar{Q}_{11}}{d\theta_k} = -2U_2 \sin 2\theta_k - 4U_3 \sin 4\theta_k = -4\bar{Q}_{16}$$

$$\frac{d\bar{Q}_{22}}{d\theta_k} = 2U_2 \sin 2\theta_k - 4U_3 \sin 4\theta_k = 4\bar{Q}_{26}$$

$$\frac{d\bar{Q}_{12}}{d\theta_k} = 4U_3 \sin 4\theta_k = 2(\bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{26})$$

и, проводя соответствующее суммирование по  $k=1, \dots, K$ , получаем линейную комбинацию условий оптимальности углов ориентации слоёв в виде

$$-2\{(D_{16}^{pr.cur.} + D_{26}^{pr.cur.})(k_1^2 - k_2^2) + (D_{16}^{pr.cur.} - D_{26}^{pr.cur.})(k_1 - k_2)^2\} = 0 \quad (5.67)$$

(верхний индекс *pr.cur.* означает величину, соответствующую осям главных кривизн), или

$$D_{16}^{pr.cur.}k_1^2 - D_{26}^{pr.cur.}k_2^2 - (D_{16}^{pr.cur.} - D_{26}^{pr.cur.})k_1k_2 = 0 \quad (5.68)$$

Последнее соотношение удовлетворяется, если удовлетворено хотя бы одно из следующих трёх:

$$k_1 = k_2 \quad (5.69)$$

$$D_{16}^{pr.cur.} = D_{26}^{pr.cur.} = 0 \quad (5.70)$$

$$D_{16}^{pr.cur.}k_1 + D_{26}^{pr.cur.}k_2 = 0 \quad (5.71)$$

Эти три соотношения приводят к

$$(k_1 - k_2)M_{xy}^{pr.cur.} = 0 \quad (5.72)$$

что означает равенство нулю крутящего момента пластины в осях главных кривизн, либо равенство значений главных кривизн (это соответствует так называемой омбилической точке поверхности).

Итак, в отсутствие омбилического решения, в рассматриваемой точке срединной поверхности пластины, тензор моментов и тензор кривизн соосны.

При выборе укладки для пластин с прямолинейными волокнами последний критерий переходит в

$$\int_{\Gamma} dS(k_1 - k_2) M_{xy}^{pr.cur.} = 0 \quad (5.73)$$

Укажем также, при каких значениях главных кривизн может равняться нулю квадратная скобка в условиях оптимальности (5.55). Соответствующие неравенства легко следуют из условий на область значений функции косинус, которая находится от -1 до +1. Имеем:

$$-\frac{1 + \frac{U_2}{4U_3}}{\frac{U_2}{4U_3}} \leq \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \leq \frac{1 - \frac{U_2}{4U_3}}{\frac{U_2}{4U_3}}$$

Отметим, что указанная квадратная скобка в условиях оптимальности (5.55) равна нулю, например, при  $k_1 = -k_2$ .

Для материала t300/5208 последнее соотношение их двух неравенств превращается в

$$-1.92 \leq \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \leq 0.08$$

## **5.7. Выбор наилучшей укладки слоёв при двух альтернативных нагрузлениях**

Этот раздел основан на результатах работы (Selyugin 2022b). Предполагается в данном подразделе, что потенциал внешних сил  $W_{(1)}^{(0)}, W_{(2)}^{(0)}$  для обоих нагружений неотрицателен (см. Михлин 1970), то есть, главные напряжения везде – на сжатие.

В практике проектирования композитных плит и панелей проектировщики, как правило, должны создавать конструкцию, выдерживающую несколько статических нагрузок. Для авиационных конструкций ключевым требованием, помимо прочностных, является отсутствие потери устойчивости при так

называемых предельных эксплуатационных нагрузках. Обычно существует несколько статических нагрузок, влияющих на конструкцию плит и панелей. Конструкторы должны определить количество слоев в плите, их ориентацию и укладку (последовательность укладки).

Настоящий раздел посвящён задаче оптимизации укладки пластины, выдерживающей две альтернативные нагрузки вплоть до потери устойчивости. Мы используем и обобщаем результаты предыдущих разделов и работ (Selyugin 2013, 2016, 2019g).

Пусть пластина нагружена двумя системами сил, действующими в плоскости  $X-Y$  на участке  $C_1$  граничного контура пластины С. Далее индексом (1) или (2) обозначим величины, относящиеся к первому и второму нагружению, соответственно. Остальная часть контура пластины не перемещается по осям X и Y. Пластина считается свободно опертой в направлении Z. Как обычно, перемещения по X, Y, Z обозначаются как  $u$ ,  $v$ ,  $w$  соответственно.

Для двух рассматриваемых альтернативных нагружений создадим свертку  $\Lambda$  наименьших собственных значений, а именно

$$\Lambda = \alpha \lambda_{(1)} + (1 - \alpha) \lambda_{(2)} \quad (5.74)$$

где «вес» собственных значений определён с помощью коэффициента  $\alpha$ :

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.75)$$

Целью оптимизации укладки является максимизация  $\Lambda$ . Переменными проектирования являются углы ориентации слоев.

Следуя обозначениям и логике предыдущих разделов, а также работ (Selyugin 2013, 2019g), аналогично получаем вариацию целевой функции задачи в виде:

$$\delta \Lambda = \delta(\alpha \lambda_{(1)} + (1 - \alpha) \lambda_{(2)}) = \delta_D \left[ \alpha \frac{\Pi_{(1)}}{W_{(1)}^{(0)}} + (1 - \alpha) \frac{\Pi_{(2)}}{W_{(2)}^{(0)}} \right] =$$

$$= - \sum_{i=1}^K \delta \theta_i \frac{2U_3 h_{ply}}{3} (Z_i^3 - \\ - z_{i-1}^3) \left\{ \alpha \frac{\sin 2(\theta_i - \psi_{(1)})}{W_{(1)}^{(0)}} \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_{1(1)}^2 - k_{2(1)}^2) + (k_{1(1)} - k_{2(1)})^2 \cos 2(\theta_i - \psi_{(1)}) \right] + \right. \\ \left. + (1 - \alpha) \frac{\sin 2(\theta_i - \psi_{(2)})}{W_{(2)}^{(0)}} \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_{1(2)}^2 - k_{2(2)}^2) + (k_{1(2)} - k_{2(2)})^2 \cos 2(\theta_i - \psi_{(2)}) \right] \right\} \quad (5.76)$$

где  $k_{1(1)}, k_{2(1)}, k_{1(2)}, k_{2(2)}, \psi_{(1)}, \psi_{(2)}, Z_i, Z_{i-1}$  - наибольшая и наименьшая главные кривизны для нагрузок (1) и (2), угол между направлением и осью X для надлежащей нагрузки (1) или (2), верхняя и нижняя координаты z i-го слоя,  $i=1, \dots, K$ .

Соотношение (5.76) означает, что условия оптимальности укладки для целевой функции  $\Lambda$  таковы:

$$\alpha \frac{\sin 2(\theta_i - \psi_{(1)})}{W_{(1)}^{(0)}} \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_{1(1)}^2 - k_{2(1)}^2) + (k_{1(1)} - k_{2(1)})^2 \cos 2(\theta_i - \psi_{(1)}) \right] + \\ + (1 - \alpha) \frac{\sin 2(\theta_i - \psi_{(2)})}{W_{(2)}^{(0)}} \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_{1(2)}^2 - k_{2(2)}^2) + (k_{1(2)} - k_{2(2)})^2 \cos 2(\theta_i - \psi_{(2)}) \right] = \\ 0, \quad i=1, \dots, K \quad (5.77)$$

Потенциалы внешних сил, как было выше сказано, неотрицательны. Перепишем (5.77) в виде:

$$\Sigma_{i(1)} \sin 2(\theta_i - \psi_{(1)}) + \Sigma_{i(2)} \sin 2(\theta_i - \psi_{(2)}) = 0, \quad i=1, \dots, K \quad (5.78)$$

Заметим, что отношение  $\frac{U_2}{4U_3}$  равно 1,09 для типичного материала графит/эпоксидная смола t300/5208 (Grenestedt 1991).

Рассмотрим следующие нетривиальные случаи ( $\Sigma_{i(1)}, \Sigma_{i(2)}$  не равны нулю), а именно: 1) величины  $\Sigma_{i(1)}, \Sigma_{i(2)}$  имеют один и тот же знак при  $0 \leq \alpha \leq 1$  и 2) величины  $\Sigma_{i(1)}, \Sigma_{i(2)}$  имеют противоположные знаки при  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Для случая 1) оба синуса имеют противоположные знаки. На Рис. 5.10 показаны характерные линии формы, соответствующей (5.78), в некоторой точке P с координатами (x,y). Штриховыми линиями с углами ориентации

$\psi_{(1)}, \psi_{(2)}$  показаны линии наибольшей кривизны поверхностей прогиба при соответствующих нагрузках (угол между ними не выше  $90^\circ$ ). Сплошные линии показывают возможный угол ориентации  $\theta_i$ . Непосредственная проверка с помощью (5.78) подтверждает взаимное расположение линий.

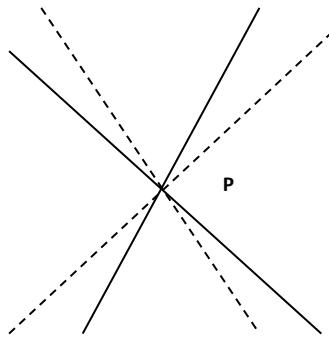


Рис. 5.10. Величины  $\Sigma_{i(1)}, \Sigma_{i(2)}$  имеют одинаковый знак.

На Рис. 5.11 показан эскиз для случая 2). Штриховыми линиями с углами ориентации  $\psi_{(1)}, \psi_{(2)}$  показаны линии наибольшей кривизны поверхностей прогиба при соответствующих нагрузках (угол между ними не выше  $90^\circ$ ). Сплошные линии показывают возможный угол ориентации  $\theta_i$ . Непосредственная проверка с помощью (5.78) подтверждает взаимное расположение линий.

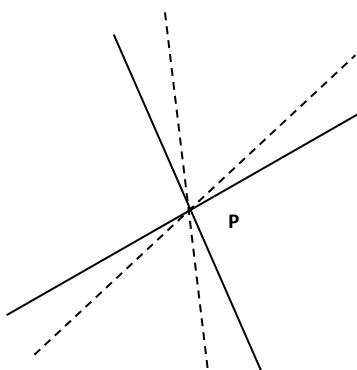


Рис. 5.11. Величины  $\Sigma_{i(1)}, \Sigma_{i(2)}$  имеют противоположные знаки.

Полная укладка для всей пластины может быть, вообще говоря, комбинацией решений, показанных на Рис. 5.10 и 5.11.

Еще один шаг нашего исследования заключается в следующем. Аналогично (Selyugin 2013, 2019g) составляем сумму (5.77) для всех  $i=1,\dots,K$ . Это приводит к

$$\alpha \frac{k_{1(1)} - k_{2(1)}}{W_{(1)}^{(0)}} M_{xy(1)}^{pr.cur.} + (1 - \alpha) \frac{k_{1(2)} - k_{2(2)}}{W_{(2)}^{(0)}} M_{xy(2)}^{pr.cur.} = 0 \quad (5.79)$$

где верхний индекс *pr. cur.* означает величину, измеренную в главных осях кривизны. Соотношение (5.79) является обобщением аналогичного соотношения для одного нагружения, полученного в предыдущих разделах и в (Selyugin 2013, 2019g). Из (5.79) видно, что крутящие моменты в (5.79) имеют противоположный знак (при  $0 < \alpha < 1$ ; точка на пластине не является омбилической для собственных форм потери устойчивости в случаях обоих нагружений).

Дальнейшее определение оптимальной последовательности укладки слоёв требует анализа и других условий оптимальности (Лежандра, и др.). Отметим, что, по нашему мнению, последние условия не могут быть получены из определения собственного значения потери устойчивости через отношение Рэлея.

## **5.8. Примеры, иллюстрирующие выбор наилучшей укладки**

### **5.8.1. Одно сдвиговое нагружение длинной пластины**

Этот подраздел посвящен рассмотрению и обсуждению результатов расчетов. Основное внимание будет уделено физическому смыслу и обсуждению связи изгиб-кручение.

Рассматривается тонкая длинная пластина, нагруженная сдвигом постоянной интенсивности. За исключение одного специально оговоренного

случая, пластина считается просто (безмоментно) опертой. Симметричная укладка слоёв выполнена ортотропным образом и записывается  $[[\theta/(\theta + 90^\circ)]_4]_s$  (в обозначениях книги Gibson 1994), где  $\theta$  – угол ориентации укладки. Этот угол соответствует направлению внутри материала, вдоль которого жесткость материала наиболее велика. Эта ось будет называться осью материала 1. Пластина состоит из 16 однонаправленных слоёв материала t300/5208 углеволокно/эпоксидная смола. Толщина слоя - 0.125 мм. Толщина пластины – 2 мм. Размеры пластины  $a=1000$  мм,  $b=200$  мм. Упругие свойства материала слоя представлены в Табл. 5.1. Пластина нагружена постоянным сдвигом с потоком напряжений 50 Н/мм, умноженным на отыскиваемую величину собственного значения потери устойчивости. МКЭ анализ осуществляется на основе сетки  $20*100=2000$  прямоугольных элементов с узлами в каждой угловой точке элемента. Оптимальная ориентация укладки определяется прямым поискам по  $\theta$  с шагом  $1^\circ$  (как и в других примерах этого и следующего подразделов).

Как указано в книге Kollar and Springer (2003), критический сдвиговой поток для длинной пластины с укладкой  $+/- 45^\circ$ , в пренебрежении  $D_{16}, D_{26}$ , даётся формулами:

$$N_{xy,crit} = \begin{cases} \frac{4}{b^2} \sqrt[4]{D_{11}D_{22}^3} (8.125 + 5.045\beta); \beta \leq 1 \\ \frac{4}{b^2} \sqrt{D_{22}(D_{12} + 2D_{66})} \left(11.71 + \frac{1.46}{\beta^2}\right); 1 < \beta \end{cases} \quad (5.80)$$

где, как было указано ранее,

$$\beta = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$$

Начальная точка численных исследований – это типичная  $+/- 45^\circ$  классическая укладка для сдвига, с внешним растянутым слоем при положительном направлении сдвига. Величина  $\beta$  для рассматриваемой пластины равна 2.39. Используя вторую строку из формулы для  $N_{xy,crit}$ , получаем оценку критического сдвигового потока в 70 Н/мм. Отсюда оценка

для критического собственного значения потери устойчивости  $\lambda=1.4$ .

Соответствующая матрица жесткости  $D$  будет

$$D = \begin{bmatrix} 3.78E + 04 & 2.82E + 04 & 5.36E + 03 \\ 2.82E + 04 & 3.78E + 04 & 5.36E + 03 \\ 5.36E + 03 & 5.36E + 03 & 3.11E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Для сравнения приведем матрицу  $D$  для  $[[0^\circ/90^\circ]_s]$  композитной пластины (слой  $0^\circ$  - внешний). Обозначим эту матрицу вехним индексом  $mat$ :

$$D^{mat} = \begin{bmatrix} 7.48E + 04 & 1.93E + 03 & 0 \\ 1.93E + 03 & 5.33E + 04 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78E + 03 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Мы видим, что члены  $D_{16}, D_{26}$ , возникающие вследствие вращения оси материала, не являются близкими к нулю. Тем не менее, эти члены значительно меньше по величине, чем диагональные члены (примерно 14% от  $D_{11}$ ).

Как и ожидалось, было получено, что собственное значение потери устойчивости при сдвиге существенно меняется при изменении направления сдвига. При положительном сдвиге оно равно 1.3, и равно -1.67 - при отрицательном. Соответствующий поток сдвиговых напряжений получается умножением собственного значения на 50 Н/мм. Отмеченная разница обусловлена изгибо-крутильной связью, описываемой членами с  $D_{16}, D_{26}$  уравнения предельного равновесия. Рис. 5.12 иллюстрирует форму потери устойчивости при отрицательном сдвиговом нагружении. Здесь и ниже обозначение  $\alpha/\beta$  для симметричной укладки означает, что угол  $\alpha$  соответствует наиболее жесткому направлению в пластине, и такие пары слоёв укладываются необходимое число раз. Если собственное значение соответствует отрицательному сдвигу, то, говоря о его максимизации, мы имеем в виду максимизацию абсолютного значения этого собственного значения.

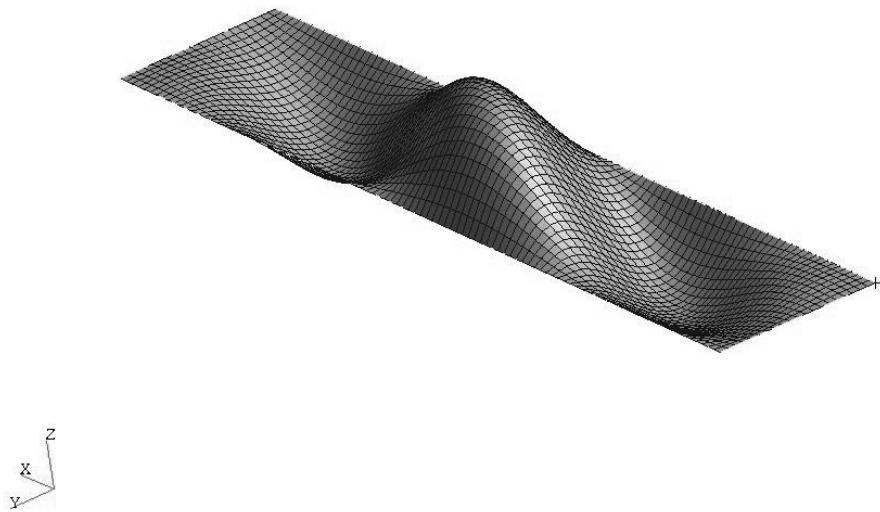


Рис. 5. 12. Форма потери устойчивости для укладки  $+45^\circ/+135^\circ$ , сдвиг в отрицательном направлении,  $\lambda = -1.67$

Как мы видим, собственная форма на этом Рисунке, соответствующая наименьшему собственному значению  $\lambda_1$ , содержит нечетное число областей, в которых прогиб не меняет знак.

Следующий шаг в численных исследованиях заключается в анализе устойчивости для пластин с укладкой всех слоёв  $60^\circ$ . Как указано в работе Grenestedt (1991), эта укладка является наилучшей для длинных пластин. Действительно, для нашей пластины собственные значения равны -2.82 (двукратное) и 0.42. Матрица  $D$  при этом

$$\begin{bmatrix} 1.58E + 04 & 2.16E + 04 & 1.34E + 04 \\ 2.16E + 04 & 7.29E + 04 & 3.61E + 04 \\ 1.34E + 04 & 3.61E + 04 & 2.45E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

На Рис. 5.13 и 5.14 показаны две собственные формы (моды) для  $\lambda = -2.82$ . Сравнивая результаты Рис. 5.12-5.14, можно сказать, что области на пластине с прогибом одного знака между линиями нулевого прогиба становятся уже, а

именно, порядка 1.1 от ширины пластины. Эти линии более наклонены к оси  $x$  (около  $-60^\circ$ ). Такие области в англоязычной литературе называются bay.

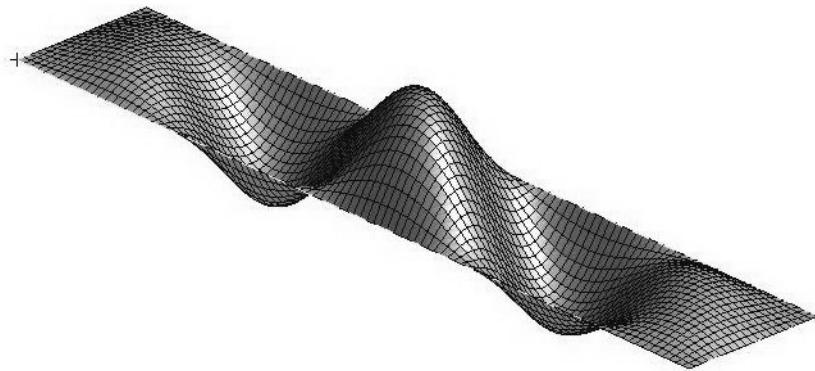


Рис. 5.13. Первая форма потери устойчивости для укладки  $+60^\circ$ ,  $\lambda = -2.82$ .

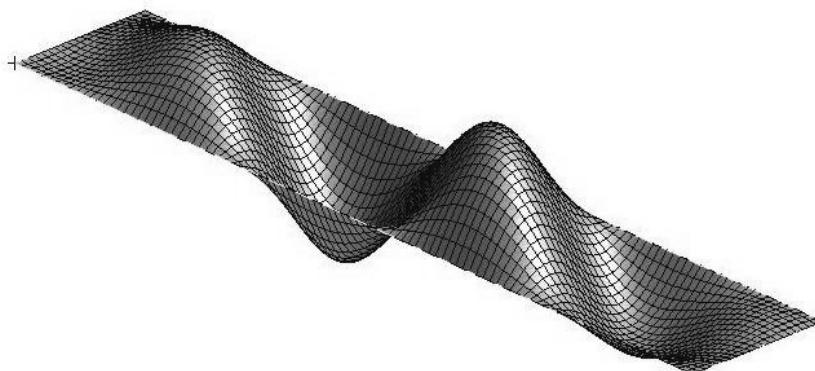


Рис. 5.14. Вторая форма потери устойчивости для укладки  $+60^\circ$ ,  $\lambda = -2.82$ .

Предлагается следующая возможная трактовка этих результатов для укладки  $+60^\circ$ ,  $\lambda = -2.82$  (Рис. 5.15):

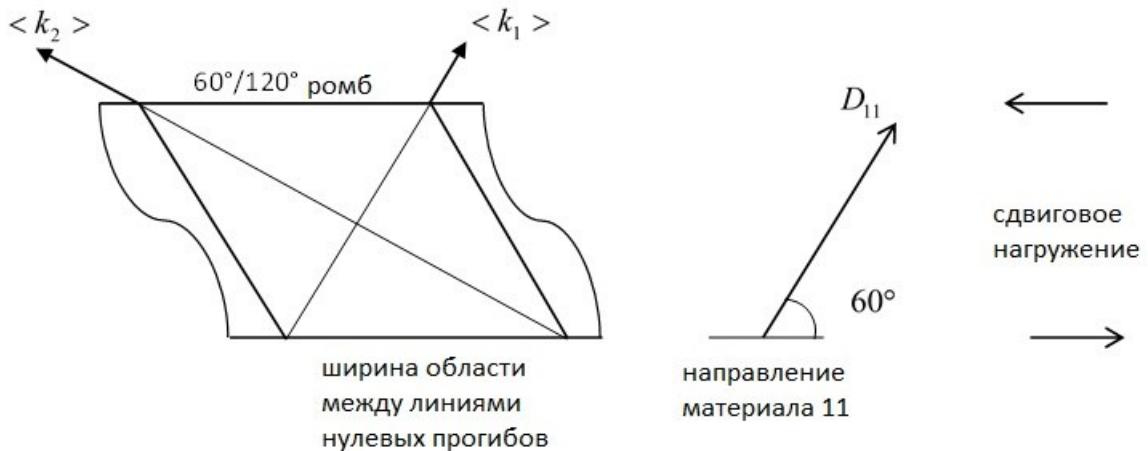


Рис. 5.15. Схематичная трактовка результатов для собственных форм,  
укладка  $+60^\circ$ ,  $\lambda = -2.82$

Область (ширина ее по-англ. bay width) между линиями нулевых прогибов на Рис. 5.15 может быть схематизирована ромбом (по-англ. rhombus) с углами  $60^\circ$  и  $120^\circ$  между боковыми сторонами. Направление материала 1 совпадает с короткой диагональю ромба.

Следующий шаг в численном исследовании – вращения угла  $\theta$  укладки  $[[\theta / (\theta + 90^\circ)]_4]_s$  для определения максимумов уровня нагрузки потери устойчивости и поведения пластины вблизи них. Как и прежде, используется метод прямого поиска.

Поворачивая всю укладку целиком, получаем результаты Рис. 5.16 по зависимости собственных значений устойчивости от угла ориентации материала.

Полученные максимальные значения  $|\lambda|$  соответствуют моде  $\lambda_1$  с нечетным числом областей знакопостоянства прогибов, эти собственные значения имеют значения 1.47 (укладка  $28^\circ/118^\circ$ ) and -1.93 (укладка  $60^\circ/150^\circ$ ). Самые эти экстремумы – довольно гладкие. Соответствующие матрицы жесткости будут:

$$D = \begin{bmatrix} 5.20E + 04 & 2.00E + 04 & 1.66E + 04 \\ 2.00E + 04 & 4.00E + 04 & -7.74E + 03 \\ 1.66E + 04 & -7.74E + 03 & 2.28E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

и

$$D = \begin{bmatrix} 3.90E + 04 & 2.16E + 04 & -6.74E + 03 \\ 2.16E + 04 & 4.97E + 04 & 1.60E + 04 \\ -6.74E + 03 & 1.60E + 04 & 2.45E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Как и ожидалось, вторая матрица жесткости приближенно получается из первой из них при соответствующей перенумерации элементов. Для обоих направлений сдвигового нагружения углы наклона «волн» собственной формы к короткой стороне становятся меньше, чем для случая укладки  $+/-45^\circ$ . Расстояние между линиями нулевого прогиба приблизительно на 30% больше, чем ширина пластины. Когда собственные значения достигают максимума, то соответствующие  $D_{16}, D_{26}$  члены матрицы  $D$  меняют знак.

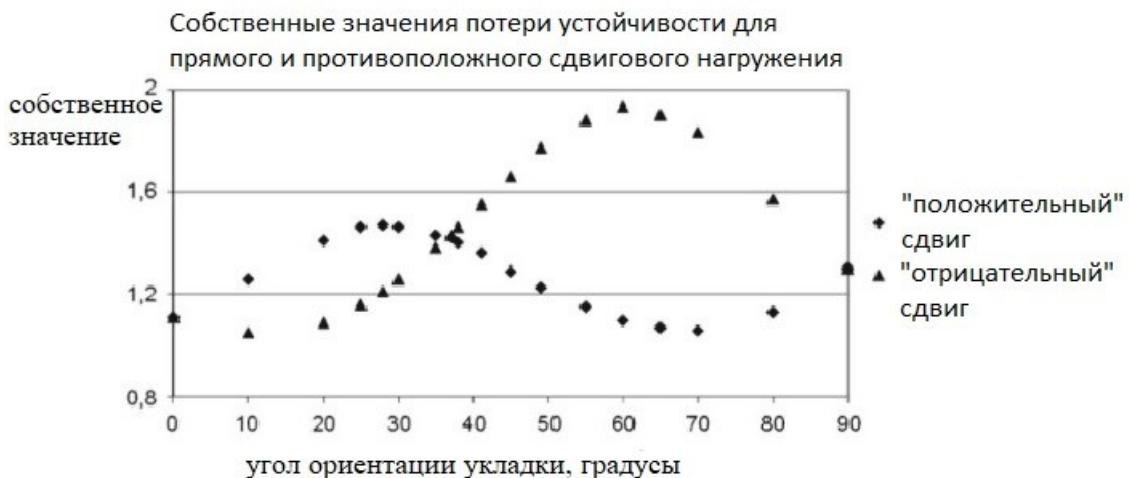


Рис. 5.16. Зависимость собственных значений устойчивости от ориентации укладки  $\theta$ .

Собственное значение ( $\lambda = 1.47$ ), соответствующее ориентации  $+28^\circ/118^\circ$ , является двукратным, имеющим две собственных формы с чётным и нечётным числом областей постоянного знака прогиба. Эти области имеют примерно одинаковую ширину, а наклон линий нулевых прогибов к оси  $y$  является примерно одинаковым ( $\sim 30^\circ$ ).

Наименьшее собственное значение для ориентации  $+60^\circ/150^\circ$  также является двукратным, имеющим две собственных формы с чётным и нечётным

числом областей постоянного знака прогиба. Эти области имеют примерно одинаковую ширину и наклон линий нулевых прогибов к оси  $y$  (подобно Рис. 5.13 и 5.14).

Полученные результаты согласуются, до некоторой степени, с известными результатами (см. Timoshenko and Gere 1961) для изотропных длинных пластин, для которых угол наклона «волн» к оси  $y$  был около  $35^\circ$ . Значительное различие с результатами Тимошенко заключается в большем расстоянии между линиями нулевого прогиба (это расстояние равно 1.22 от ширины пластины у Тимошенко).

Сравнивая результаты для положительного и отрицательного направления нагружения, мы можем сказать, что отрицательное нагружение ведёт к глобальному максимуму  $\lambda$ , в то время как положительное нагружение ведёт к локальному максимуму.

Угол ориентации материала  $60^\circ$ , соответствующий максимуму на Рис. 5.16, согласуется со значением из работы Grenestedt (1991). Более того, по нашему мнению, ориентация  $\sim 30^\circ$  (локальный максимум на Рис. 5.16) соответствует  $-60^\circ$  ориентации слабейшей оси материала (направление материала 2, или  $D_{22}$ ). Это означает, что положение обоих максимумов на Рис. 5.16 соответствует решению однородного ( $60^\circ$ ) композита, указанного в работе Grenestedt (1991).

В соответствии с результатами расчетов, первые два собственных значения являются двукратными не только в максимумах Рис. 5.16, но также и вблизи этих максимумов. Двукратность полученных оптимальных собственных значений имеет ясное физическое объяснение, так как рассматриваемая пластина ведёт себя подобно бесконечной полосе, для которой моды с чётным и нечётным числом областей с прогибами одного знака соответствуют одному и тому же решению с одинаковым значением критического сдвига потери устойчивости.

## 5.8.2. Два противоположно направленных сдвиговых нагрузления для длинной пластины

В предыдущем подразделе мы рассмотрели максимизацию (наименьшего) собственного значения, соответствующего одному направлению сдвигового нагружения. В реальном процессе проектирования во многих случаях проектировщик должен обеспечить заданный уровень потери устойчивости при сдвиге вне зависимости от направления нагрузления. Данный подраздел посвящен численным исследованиям для сдвигового нагружения, действующего в двух возможных противоположных направлениях. Различие в уровнях критической нагрузки потери устойчивости обусловлено анизотропией и связью изгиб-кручение. Мы укажем способ проектирования, учитывающий оба направления сдвиговой нагрузки.

Сначала мы рассмотрим возможность вращения укладки и проанализируем Рис 5.16 в связи с этим. Такой подход может использоваться в случае, когда вы хотите сохранить взаимную ортогональность слоёв, скажем, вследствие необходимости сохранить тот же уровень напряжений смятия под заклёпками (болтами).

Из Рис 5.16 следует, что собственные значения потери устойчивости для противоположных направлений уравниваются при примерно  $37^\circ$  (соответствующая этому укладка  $+37^\circ/+127^\circ$ ). Собственное значение равно 1.42, что на 10% выше, чем значение для нагрузки в положительном направлении при классической укладке  $+/-45^\circ$ . Матрица жесткости  $D$  при этом будет

$$D = \begin{bmatrix} 4.19E + 04 & 2.67E + 04 & 1.14E + 04 \\ 2.67E + 04 & 3.67E + 04 & -9.70E + 02 \\ 1.14E + 04 & -9.70E + 02 & 2.95E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Сравнивая (5.86) и (5.81), мы видим, что диагональные члены изменяются до 11%, но члены  $D_{16}, D_{26}$  изменяются значительно во взаимнопротивоположных

направлениях (по сравнению с прежними значениями, первый член увеличивается примерно в 2 раза, а второй - уменьшается на 80%).

Увеличение минимального значения нагрузки потери устойчивости может привести к выигрышу в весе пластины до 3%. Эта оценка экономии веса конструкции получена на основе предложенной Тимошенко квадратичной зависимости между критическими напряжениями и толщиной пластины (см. Timoshenko and Gere, 1961). Для ортотропной композитной пластины соотношение будет несколько отличаться, так как толщина пластины участвует в уравнении критического равновесия через элементы матрицы  $D$  более сложным образом (см. Gibson 1994). Следует отметить, что для случая длинной пластины угол ориентации и соответствующее собственное значение 1.42 может быть предсказано с хорошей точностью на основе приближенного энергетического подхода (см., например, Thielemann, 1950). Более того, в рассматриваемом примере последний подход предсказывает собственную форму потери устойчивости и её максимумы с точностью 5%, по сравнению с Рис. 5.16.

Для проведения сравнения с полученными результатами были выполнены расчеты с краевыми условиями типа защемления. Результаты этих расчётов приведены на Рис. 5.17. Из этого Рисунка следует, что для обоих направлений нагружения собственные значения одинаковы по величине для укладки  $35^\circ/125^\circ$ , то есть, отклонение от классического варианта  $+/-45^\circ$  даже большее по величине (порядка  $10^\circ$ ).



Рис. 5.17. Наименьшее собственное значение устойчивости для двух противоположных нагрузений сдвигом, краевые условия типа защемления.

Далее в этом подразделе мы будем обсуждать результаты расчетов только для краевых условий типа простого опирания.

В Таблице 5.3 приведены угол ориентации материала 1 в зависимости от удлинения пластины (отношения длин сторон). Этот угол отличается от угла  $+45^\circ$  для приблизительного выравнивания нагрузок потери устойчивости во взаимно противоположных направлениях. Толщина пластины 2 мм. Как и прежде, симметричная укладка состоит из слоёв, ориентированных во взаимно-перпендикулярных направлениях.

Табл. 5.3. Угол ориентации оси материала 1 для различных удлинений пластины.

$a/b, b=200$ мм	5	3	2	1.5
Ось 1, ориентация, $^\circ$	37	35	33	(37)
Собственные значения	1.42/ -1.43	1.51/ -1.53	1.67/ -1.67	(1.83/ - 2.12)

В этой Таблице имеется одно исключение. Для  $a/b=1.5$  невозможно увеличить собственное значение выше 1.83 для положительного направления нагружения (для укладки  $+/-45^\circ$  собственные значения равны 1.79/ -2.30). В этом случае мы не имеем возможности достичь равных собственных значений путём вращения укладки  $+/-45^\circ$ .

Как видно из Табл. 5.3, поворот от  $45^\circ$  возрастает с уменьшением отношения сторон от 5 до 2. Начиная от 1.5 и меньше, невозможно достичь равных уровней потери сдвиговой устойчивости для взаимнопротивоположных направлений нагружения.

Рис. 5.18 показывает угол ориентации материала 1 как функцию от толщины пластины (используется тот же материал t300/5208). Вся симметричная укладка, скажем, для угла  $27^\circ$ , состоит из пар  $27^\circ/117^\circ$ . Точки на этом рисунке определены с шагом  $1^\circ$ .

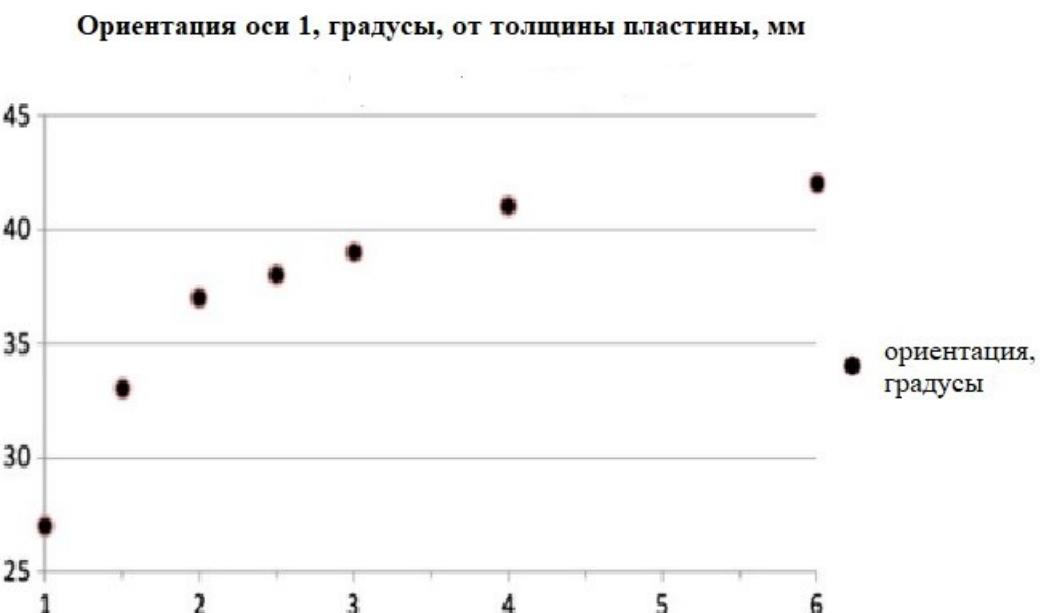


Рис. 5.18. Угол ориентации оси материала 1 для различных толщин пластины.

Выигрыш в минимальном собственном значении потери устойчивости, по сравнению со случаем  $+/-45^\circ$ , составляет  $\sim 12\%$  для толщины 1 мм и  $\sim 4\%$  для толщины 6 мм.

Пластина, составленная из одностороннего пакета слоев и рассмотренная в предыдущем подразделе, имеет существенный недостаток, а именно, очень низкий уровень нагрузки потери устойчивости при положительном направлении нагружения. Такая пластина не может быть использована на практике. Для симметричной укладки вида  $60^\circ/120^\circ$  (или, другими словами,  $+/-60^\circ$ ) разница между собственными значениями потери устойчивости при положительном и отрицательном направлении нагружения должна быть меньше.

Как следует из результатов анализа анизотропной пластины с симметричной укладкой  $+/-60^\circ$ , 2 мм толщиной и  $a/b=5$ , собственные значения будут 1.56, -2.00 (оба двукратные). Матрица  $D$  при этом:

$$\begin{bmatrix} 1.58E + 04 & 2.16E + 04 & 2.51E + 03 \\ 2.16E + 04 & 7.29E + 04 & 6.77E + 03 \\ 2.51E + 03 & 6.77E + 03 & 2.45E + 04 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Сравнивая (5.87) и (5.83), видно, что эти матрицы отличаются только в элементах  $D_{16}, D_{26}$ .

Все остальные элементы матриц - одинаковы. Рассматривая «волны» собственных форм, можно сказать, что они близки к таковым с Рис. 5.13 и 5.14 (соответствующим односторонней укладке  $60^\circ$ ).

Имеется возможность сблизить наименьшие собственные значения для различных направлений нагружения или даже уравнять их путем вращения укладки  $+/-60^\circ$ . Это приводит к укладке  $+74^\circ/+134^\circ$  и наименьшим собственным значениям 1.70, -1.71. Одна из таких собственных форм показана на Рис. 5.19.

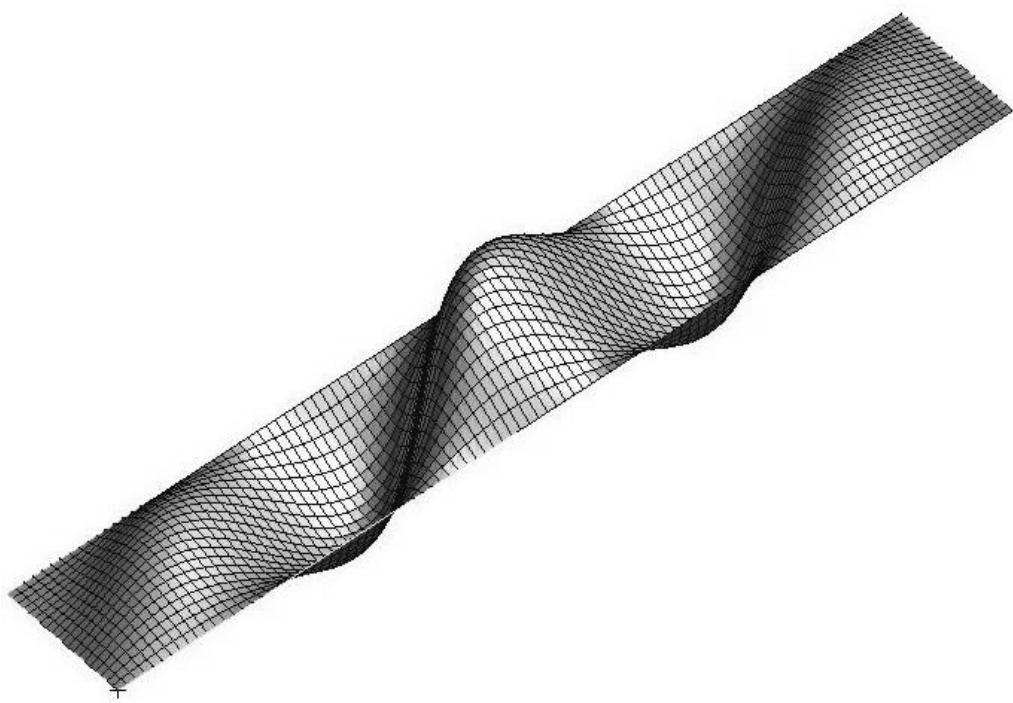


Рис. 5.19. Укладка  $74^\circ/134^\circ$ ,  $\lambda = 1.70$ . Собственная форма для наименьшего значения нагрузки потери устойчивости.

Полученный уровень 1.70 значительно выше, чем величина 1.30, полученная для укладки  $+/-45^\circ$ , и выше, чем 1.56, полученной для укладки  $+/-60^\circ$ .

Интересно посмотреть на вид укладки, выбранной таким способом, для различных удлинений пластины (при том же уровне нагрузок). Поиск наилучшей укладки предлагается выполнять за два шага. На первом шаге определяется величина угла  $\theta$  для укладки  $+/\theta$ . При этом собственное число для отрицательного направления нагружения максимизируется (отрицательное направление нагружения соответствует наибольшему сопротивлению потере устойчивости). После этого, для выравнивания наименьших собственных значений при положительном и отрицательном направлении нагружения осуществляется поворот всей укладки. Результаты

этих расчётов приведены в Табл. 5.4. Точность определения углов соответствует  $1^\circ$ . Как и ранее,  $\lambda$  означает наименьшее собственное значение.

Табл. 5.4. Результаты определения укладки для различных удлинений пластины.

$a/b$ ( $b=200\text{мм}$ )	$\lambda$ для +/-45° укладки	+/- $\theta$ укладка после шага 1	$\lambda$ для +/- $\theta$ укладки после шага 1	укладка после шага 2	$\lambda$ для укладки после шага 2
1.	2.48, -3.20				
1.5	1.79, -2.30	+/-55°	1.89, -2.42	+74°/-36°	1.96, -1.97
2.	1.56, -2.00	+/-57°	1.74, -2.24	+74°/-40°	1.84, -1.83
3.	1.39, -1.80	+/-59°	1.62, -2.08	+74°/-44°	1.75, -1.75
5.	1.30, -1,67	+/-60°	1.56, -2.00	+74°/-46°	1.70, -1.71

Строка для  $a/b=1$  – пустая, так как невозможно увеличить наименьшее собственное значение 2.48 на шаге 1, 2 в этом случае. Интересно, что в результате поиска для любых  $a/b$  мы получаем угол  $+74^\circ$  для сильнейшей оси материала (ось 1). Также видно, что необходимая величина поворота укладки растёт по мере уменьшения относительного удлинения пластины.

Табл. 5.4 позволяет сделать вывод, что можно получить выигрыш в наименьшей величине нагрузки потери устойчивости до 31%, по сравнению с

$+/-45^\circ$ , и до 9%, по сравнению с наилучшей укладкой  $+/-\theta$ . Возможный выигрыш веса в этом случае составляет соответственно до 9% и 3%.

В Табл 5.5 представлено обобщение возможных выигрышей в собственных значениях и весе для различных толщин пластины ( $a/b=5$ ,  $a=1000$  мм). Используется все тот же материал t300/5208.

Табл. 5.5. Результаты для различных толщин пластины.

Толщина пластины, мм	1.	2.	3.
Наилучшая укладка с равными уровнями потери устойчивости для обоих направлений нагружения	80°/ -40°	74°/ -44°	71°/ -49°
Увеличение наименьшего собственного значения потери устойчивости, по сравнению с укладкой $+/-45^\circ$	47%	31%	28%
Увеличение наименьшего собственного значения потери устойчивости, по сравнению с укладкой $+/-60^\circ$	21%	9%	6%
Выигрыш веса, по сравнению с укладкой $+/-45^\circ$	14%	9%	9%
Выигрыш веса, по сравнению с укладкой $+/-60^\circ$	7%	3%	2%

Как можно видеть, поворот от укладки  $+/-60^\circ$  становится меньшим при росте толщины. Рост наименьшего собственного значения потери устойчивости и экономия веса уменьшаются с ростом толщины пластины. Последнее заключение согласуется с тем, что для толстой пластины связь изгиб-кручение

становится не столь важной для уровня потери устойчивости (см. Narita and Leissa, 1990).

Результаты этого и предыдущего подразделов обобщены в виде европейского патента и патента США (Selyugin and Balzer 2017a, b).

### 5.8.3. Квадратная пластина при сжатии

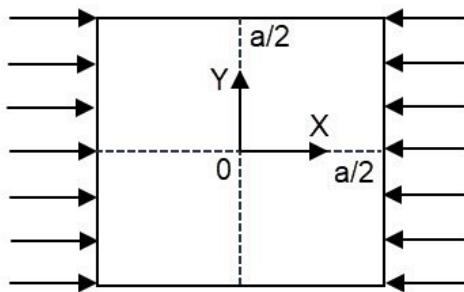


Рис. 5.20. Квадратная пластина

Рассмотрим квадратную пластину с Рис. 5.20. Пластина имеет размеры  $a^*$ , является просто опёртой по контуру и равномерно сжата в направлении оси  $x$ . Воспользуемся полученным ранее необходимым условием оптимальности (5.72) в виде равенства нулю крутящего момента в осях, ориентированных вдоль направлений главных кривизн деформированной срединной поверхности пластины. Полагаем, что поле прогибов пластины при потере устойчивости описывается первой симметричной собственной формой. Вследствие симметрии пунктирные линии на этом Рисунке будут линиями наибольшей главной кривизны. Очевидно, что крутящие моменты вдоль этих линий также будут равны нулю. Следовательно, оптимальной ориентацией вдоль этих линий будет ориентация слоёв  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . При этом указанные слои

не обязательно чередуются, их порядок может быть и другим. Объясняется последнее заключение тем, что использованные условия оптимальности являются лишь необходимыми условиями локальной оптимальности первого порядка. Случай, когда волокна всех слоёв на какой-то линии имеют одну и ту же ориентацию, не рассматривается по возможным технологическим соображениям.

В точках, расположенныхных на линиях осей координат, можно указать последовательность слоёв оптимальной укладки в частном случае  $K=2$  (четыре слоя, уложенных симметрично). А именно, в этих точках внутренний слой ортогонален линии, на которой он расположен. Очевидно, что указанная укладка имеет большую локальную изгибную жёсткость на этих линиях по сравнению с укладкой, в которой внутренний и внешний слои указанной выше укладки взаимно меняют местоположение.

Получающееся последнее решение будет удовлетворять необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка, но не будет оптимальным в действительности (его нагрузка потери устойчивости, вследствие указанных свойств изгибной жёсткости, будет, ожидаемо, ниже, чем таковая нагрузка для первоначального решения).

Следовательно, обсуждаемое первоначальное решение также может использоваться в качестве тестового примера (англ. *benchmark*) для программного обеспечения, предназначенного для оптимизации укладки слоёв пластин, нагружаемых до потери устойчивости.

#### **5.8.4. Квадратная пластина при двустороннем сжатии**

Рассмотрим двусторонне равномерно сжатую квадратную пластину с Рис. 5.21.

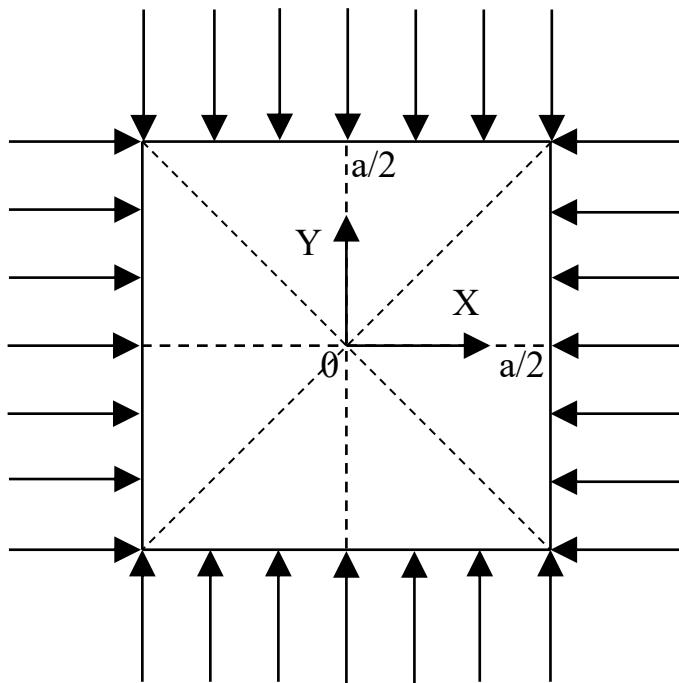


Рис. 5.21. Квадратная пластина при двустороннем сжатии.

Аналогично рассмотрению предыдущего подраздела полагаем, что поле прогибов пластины при потере устойчивости описывается первой симметричной собственной формой. Тогда получаем, что вдоль пунктирных линий, соединяющих центры противоположных сторон, оптимальной ориентацией будет ориентация слоёв  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Случай, когда волокна всех слоёв на какой-то линии имеют одну и ту же ориентацию, не рассматривается по возможным технологическим соображениям.

На диагоналях пластины линии главной кривизны (вследствие симметрии) будут расположены вдоль этих диагоналей и перпендикулярно к ним (очевидно, закручивание отсутствует вдоль этих линий). Следовательно, оптимальной ориентацией вдоль диагоналей пластины будет ориентация

слоёв  $-45^\circ$  и  $+45^\circ$ . При этом указанные слои не обязательно чередуются, их порядок может быть и другим. Объясняется последнее заключение тем, что использованные условия оптимальности являются лишь необходимыми условиями локальной оптимальности первого порядка.

В точках, расположенных на пунктирных линиях Рис. 5.21, можно указать последовательность слоёв оптимальной укладки в частном случае  $K=2$  (четыре слоя, уложенных симметрично). А именно, в точках на линиях, совпадающих с осевыми линиями координат X, Y, внутренний слой ортогонален соответствующей оси. В точках на диагоналях пластины внутренний слой ортогонален соответствующей диагонали. Очевидно, что указанная укладка имеет большую локальную изгибную жёсткость на пунктирных линиях по сравнению с укладкой, в которой внутренний и внешний слои указанной выше укладки взаимно меняют местоположение.

Получающееся последнее решение будет удовлетворять необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка, но не будет оптимальным в действительности (его нагрузка потери устойчивости, вследствие указанных свойств изгибной жёсткости, будет, ожидаемо, ниже, чем таковая нагрузка для первоначального решения).

Следовательно, обсуждаемое первоначальное решение может использоваться в качестве тестового примера (англ. *benchmark*) для программного обеспечения, предназначенного для оптимизации укладки слоёв пластин, нагружаемых до потери устойчивости.

### 5.8.5. Квадратная пластина, нагруженная сдвигом

Полагаем (см. Рис. 5.22), что для пластины размером  $a*a$  поле прогибов при потере устойчивости описывается первой собственной формой, симметричной относительно диагоналей. На диагоналях пластины линии главной кривизны

(вследствие симметрии) будут расположены вдоль этих диагоналей и перпендикулярно к ним (очевидно, закручивание отсутствует вдоль этих линий). Следовательно, оптимальной ориентацией вдоль диагоналей пластины будет ориентация слоёв  $-45^\circ$  и  $+45^\circ$ . При этом указанные слои не обязательно чередуются, их порядок может быть и другим. Объясняется последнее заключение тем, что использованные условия оптимальности являются лишь необходимыми условиями локальной оптимальности первого порядка. Случай, когда волокна всех слоёв на какой-то линии имеют одну и ту же ориентацию, не рассматривается по возможным технологическим соображениям.

В точках, расположенных на диагоналях, можно указать последовательность слоёв оптимальной укладки в частном случае  $K=2$  (четыре слоя, уложенных симметрично). А именно, в точках на линиях, совпадающих с диагоналями, внутренний слой ортогонален соответствующей диагонали. Очевидно, что указанная укладка имеет большую локальную изгибную жёсткость на диагоналях по сравнению с укладкой, в которой внутренний и внешний слои указанной выше укладки взаимно меняют местоположение.

Получающееся последнее решение будет удовлетворять необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка, но не будет оптимальным в действительности (его нагрузка потери устойчивости, вследствие указанных свойств изгибной жёсткости, будет, очевидно, ниже, чем таковая нагрузка для первоначального решения).

Следовательно, обсуждаемое первоначальное решение также может использоваться в качестве тестового примера (англ. *benchmark*) для программного обеспечения, предназначенного для оптимизации укладки слоёв пластин, нагружаемых до потери устойчивости.

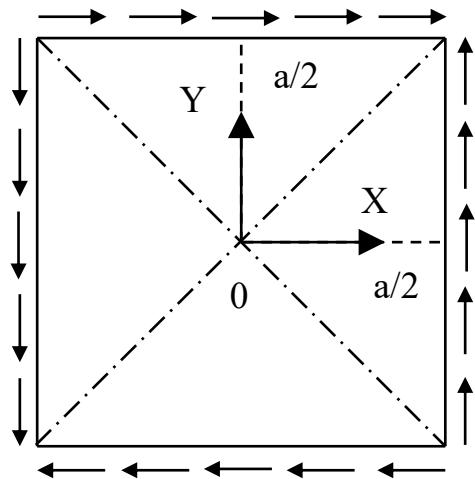


Рис. 5.22. Квадратная пластина при сдвиге.

### 5.8.6. Случай четырёх возможных углов оптимальной ориентации волокон слоёв в некоторой точке пластины

Проиллюстрируем, когда при выполнении условий оптимальности укладки (5.55) может быть равна нулю квадратная скобка в (5.55), а именно, верно соотношение

$$\frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) = 0 , i=1,\dots,K \quad (5.88)$$

Равенство нулю этого выражения возможно (как указывалось ранее), например, в седловой точке деформированной поверхности пластины, где  $k_1 = -k_2$ .

В работе Tenenbaum et al (2019) приведены примеры решений для форм потери устойчивости с точкой двоякой кривизны или с седловой точкой.

Классический пример седловой точки даёт так называемый гиперболический параболоид, уравнение которого записывается в виде (см. Рис. 5.23 и Беклемишев 2015):

$$x^2 - y^2 = 2z \quad (5.89)$$

Сечение этой поверхности плоскостью  $z=0$  даёт две прямые в плоскости  $xy$ , ориентированные к оси  $x$  под углами  $+/- 45^\circ$ . Главные кривизны в точке  $x=y=z=0$  равны +1 и -1, а главными направлениями кривизны являются направления осей  $y$  и  $x$ .

Раз главные кривизны пластины в центральной точке (а это кривизны по  $x$  и по  $y$ ) равны по абсолютной величине между собой, то

$$\cos 2(\theta_i - \psi) = 0 \quad (5.90)$$

и углы  $(\theta_i - \psi)$  равны  $+/- 45^\circ$ , где направление  $\psi$  соответствует оси  $Y$ .

Такое рассмотрение и ведёт к возможным оптимальным углам укладки в этой точке. В зависимости от материала пластины и её нагружения, углы ориентации  $(\theta_i - \psi)$  при  $x=y=0$ , следуя из (5.88), могут отличаться от  $+/- 45^\circ$ .

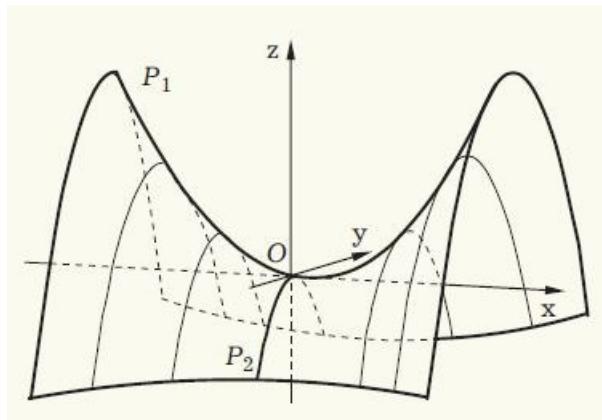


Рис. 5.23. Гиперболический параболоид.

Важно отметить, что в начале координат Рис. 5.23 первый сомножитель вида

$$\sin 2(\theta_i - \psi) = 0, i=1, \dots, K \quad (5.91)$$

условий оптимальности (5.55) будет также равен нулю при  $(\theta_i - \psi)$ , равных  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Таким образом, необходимые условия локальной оптимальности первого порядка в этой точке удовлетворены для четырёх значений угла ориентации слоя.

## **Упражнения**

1. Создать плоское равномерное МКЭ разбиение (для имеющегося в наличии комплекса МКЭ) для прямоугольной плоской пластины размерами 20 см на 20 см. Выбрать число узлов по каждой стороне, необходимое для расчета критической силы потери устойчивости при равномерном сжатии, приложенном на одной из пар сторон.
2. Задать толщину пластины 2.5 мм. Создать три КЭ модели для четырех видов материала: алюминий и три варианта пакетов прямолинейно и симметрично уложенных слоёв (графит/эпоксидная смола t300/5208, см. подраздел 5.5):  $+/-45^\circ$ ,  $0^\circ/90^\circ$ ,  $0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/90^\circ$  (в последнем случае – одинаковое число слоёв по каждому из направлений).
3. Краевые условия – простое опирание.
4. Рассчитать критические силы потери устойчивости для четырёх моделей. Определить наилучшее по точности решения МКЭ разбиение пластины (количество узлов вдоль каждой стороны).
5. Результаты сравнить с аналитическим решением (формула (5.14)).
6. Построить линии главных кривизн и главных моментов, проанализировать закономерности по близости или различию в прохождении этих линий (см. подраздел 5.6.4).
7. Сравнить результаты с аналитическими оптимальными решениями подраздела 5.8.4.

## Глава 6. Умеренные закритические прогибы и выбор наилучшей укладки

### 6.1. Деформирование пластины в соответствии с приближением фон Кармана

Как известно (см. Новожилов 1948, 1958), широко используемые в теории изгиба пластин гипотеза прямых нормалей Кирхгоффа и приближение фон Кармана описывают так называемые умеренные прогибы пластины, сравнимые с ее толщиной, но малые по сравнению с линейным размером пластины. В книге (Reddy 2004) также указывается, что наклон поверхности пластины при этом находится в пределах 15°.

В соответствии с приближением фон Кармана (см. Васидзу 1987) перемещения  $u, v, w$  внутри пластины описываются формулами:

$$\begin{cases} u = u_0 - zw_{0,x} \\ v = v_0 - zw_{0,y} \\ w = w_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

где индексом 0 обозначены перемещения в срединной плоскости.

Компоненты тензора Грина деформаций внутри пластины будут

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2 - zw_{0,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2 - zw_{0,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{0,x} + v_{0,y} + w_{0,x}w_{0,y} - 2zw_{0,xy} \end{cases} \quad (6.2)$$

где деформации в срединной плоскости соответствуют  $z=0$ .

В двух последующих подразделах мы будем опираться на работу Selyugin (2019c).

### 6.2. Кинематический вариационный принцип

Вариационный принцип для общей энергии пластины  $U$  рассмотренной конфигурации записывается в виде равенства нулю вариации этой энергии (Васидзу 1987, Ashton and Whitney 1970):

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{x\nu} u + \bar{N}_{y\nu} v) dC_1 \quad (6.3)$$

где  $\bar{N}_{x\nu}, \bar{N}_{y\nu}$  - это заданные силы на единицу длины контура границы  $C_1$  до деформации (заданные величины перемещений на остающейся части  $C_2$  граничного контура будут помечены далее верхней чертой также),  $\pi(x, y)$  - это потенциальная энергия деформации пластины на единицу площади срединной поверхности до деформации. Эта энергия выводится из потенциальной энергии деформации слоя интегрированием по толщине пластины.

Компоненты тензора деформаций Грина слоя – это  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ . Удельная потенциальная энергия деформации слоя  $\pi_{ply}$  в объеме до деформации записывается в виде (Gibson 1994):

$$\pi_{ply} = \frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_y^2 + 2 \bar{Q}_{66} \varepsilon_{xy}^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2 \bar{Q}_{16} \varepsilon_x \varepsilon_{xy} + 2 \bar{Q}_{26} \varepsilon_y \varepsilon_{xy} \quad (6.4)$$

где напряжения в слое  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  связаны соотношением:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

где  $\bar{Q}_{ij}, i,j=1,2,6$ , - матрица упругих констант слоя. Это соотношение уже приводилось в предыдущих Главах и выписано здесь для наглядности.

Компоненты первого тензора напряжений Пиола  $\sigma_{ij}^p$  и второго тензора напряжений Кирхгофа  $\sigma_{ij}$  даются соотношениями (как оговорено ранее,  $u, v, w$  эквивалентно записи  $v_i, i = 1,2,3$ , соответственно):

$$\sigma_{ij}^p = \frac{\partial \pi(v_{i,j})}{\partial v_{j,i}} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \pi(e_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.6)$$

где  $\pi(\dots)$  это плотность потенциальной энергии деформации в единице недеформированного объема. Вообще говоря, тензор  $\sigma_{ij}^p$  является несимметричным. Вычисляя компоненты этого тензора для слоя, получаем:

$$\sigma_{xx}^p = \bar{Q}_{11} \left( v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{12} \left( v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{16} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}) \quad (6.7)$$

$$\sigma_{yy}^p = \bar{Q}_{12} \left( v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{22} \left( v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{26} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}) \quad (6.8)$$

$$\sigma_{xy}^p = \sigma_{yx}^p = \bar{Q}_{16} \left( v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{26} \left( v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{66} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}) \quad (6.9)$$

Непосредственное дифференцирование (6.4) в соответствии с (6.6) даёт  $xx$ ,  $yy$ ,  $xy$ ,  $yx$  компоненты тензора напряжений Кирхгоффа равными (6.7)-(6.9), соответственно.

Используя известные соотношения (см. Васидзу 1987 и упомянутое выше равенство компонент в плоскости для двух тензоров напряжений)

$$\sigma_{xz}^p = \sigma_{xx}^p v_{z,x} + \sigma_{xy}^p v_{z,y} \quad (6.10)$$

$$\sigma_{yz}^p = \sigma_{yx}^p v_{z,x} + \sigma_{yy}^p v_{z,y} \quad (6.11)$$

получаем остающиеся ненулевые компоненты тензора  $\sigma_{ij}^p$ . Компоненты тензора  $\sigma_{ij}$ , отличающиеся от  $xx$ ,  $yy$ ,  $xy$ ,  $yx$ , равны нулю.

Интегрируя по  $z$  через всю толщину пластины, введём следующие результирующие силы и моменты  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$ :

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^p) dz \quad (6.12)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yy}^p) dz \quad (6.13)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xy}^p) dz \quad (6.14)$$

$$N_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xz}^p) dz \quad (6.15)$$

$$N_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yz}^p) dz \quad (6.16)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xx}^p) dz \quad (6.17)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{yy}^p) dz \quad (6.18)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xy}^p) dz \quad (6.19)$$

Подставляя (6.7)-(6.11) в (6.12)-(6.19) и вспоминая определение матриц жесткости  $A$ ,  $D$  для пластины через  $\bar{Q}_{ij}$ ,  $i,j=1,2,6$  (см. предыдущие Главы и Gibson 1994), получаем эти силы и моменты.

Перепишем формулу для общей энергии пластины в виде

$$U = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \vec{k}^T D \vec{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{x\nu} u + \bar{N}_{y\nu} v) dC_1 \quad (6.20)$$

где вектор-столбцы  $\vec{\varepsilon}_0, \vec{k}$  есть, соответственно, 2D-деформации и кривизны срединной поверхности пластины.

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \Big|_{z=0} ; \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{pmatrix} \Big|_{z=0}$$

Первый интеграл в (6.20) получается из (6.4) (с учётом (6.1) и (6.2)) после интегрирования по толщине.

Вариация энергии (6.20) будет

$$\delta U = \int_{\Gamma} \delta \left( \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \vec{k}^T D \vec{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{x\nu} \delta u + \bar{N}_{y\nu} \delta v) dC_1 \quad (6.21)$$

Используя известное соотношение

$$\delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial v_{j,i}} \delta v_{j,i} = \sigma_{ij}^p \delta v_{j,i} \quad (6.22)$$

и подставляя в него (6.1) для вычисления производных перемещений, после интегрирования по толщине пластины получаем вариацию потенциальной энергии деформации на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned}\delta\pi = & N_{xx}\delta u_{,x} + N_{yy}\delta u_{,y} + N_{xy}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) + N_{xz}\delta w_{,x} + N_{yz}\delta w_{,y} - M_{xx}\delta w_{,xx} \\ & - M_{yy}\delta w_{,yy} - 2M_{xy}\delta w_{,xy}\end{aligned}\quad (6.23)$$

Далее обозначим  $n_x, n_y$  компоненты нормального вектора к граничному контуру для  $\Gamma$ . Используя их, введем  $x, y, z$  компоненты погонных сил  $N_{xv}, N_{yv}, N_{zv}$  и погонных моментов на границе:

$$\begin{cases} N_{xv} = n_x N_{xx} + n_y N_{yx} \\ N_{yv} = n_x N_{xy} + n_y N_{yy} \\ N_{zv} = n_x N_{xz} + n_y N_{yz} \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\begin{cases} M_{xv} = n_x M_{xx} + n_y M_{yx} \\ M_{yv} = n_x M_{xy} + n_y M_{yy} \\ M_v = n_x M_{xz} + n_y M_{yz} \end{cases}$$

Далее мы будем использовать  $x$  и  $y$  компоненты нормали  $n_x, n_y$  к недеформированному граничному контуру

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= n_x \frac{\partial}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= n_y \frac{\partial}{\partial n} + n_x \frac{\partial}{\partial s}\end{aligned}\quad (6.25)$$

где  $n, s$  – это нормальное и тангенциальное направление к контуру. Интегрируя (6.21) по частям и используя теорему Гаусса, получаем вариацию общей энергии пластины:

$$\begin{aligned}\delta U = & - \int_{\Gamma} \left[ (N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v + \right. \\ & \left. (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})\delta w \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} [(N_{xv} - \bar{N}_{xv})\delta u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})\delta v + N_{zv}\delta w - M_v\delta w_n] dC_1 + \\ & + \int_{C_2} [(N_{xv}\delta u + N_{yv}\delta v + N_{zv}\delta w - M_v\delta w_n)] dC_2\end{aligned}\quad (6.26)$$

На части  $C_2$  граничного контура имеем:

$$\delta u = \delta v = \delta w = M_v\delta w_n = 0 \quad (6.27)$$

где последний член описывает и условия защемления, и простое опирание. Тогда стационарность  $U$  по перемещениям ведёт к уравнениям равновесия пластины в  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

где, в соответствии с (6.10), (6.11), (6.15), (6.16):

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_{xx}w_x + N_{xy}w_y \\ N_{yz} &= N_{yx}w_x + N_{yy}w_y \end{aligned} \quad (6.29)$$

Третье уравнение в (6.26), после подстановки в (6.29), ведёт к известному уравнению  $z$ -равновесия пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.30)$$

Линейные краевые условия на  $C_1$  будут:

$$\begin{aligned} N_{x\nu} - \bar{N}_{x\nu} &= 0 \\ N_{y\nu} - \bar{N}_{y\nu} &= 0 \\ N_{z\nu} &= 0 \\ M_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

На условиях в точках негладкости граничного контура мы здесь останавливаться не будем; соответствующий подход описан у (Васидзу 1987).

Далее примем, что нагрузка в плоскости имеет величину, ненамного превышающую нагрузку потери устойчивости; граничные условия — простая опора или защемление.

Исследуем пластину вблизи точки бифуркации, используя подход, описанный в (Алфутов 1978, § 30), и классическую теорию слоистых пластин (Gibson, 1994). В описании Алфутова предполагается, что вблизи точки бифуркации конструкция напряжена, но не деформирована. Согласно

подходу, предложенному Тимошенко, смещения точек пластины в их новом (возмущенном) состоянии составляют:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 \\ v &= v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 \\ w &= w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

где  $\alpha$  — бесконечно малый параметр,  $(u_0, v_0, w_0)$  — невозмущенные функции положения начальных точек,  $(u_1, v_1, w_1)$  и  $(u_2, v_2, w_2)$  — некоторые конечные функции координат.

Применяя подход Тимошенко, получаем функции перемещений  $w_1(x, y), u_2(x, y), v_2(x, y)$  и функцию напряжений Эйри  $\Phi(x, y)$ , удовлетворяющие всем граничным условиям задачи. Для последней функции выполнены, по определению, соотношения для напряжений  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Далее примем приближенно, что при малых, но конечных прогибах пластины состояние пластины описывается следующими функциями ( $\gamma$  — малый параметр):

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \gamma w_1(x, y) \\ u(x, y) &= \gamma^2 u_2(x, y) \\ v(x, y) &= \gamma^2 v_2(x, y) \\ \Phi(x, y) &= \gamma^2 \Phi(x, y) \end{aligned} \quad (6.33)$$

В этом случае изменение полной энергии пластины  $U$  из-за отклонений от исходного плоского состояния равновесия выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U - U_0 \\ &= \gamma^2 \frac{1}{2} \int_{\Gamma} dx dy \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} - \\ &\quad - \gamma^2 \oint_C (q_x u_2 + q_y v_2) dC + \gamma^4 W_4 \end{aligned} \quad (6.34)$$

где  $U_0$  — полная энергия пластины, не зависящая от  $\gamma$ ;  $D$  — матрица изгибной жёсткости пластины;  $q_x, q_y$  — потоки напряжений на граничном контуре  $C$  вокруг пластины  $\Gamma$ . Величина  $W_4$  определяется выражением:

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma} dx dy \{ A_{11} \varepsilon_x''^2 + 2A_{12} \varepsilon_x'' \varepsilon_y'' + A_{22} \varepsilon_y''^2 + 4A_{16} \varepsilon_x'' \varepsilon_{xy}'' + 4A_{26} \varepsilon_y'' \varepsilon_{xy}'' + 4A_{66} \varepsilon_{xy}''^2 \} \quad (6.35)$$

где  $A$  — матрица жесткости пластины при плоском деформировании,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x'' &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y'' &= \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{xy}'' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Поскольку функции  $w_1, u_2, v_2, \Phi$  от  $(x, y)$  известны как результаты задачи о линейной устойчивости пластины, поведение пластины после потери устойчивости вблизи точки бифуркации определяется только параметром  $\gamma$ .

Очевидно, что величина  $W_4$  (как величина энергии) всегда положительно определена; это приводит к выводу, что после прохождения точки бифуркации (при сделанных предположениях) полная энергия пластины является выпуклой функцией перемещений.

На основании этого вывода можно утверждать, что кинематический вариационный принцип пластин при умеренных закритических прогибах (см. выше в данном разделе) является минимальным вариационным принципом. Более того, результат (перемещения), вытекающий из принципа, единственен. В связи со сказанным, вторая вариация полной энергии по перемещениям положительна, и поведение пластины устойчиво при достаточно малых (но не бесконечно малых) закритических перемещениях.

Связь между  $\gamma$  и нагрузкой выше точки бифуркации может быть найдена из условия стационарности полной потенциальной энергии. На примере пластины, одноосно сжатой силой  $P$ , вычисляя производную от (6.34) по  $\gamma$ , имеем

$$\gamma[P_{cr} - P] + 4\gamma^3 W_4 \frac{1}{\beta} = 0 \quad (6.37)$$

где величина  $\beta$  и критическая сила сжатия  $P_{cr}$  имеют вид:

$$\beta = 2 \oint_C (\bar{q}_x u_2 + \bar{q}_y v_2) dC \quad (6.38)$$

$$P_{cr} = \frac{\int_{\Gamma} dx dy \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \right.}{\beta} \\ \left. + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}}{\beta} \quad (6.39)$$

Здесь  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  - это распределение внешней нагрузки для  $P=1$ .

Выполняя  $\gamma \rightarrow 0$ , получаем нагрузку потери устойчивости. Для  $\gamma$ , не равного нулю, имеем

$$\gamma = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{cr}}} \quad (6.40)$$

$$\text{где } \Delta P = P - P_{cr} \text{ и } \Omega = \sqrt{\frac{2V_1}{W_4}}.$$

$V_1$  дается формулой:

$$V_1 = \int_S dx dy \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (6.41)$$

Из последнего соотношения следует, что в случае  $\frac{\Delta P}{P_{cr}} \ll 1$  приложенная нагрузка  $P$  является квадратичной функцией максимального прогиба  $w_{max}$ .

### 6.3. Статический вариационный принцип (теорема о дополнительной энергии)

Рассмотрим вариационный принцип, описывающий равновесие пластины при закритических прогибах через силы и напряжения.

Плотность дополнительной энергии слоя  $\pi_{c\_ply}$  и плотность потенциальной энергии деформации слоя  $\pi_{ply}$  удовлетворяют преобразованию Лежандра (в случае, если градиент перемещений может быть выражен через первый тензор напряжений Пиола):

$$\pi_{c\_ply} = (\sigma_{ij}^p)v_{l,k} - \pi_{ply}(v_{i,j}) \quad (6.42)$$

Используя (6.1), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{lk}^p v_{l,k} &= \sigma_{xx}^p(u_{,x} - zw_{,xx}) + \sigma_{yy}^p(u_{,y} - zw_{,yy}) + \sigma_{xy}^p(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy}) + \\ &\quad \sigma_{xz}^p w_{,x} + \sigma_{yz}^p w_{,y} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Соотношение (6.42) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \pi_{ply} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p)\left(u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p)\left(v_{,y} - zw_{,yy} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p)(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Вычитая (6.44) из (6.43), получаем плотность дополнительной энергии слоя:

$$\begin{aligned} \pi_{c\_ply} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p)\left(u_{,x} - zw_{,xx} - \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p)\left(v_{,y} - zw_{,yy} - \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p)(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} - w_{,x}w_{,y}) + (\sigma_{xz}^p)w_{,x} + (\sigma_{yz}^p)w_{,y} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Интегрируя (6.45) по  $z$  по толщине пластины, получаем дополнительную энергию  $\pi_c$  на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \pi_c &= \frac{1}{2}N_{xx}\left(u_{,x} - \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}N_{yy}\left(v_{,y} - \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \frac{1}{2}N_{xy}(u_{,y} + v_{,x} - w_{,x}w_{,y}) \\ &\quad + N_{xz}w_{,x} + N_{yz}w_{,y} + \\ &\quad + \frac{1}{2}M_{xx}(-w_{,xx}) + \frac{1}{2}M_{yy}(-w_{,yy}) + \frac{1}{2}M_{xy}(-2w_{,xy}) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Интегрируя (6.10), (6.11) по толщине пластины, имеем

$$w_{,x} = \frac{N_{yy}N_{xz} - N_{xy}N_{yz}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_1(N_{ij}) \quad (6.47)$$

$$w_{,y} = \frac{N_{xx}N_{yz} - N_{xy}N_{xz}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_2(N_{ij}) \quad (6.48)$$

Теперь определим вектор-столбцы:

$$\vec{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T \quad (6.49)$$

$$\vec{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T \quad (6.50)$$

Подставляя (6.47)-(6.50) в (6.46), получаем окончательное выражение для плотности дополнительной энергии на единицу недеформированной срединной поверхности:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} + \frac{1}{2} N_{xz} \gamma_1(N_{ij}) + \frac{1}{2} N_{yz} \gamma_2(N_{ij}) \quad (6.51)$$

Функции  $\gamma_1, \gamma_2$  в (6.47), (6.48) – несовместны в случае произвольного напряжённого состояния. Они становятся соответствующими производными прогибов для реального напряжённого состояния.

Для формирования функционала дополнительной энергии  $U_c$  подставим в (6.3) соотношение (6.42), проинтегрированное по толщине пластины. Затем, интегрируя по частям и используя теорему Гаусса, получаем функционал общей энергии  $U$  в виде:

$$\begin{aligned} U = & - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} [N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + N_{xz} \bar{w}] dC_2 - \int_{\Gamma} \left[ \begin{array}{l} (N_{xx,x} + N_{xy,y})u + \\ (N_{xy,x} + N_{yy,y})v \end{array} \right. \\ & \left. + (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})w \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} [(N_{xv} - \bar{N}_{xv})u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})v + N_{zv}w - M_v w_n] dC_1 + \\ & + \int_{C_2} [(N_{xv}u + N_{yv}v + N_{zv}w - M_v w_n)] dC_2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

Ниже используются геометрические краевые условия на  $C_2$ , а именно, то, что значения перемещений – заданы и :

$$u = \bar{u}; v = \bar{v}; w = \bar{w}; M_v w_n = 0 \quad (6.53)$$

Если уравнения равновесия (6.28), (6.29) и статически краевые условия (6.31) справедливы для вариаций напряжённого состояния, тогда вариационный функционал дополнительной энергии  $U_c$ , следующий из (6.52), будет

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} [N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + N_{zv} \bar{w} - M_v w_n] dC_2 \quad (6.54)$$

Вариация  $\pi_c$  будет:

$$\begin{aligned}\delta\pi_c = & \frac{\partial\pi_c}{\partial N_{xx}}\delta N_{xx} + \frac{\partial\pi_c}{\partial N_{yy}}\delta N_{yy} + \frac{\partial\pi_c}{\partial N_{xy}}\delta N_{xy} + \frac{\partial\pi_c}{\partial N_{xz}}\delta N_{xz} + \frac{\partial\pi_c}{\partial N_{yz}}\delta N_{yz} + \\ & + \frac{\partial\pi_c}{\partial M_{xx}}\delta M_{xx} + \frac{\partial\pi_c}{\partial M_{yy}}\delta M_{yy} + \frac{\partial\pi_c}{\partial M_{xy}}\delta M_{xy}\end{aligned}\quad (6.55)$$

Необходимо доказать, что для напряженных состояний, удовлетворяющих условиям статического равновесия (6.28), (6.29) и статическим краевым условиям (6.31), действительное напряженное состояние соответствует стационарной точке функционала общей дополнительной энергии. Рассматривая (6.52), можно сказать, что перемещения в этом соотношении могут трактоваться как множители Лагранжа при поиске указанной точки стационарности (6.54).

Дополним (6.54) членами, соответствующими уравнениям равновесия и статическим краевым условиям с множителями Лагранжа  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ . После этого, используя теорему Гаусса и интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned}\delta U_c = & - \int_{\Gamma} \left[ \delta \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \delta \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} - \left( \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \alpha_{x,x} \right) \delta N_{xx} - \left( \frac{1}{2} \gamma_2^2 + \alpha_{y,y} \right) \delta N_{yy} - \right. \\ & \left. - (\gamma_1 \gamma_2 + \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x}) \delta N_{xy} + (\gamma_1 - \alpha_{z,x}) \delta N_{xz} + (\gamma_2 - \alpha_{z,y}) \delta N_{yz} + \right. \\ & \left. + \alpha_{z,xx} \delta M_{xx} + \alpha_{z,yy} \delta M_{yy} + \alpha_{z,xy} \delta M_{xy} \right] d\Gamma \\ & - \int_{C_2} [(\alpha_x - \bar{u}) \delta N_{xv} + (\alpha_y - \bar{v}) \delta N_{yv} + (\alpha_z - \bar{w}) \delta N_{zv} - (\alpha_{z,n} - \\ & - w_n) \delta M_v] dC_2 = 0\end{aligned}\quad (6.56)$$

Если мы рассмотрим множители Лагранжа как некоторые перемещения, то получим геометрические краевые условия на  $C_2$ :

$$\alpha_x = \bar{u}; \alpha_y = \bar{v}; \alpha_z = \bar{w}; M_v(\alpha_z) = 0 \text{ или } \alpha_{z,n} = \bar{w}_{z,n} \quad (6.57)$$

Также, внутри  $\Gamma$  мы имеем условия совместности для  $\gamma_1, \gamma_2$  как функций  $N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{xz}, N_{yz}$ :

$$\gamma_1 = \alpha_{z,x}; \gamma_2 = \alpha_{z,y} \quad (6.58)$$

и соотношения сила (момент) – перемещение (кривизна):

$$\begin{cases} A_{11}^{-1}N_{xx} + A_{12}^{-1}N_{yy} + A_{16}^{-1}N_{xy} = \alpha_{x,x} + \frac{1}{2}\gamma_1^2 \\ A_{12}^{-1}N_{xx} + A_{22}^{-1}N_{yy} + A_{26}^{-1}N_{xy} = \alpha_{y,y} + \frac{1}{2}\gamma_2^2 \\ A_{16}^{-1}N_{xx} + A_{26}^{-1}N_{yy} + A_{66}^{-1}N_{xy} = \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x} + \gamma_1\gamma_2 \end{cases} \quad (6.59)$$

$$\begin{cases} D_{11}^{-1}M_{xx} + D_{12}^{-1}M_{yy} + D_{16}^{-1}M_{xy} = -\alpha_{z,xx} \\ D_{12}^{-1}M_{xx} + D_{22}^{-1}M_{yy} + D_{26}^{-1}M_{xy} = -\alpha_{z,yy} \\ D_{16}^{-1}M_{xx} + D_{26}^{-1}M_{yy} + D_{66}^{-1}M_{xy} = -\alpha_{z,xy} \end{cases} \quad (6.60)$$

где  $A_{ij}^{-1}, D_{ij}^{-1}$  означают элементы обратных матриц к матрицам  $A, D$ . Правая часть (6.59) выглядит подобно правой части (6.2) для  $z=0$ . Величины  $\alpha_{z,xx}, \alpha_{z,yy}, \alpha_{z,xy}$  могут трактоваться как кривизны пластины. Итак, соотношения (6.58)-(6.60) эквивалентны условию совместности деформаций для пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy0}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy0}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6.61)$$

где  $\varepsilon_{xx0}, \varepsilon_{yy0}, \varepsilon_{xy0}$  - компоненты тензора деформации Грина при  $z=0$ . В обеих частях (6.61) предполагается, что:

$$\begin{cases} u = \alpha_x \\ v = \alpha_y \\ w = \alpha_z \end{cases} \quad (6.62)$$

Таким образом, мы доказали, что стационарное значение функционала общей дополнительной энергии соответствует решению для композиционной пластины при закритическом деформировании.

В заключение заметим, что плотность дополнительной энергии  $\pi_c$  может быть переписана в явном виде как функция от силовых факторов  $N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}, N_{xz}, N_{yz}, M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}$ :

$$\begin{aligned} \pi_c = & \frac{1}{2} \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_{yy}}{N_{xx}N_{yy}-N_{xy}^2} + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_{xx}}{N_{xx}N_{yy}-N_{xy}^2} - \\ & - \frac{N_{xz}N_{yz}N_{xy}}{N_{xx}N_{yy}-N_{xy}^2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Очевидно, что три последних члена при двустороннем сжатии в главных направлениях потоков напряжений дают в сумме отрицательную величину.

#### **6.4. Условия оптимальности для укладки**

При изложении в этом подразделе мы будем опираться на работу Selyugin (2019e).

Общая потенциальная энергия пластины  $U$  (6.20) рассматривается как мера её жёсткости. Эта жёсткость и является величиной, которая должна быть максимизирована за счёт выбора наилучшей укладки. Угол ориентации волокон слоёв может при этом меняться как от точки к точке (такие укладки называются в англоязычной литературе Variable Angle Tow/VAT/Steered Fibre lay-up), так и оставаться постоянным для слоя по всей пластине (в последнем случае мы говорим о прямолинейной укладке слоёв).

В этом подразделе мы рассмотрим сначала случай переменного (от точки к точке) угла ориентации в слоях по пластине. Углы ориентации слоёв  $\theta_i$  предполагаются гладкими функциями от  $(x,y)$ ,  $i=1,\dots,K$ .

Следуя обычной вариационной процедуре (Гельфанд и Фомин 1961) и принимая во внимание кинематический вариационный принцип, указанный выше, получаем необходимые условия локальной оптимальности первого порядка в этом случае. Максимизация жёсткости конструкции означает, что первая вариация  $U$  по углам ориентации равна нулю:

$$\delta U = \delta U|_{\substack{A-\text{non-varied} \\ D-\text{non-varied}}} + \delta U|_{(u,v,w)-\text{non-varied}} = 0 \quad (6.64)$$

Первый член в (6.64) равен нулю вследствие указанного кинематического вариационного принципа. Во втором члене, матрицы  $A$ ,  $D$  являются функциями только углов ориентации слоёв. Из второго члена получаем соотношение для углов ориентации  $i$ -го слоя в текущей точке,  $i=1,\dots,K$ :

$$\delta U|_{(u,v,w)-non-varied} = \sum_{i=1}^N \int d\Gamma \left( \frac{1}{2} \overline{\varepsilon^0}^T \frac{dA}{d\theta_i} \overline{\varepsilon^0} + \frac{1}{2} \overline{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \overline{k} \right) \delta \theta_i = 0 \quad (6.65)$$

и, учитывая независимость  $\theta_i$  величин одна от другой для  $i=1,\dots,K$ , и основную лемму вариационного исчисления, получаем необходимые условия локальной оптимальности первого порядка для максимизации жёсткости пластины при закритических деформациях:

$$\frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_0^T \frac{dA}{d\theta_i} \vec{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \vec{k}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{k} = 0 , \quad i=1,\dots,N \quad (6.66)$$

Далее, вычислим первый член в (6.66), соответствующий 2D-деформациям в срединной плоскости, в осях главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Второй член в (6.66), соответствующий изгибу и кручению пластины, вычислим в осях главных кривизн  $k_1, k_2$ , где  $k_1 \geq k_2$ . Делая необходимые преобразования (6.66) и помня, что абсолютная величина якобиана перехода от осей главных 2D-деформаций к осям главных кривизн равна 1.0 (этот переход является поворотом), получаем для  $i=1,\dots,K$ :

$$\frac{1}{2} \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} \frac{dA_{11}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} \\ \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{22}^{pr.str.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (k_1, k_2) \begin{bmatrix} \frac{dD_{11}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \\ \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{22}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (6.67)$$

где  $pr.str.$ ,  $pr.cur.$  означают величины в осях главных деформаций в срединной плоскости и в осях главных кривизн пластины.

Анализируя (6.67), рассмотрим сначала первый член.

Подставляя в (6.67) соотношения (5.44), (5.47), получаем для каждого  $i$ -го слоя,  $i=1,\dots,K$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \varepsilon_1^2 [-2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + \\ & + \varepsilon_2^2 [2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi) \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} (z_i - z_{i-1}) \quad (6.68)$$

где  $\varphi$  - это угол между глобальной осью  $x$  и осью  $\varepsilon_1$ .

Аналогично второй член для каждого  $i$ -го слоя,  $i=1,\dots,K$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ k_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + \right. \\ & \left. (+k_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + 2k_1 k_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)) \right\} \frac{1}{6} (z_i^3 \\ & - z_{i-1}^3) \end{aligned} \quad (6.69)$$

где  $\psi$  - это угол между глобальной осью  $x$  и осью  $k_1$ .

Сумма (6.68) и (6.69), приравненная нулю, и есть необходимое условие локальной оптимальности первого порядка для каждого слоя,  $i=1,\dots,K$ .

$$\begin{aligned} & \left\{ \varepsilon_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + \right. \\ & \left. (+\varepsilon_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)) \right\} \frac{1}{2} (z_i \\ & - z_{i-1}) \\ & + \left\{ k_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + \right. \\ & \left. (+k_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + 2k_1 k_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)) \right\} \frac{1}{6} (z_i^3 \\ & - z_{i-1}^3) = 0 \end{aligned} \quad (6.70)$$

Как мы видим, эти условия – существенно нелинейные. Преобразуя (6.70), получаем:

$$\begin{aligned} & 2 \sin 2(\theta_i - \varphi) \{ \varepsilon_1^2[-U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi)] + \varepsilon_2^2[U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi)] \\ & + 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi) \} \frac{1}{2} (z_i - z_{i-1}) \\ & + 2 \sin 2(\theta_i - \psi) \{ k_1^2[-U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \psi)] \\ & + k_2^2[U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \psi)] + 8k_1 k_2 U_3 \cos 2(\theta_i - \psi) \} \frac{1}{6} (z_i^3 \\ & - z_{i-1}^3) = 0 \end{aligned} \quad (6.71)$$

и, окончательно, деля на  $-(z_i - z_{i-1})4U_3$ :

$$\begin{aligned} & \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

Как мы видим, зависимость от материала входит через параметр  $\frac{U_2}{4U_3}$ . Точная зависимость от положения слоя по  $z$  входит через последний множитель второго члена. Связь между слоями осуществляется через линии главных 2D-деформаций, линии главных кривизн, значения главных 2D-деформаций и главных кривизн. Несколько ниже мы укажем слои, в которых доминируют первый или второй член условий оптимальности.

Анализируя (6.72), можно сказать, что внешние и внутренние слои играют разные роли в этих соотношениях. В частности, из первого члена в (6.72) следует, что внутренние слои наиболее чувствительны к главным 2D-деформациям и их главным направлениям. А внешние слои, вследствие второго члена с множителем  $z^2$ , наиболее чувствительны к главным кривизнам пластины и их направлениям.

Суммируя (6.71) для всех  $i$  и учитывая (5.34), (5.37), (6.64)-(6.66), получаем следующее объединённое условие:

$$\begin{aligned} & [A_{16}^{pr.str.} \varepsilon_1^2 - A_{26}^{pr.str.} \varepsilon_2^2 - (A_{16}^{pr.str.} - A_{26}^{pr.str.}) \varepsilon_1 \varepsilon_2] + \\ & + [D_{16}^{pr.cur.} k_1^2 - D_{26}^{pr.cur.} k_2^2 - (D_{16}^{pr.cur.} - D_{26}^{pr.cur.}) k_1 k_2] = 0 \end{aligned} \quad (6.73)$$

или, после использования определения матриц жесткости  $A$  и  $D$ , соотношение с ясным физическим смыслом

$$N_{xy}^{pr.str.} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.} (k_1 - k_2) = 0 \quad (6.74)$$

Соотношение (6.74) является линейной комбинацией условий оптимальности (6.71) или (6.72) и, следовательно, является условием оптимальности, объединяющим условия для каждого слоя. Первый член в (6.74), если его рассмотреть отдельно как равный нулю, означает, что тензор 2D-деформаций соосен с тензором потоков напряжений (или, для  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , поток сдвиговых напряжений в осях главных деформаций равен нулю). Второй член в (6.74), если его рассмотреть отдельно как равный нулю, означает, что тензор кривизн соосен с тензором моментов (или, для  $k_1 \neq k_2$ , крутящий момен в главных осях кривизны равен нулю).

Следует отметить, что этот результат, в случае ортотропной пластины с переменной ориентацией ортотропии от точки к точке, следует из (6.74) при  $K=1$ .

Очевидно, что в случае слоёв с прямолинейными волокнами условиями оптимальности для ориентации слоёв будут интегралы по всей площади пластины,  $i=1,\dots,K$ :

$$\begin{aligned} \iint d\Gamma & \left\{ \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] \right. \\ & + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 \\ & \left. + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Аналогом объединяющего условия (6.74) будет

$$\int_{\Gamma} d\Gamma [N_{xy}^{pr.str.} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.} (k_1 - k_2)] = 0 \quad (6.76)$$

Рассмотрим также получение условий оптимальности укладки слоёв переменного по пластине угла ориентации на основе принципа дополнительной энергии.

Функционал (6.64) общей дополнительной энергии композитной пластины после деформации можно также рассматривать как меру податливости пластины. Сформулируем следующую оптимизационную задачу: выбрать углы ориентации слоев симметричной укладки для минимизации податливости пластины.

Плотность дополнительной энергии определяется выражением (6.73). Имея в виду известное равенство дифференцирования обращённой квадратной симметричной матрицы (скажем,  $G$ ) как функции аргумента  $g$  (Корн и Корн, 2003):

$$\frac{d}{dg} G^{-1} = -G^{-1} \frac{dG}{dg} G^{-1}$$

проводим необходимые преобразования (аналогично подходу, применённому в данном подразделе выше) для выполнения соответствующих вариаций сил, моментов и углов ориентации слоёв. После этого мы получаем такие же условия оптимальности углов ориентации слоев, как и в данном разделе выше на основе рассмотрения задачи максимизации жёсткости пластины.

## 6.5. Параметры ламинации для оптимальной укладки

Этот подраздел использует результаты работы (Selyugin 2019b). Формулы для параметров ламинации (5.16) указаны в предыдущей главе. Приведём их здесь ещё раз для наглядности:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4^* \end{bmatrix} &= \frac{2}{h} \int_0^{h/2} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{bmatrix} dz \\ \begin{bmatrix} W_9^* \\ W_{10}^* \\ W_{11}^* \\ W_{12}^* \end{bmatrix} &= \frac{24}{h^3} \int_0^{h/2} z^2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 2\theta \\ \sin 4\theta \end{bmatrix} dz \end{aligned}$$

В данном подразделе введем следующие промежуточные величины:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \\ \beta_1 = \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) \\ \beta_2 = \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^2 \\ \gamma_i = (z_i^3 - z_{i-1}^3); i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (6.77)$$

Перепишем условия оптимальности (6.61) в виде,  $i=1, \dots, K$ :

$$\begin{aligned} \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] (z_i - z_{i-1}) + \\ \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (k_1^2 - k_2^2) + (k_1 - k_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3) = 0 \end{aligned}$$

(6.78)

Преобразуя (6.78) по известным тригонометрическим формулам и суммируя условия оптимальности для  $i=1, \dots, K$ , получаем следующее линейное соотношение для параметров ламинирования в оптимуме по углам укладки:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \left( \frac{h}{2K} \right) \cos(2\varphi) \sum_{i=1}^K \sin(2\theta_i) - \alpha_1 \left( \frac{h}{2K} \right) \sin(2\varphi) \sum_{i=1}^K \cos(2\theta_i) \\
& + \alpha_2 \left( \frac{h}{2K} \right) \cos(4\varphi) \sum_{i=1}^K \sin(4\theta_i) - \\
& - \alpha_2 \left( \frac{h}{2K} \right) \sin(4\varphi) \sum_{i=1}^K \cos(4\theta_i) + \frac{1}{3} \beta_1 \cos(2\psi) \sum_{i=1}^K (\gamma_i \sin(2\theta_i)) \\
& - \frac{1}{3} \beta_1 \sin(2\psi) \sum_{i=1}^K (\gamma_i \cos(2\theta_i)) + \\
& + \frac{1}{3} \beta_2 \cos(4\psi) \sum_{i=1}^K (\gamma_i \sin(4\theta_i)) - \frac{1}{3} \beta_2 \sin(4\psi) \sum_{i=1}^K (\gamma_i \cos(4\theta_i)) = 0
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Это соотношение является фактически скалярным произведением вектор-столбца  $\vec{W}^*$ , составленного из восьми параметров ламинирования и вектор-столбца

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \left(\frac{h}{2}\right)\alpha_1 \cos(2\varphi) \\ -\left(\frac{h}{2}\right)\alpha_1 \sin(2\varphi) \\ \left(\frac{h}{2}\right)\alpha_2 \cos(4\varphi) \\ -\left(\frac{h}{2}\right)\alpha_2 \sin(4\varphi) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \beta_1 \cos(2\psi) \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \beta_1 \sin(2\psi) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \beta_2 \cos(4\psi) \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \beta_2 \sin(4\psi) \end{pmatrix} \quad (6.80)$$

Рассматривая (6.79), можно сказать, что параметры ламинации (после оптимизации только по ним) дают некоторую предварительную информацию относительно всей наилучшей укладки. После этого нужна оптимизация углов ориентации слоёв. Величины главных 2D-деформаций и главных кривизн, также как и поведение линий главных 2D-деформаций и главных кривизн играют важную роль в последующей оптимизации. Гиперплоскость (6.79) для параметров ламинации может быть полезна для начального шага в оптимизации углов ориентации слоёв.

Вектор-столбец (6.80) зависит только от шести величин  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, k_1, k_2, \psi$ . С другой стороны, вектор-столбец параметров ламинации  $\vec{W}^*$  с учётом (6.79) зависит от семи параметров, но имеет восемь компонент. Это означает, что только семь компонент вектор-столбца параметров ламинации в случае поточечных вариаций углов ориентации слоёв, являются линейно независимыми для самой жёсткой (с точки зрения закритического деформирования) укладки слоёв.

С другой стороны, семь линейно-независимых параметров ламинации являются нелинейными функциями шести параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, k_1, k_2, \psi$ .

## **6.6. Особые (ортотропные) решения условий оптимальности**

Обсудим особые решения полученных выше условий (6.72) оптимальности углов ориентации в слоях укладки при закритическом деформировании (Selyugin 2021b).

Соотношения (6.72) справедливы, в частности, когда оба синуса равны нулю. Это означает, что

$$\varphi = \psi \text{ или } \varphi = \psi + \pi/2 \text{ и } \theta_i = \varphi \text{ или } \theta_i = \psi \text{ (для любого } i\text{)} \quad (6.81)$$

являются решениями (6.72). Эти решения соответствуют локально ортотропной укладке слоёв. Действительно, когда соотношение (6.81) справедливо, то главные направления деформаций в срединной плоскости и главные направления кривизн касаются друг друга. Эти ортогональные направления являются направлениями локальной ортотропии.

## **6.7. Примеры**

### **6.7.1. Предварительные замечания**

Ниже мы используем метод конечных элементов (МКЭ) с изопараметрическими прямоугольными четырёхузловыми элементами для анализа и потери устойчивости, и закритического поведения пластин. Проблема устойчивости решается на основе метода Ланцоша. Численные шаги поиска нелинейного решения выше нагрузки потери устойчивости состоят из постепенного увеличения нагрузки, итераций с тестами на сходимость для оценки приемлемости ошибок оценки равновесия, и соответствующих пересчётов матрицы жёсткости. Итерационный процесс основывается на квази-Ньютоновском методе и линейном поиске. Пересчёт матрицы жёсткости производится время от времени для улучшения численной

эффективности, этот пересчёт может быть пропущен (или отложен) по указанию расчётчика. Представленные результаты содержатся в (Selyugin 2019f).

Рассматривается прямоугольная композитная пластина, показанная на Рис. 6.1. Там же показано направление положительного сдвига. Буквами С и Е обозначены нижние угловые точки. Начало координат системы координат  $x$ - $y$  расположено в точке С. Во всех численных примерах этой Главы ниже используются краевые условия простого опирания (они являются наиболее консервативными). Эти условия означают отсутствие прогиба из плоскости XY на контуре.

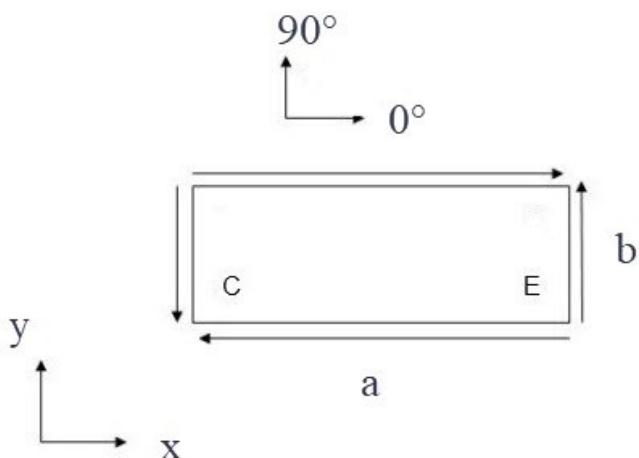


Рис. 6.1. Прямоугольная пластина.

Рис. 6.2. иллюстрирует особенности краевых условий, используемых в МКЭ анализе. В ходе последующего анализа будет получено, что реакции опор С и Е являются пренебрежимо малыми.

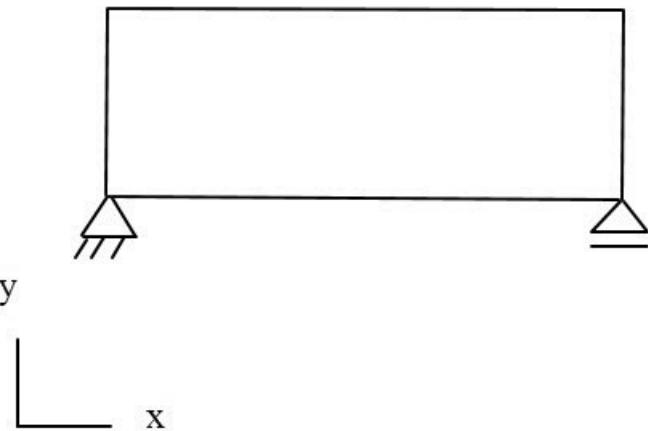


Рис. 6.2. Краевые условия в точках С и Е.

Начальное возмущение для анализа закритического поведения пластины выбирается равным 1.E-05, умноженному на поперечные перемещения первой формы потери устойчивости. Подобный подход успешно применялся в работе (Groh and Weaver 2015). В работе (Raju and Wu 2015) этот множитель был 1%. Здесь мы выполним непосредственную проверку по влиянию максимальной величины начального несовершенства на результаты расчётов. При расчёте закритического поведения пластины такое влияние отсутствует в случае замены 1.E-05 на 1.E-03. Тем не менее, везде ниже мы будем использовать 1.E-05.

При закритическом деформировании предполагается, что переключение с одной формы потери устойчивости на другую отсутствует. Также предполагается, что закритические деформации развиваются в пределах умеренных величин. Последнее предположение необходимо для правильности использования подхода фон Кармана.

В конце данного подраздела, мы рассмотрим возможность использования подхода с краевыми условиями «прямой линии». Эти условия моделируются с помощью балок, расположенных по контуру пластины толщиной 2 мм. Оказалось, что такое усиление повышает уровень нагрузки потери

устойчивости. Что касается закритического поведения пластины, то влияние внутренних (ближних к срединной плоскости) слоёв сохраняется.

После нескольких пробных попыток, был выбран уровень нагрузок за пределами потери устойчивости такой, что максимальная деформация сжатия не превышала 5 % (промилле), подобно (Groh and Weaver 2015). Такой критерий является часто используемым в аэрокосмических приложениях. Очевидно, что этот критерий является лишь приближением к условиям реального разрушения. Подобные условия также должны включать рассмотрение соединений между пластиной и краевым элементом. Ниже мы покажем уменьшение максимального закритического прогиба по сравнению с пластиной укладки +/-45° и равноустойчивыми решениями (Selyugin 2013).

Прямой поиск наилучшей укладки осуществлялся с шагом 1° для каждого слоя с анализом поведения конструкции в каждом узле.

Говоря о примерах, представленных ниже, нужно отметить, что максимальные деформации сжатия не превышали 5 %.

### **6.7.2. Численный подход к анализу потери устойчивости и закритического поведения**

Для верификации нашего подхода сначала представим некоторые данные по сравнению наших результатов с уже известными.

Работа (Zhang and Matthews, 1984) посвящена анализу закритического поведения композитных пластин при сдвиге. Один из примеров, рассмотренный в этой работе, касается бороэпоксидной пластины размером 0.25\*0.25 м с симметричной укладкой [45°, 135°]<sub>S</sub>. Толщина пластины 2.5 мм, она нагружена положительным сдвигом и имеет простое опирание по контуру. Характеристики слоя:  $E_{11}=206.9$  GPa,  $E_{22}=20.7$  GPa, коэффициент Пуассона  $\nu_{12}=0.3$ , модуль сдвига  $G_{12}=5.2$  GPa. Приложенная сдвиговая нагрузка равна 40000 Н/м. В этой работе результаты представлены в безразмерной форме,

используя безразмерный коэффициент нагрузки  $q = \frac{N_{xy}b^2}{E_{22}h^3}$  и безразмерный прогиб в долях толщины пластины  $h$ .

Нами было проведено исследование сходимости при расчете потери устойчивости для этой пластины. Полученное собственное число равнялось 2.553 при сетке 40x40 и 2.549 при сетке 80x80. Следовательно, сетка 40x40 достаточно хороша для определения собственной величины со значением 2.55.

Сравнение с результатами указанной выше работы по закритическому анализу показывает высокое качество подхода, применяемого нами, см. Рис. 6.3. На этом Рисунке сдвиговой поток напряжений отнесен к  $2.55*40000$  Н/м. Потеря устойчивости, согласно этой работе, происходила при  $2.65*40000$  Н/м. Наш МКЭ подход приводит к собственному значению, которое ниже на 4%. Сравнение результатов, полученных нами при двух вариантах сеток (40\*40 and 80\*80), даёт тот же уровень максимального прогиба в центре пластины 8.3 мм при нагрузке  $1.75*2.55*40000$  Н/м = 178500 Н/м.

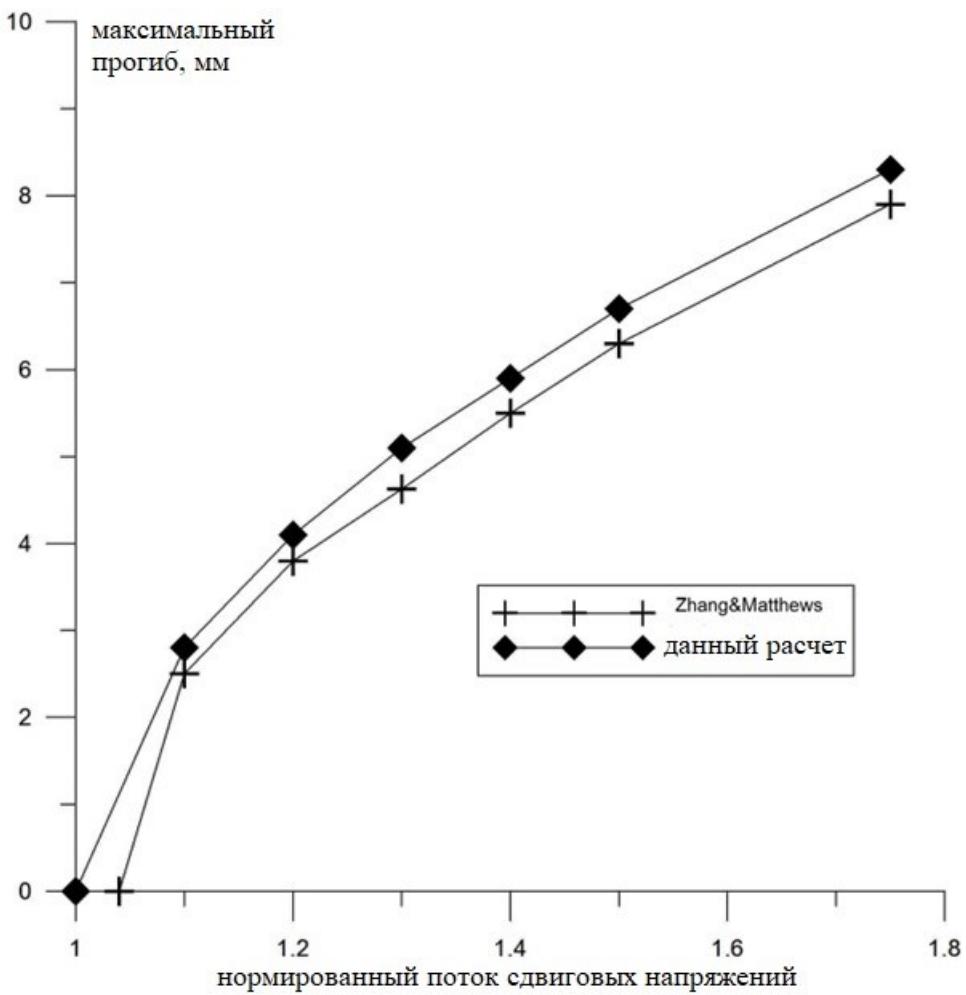


Рис. 6.3. Максимальный прогиб в центре пластины.

Рис. 6.3 показывает, что прогиб в центре по нашим расчётам несколько выше, в сравнении с результатами (Zhang and Matthews, 1984). По нашему мнению, этот факт является следствием более низкой точности у этих коллег, которые использовали 25 членов некоторого разложения. Вследствие этого, их пластина была «жёстче», чем у нас.

Приведенное рассмотрение, по нашему мнению, верифицирует применяемый нами подход.

Далее мы рассмотрим прямоугольные композитные пластины с удлинением  $a/b=2., 3.,$  и  $5.$  Ширина пластин  $b$  везде была  $0.2$  м ( $200$  мм). Пластины изготовлены из материала T300/5208 с толщиной слоя  $0.125$  мм. После

необходимого анализа сходимости размер МКЭ ячейки был выбран 5 мм\* 5 мм.

### **6.7.3. Длинная пластина, нагруженная сдвигом в одном направлении**

Рассматривается длинная прямоугольная пластина с удлинением  $a/b=5$  и толщиной 5 мм.

Используется симметричная укладка из 16 прямолинейных слоёв. Пластина нагружена сдвигом 50000 Н/м (называемым ниже уровнем масштабирования нагрузки), умноженным на некоторый коэффициент.

В соответствии с работой (Selyugin 2013), наилучшей ориентацией для повышения уровня нагрузки потери устойчивости при положительном сдвиге является  $120^\circ$  для всех слоёв (этот результат, безусловно, носит академический характер). Собственное значение потери устойчивости при этом равно 2.83 ( $a/b=5$ ). Ниже в этом подразделе мы проведём сравнение нескольких возможных укладок, рассматривая нагружение выше уровня нагрузки потери устойчивости до 1.2 (в англоязычной литературе этот коэффициент называют Post-Buckling Ratio или PBR). Мы будем называть этот коэффициент КЗН как аббревиатуру Коэффициента Закритической Нагрузки. КЗН=1.2 означает, что общий сдвиговой поток =  $1.2*2.83*50000$  Н/м. Выбор 1.2 как величины КЗН следует из необходимости оставаться в области умеренных прогибов ( эта умеренность входит в приближение фон Кармана).

Рассмотрим следующий пример для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_8]_s$ . Два ближайших к срединной плоскости слоя совместно меняют угол ориентации (фактически, это четыре слоя вследствие симметрии укладки). В итоге появляется пластина с укладкой  $[[120^\circ]_6, [\theta]_2]_s$ , где угол  $\theta$  должен быть определён путём численной минимизации 2D деформации сжатия и, если возможно, максимального прогиба. Количество внутренних слоёв четыре

было выбрано произвольно, в надежде слабых изменений нагрузки потерять устойчивости при этом.

Рис. 6.4. иллюстрирует форму поверхности пластины  $[[120^\circ]_8]_S$  при закритическом деформировании. Были получены следующие величины: 12.2 мм как максимальный прогиб и 7.0E-03 как максимальная 2D деформация сжатия.

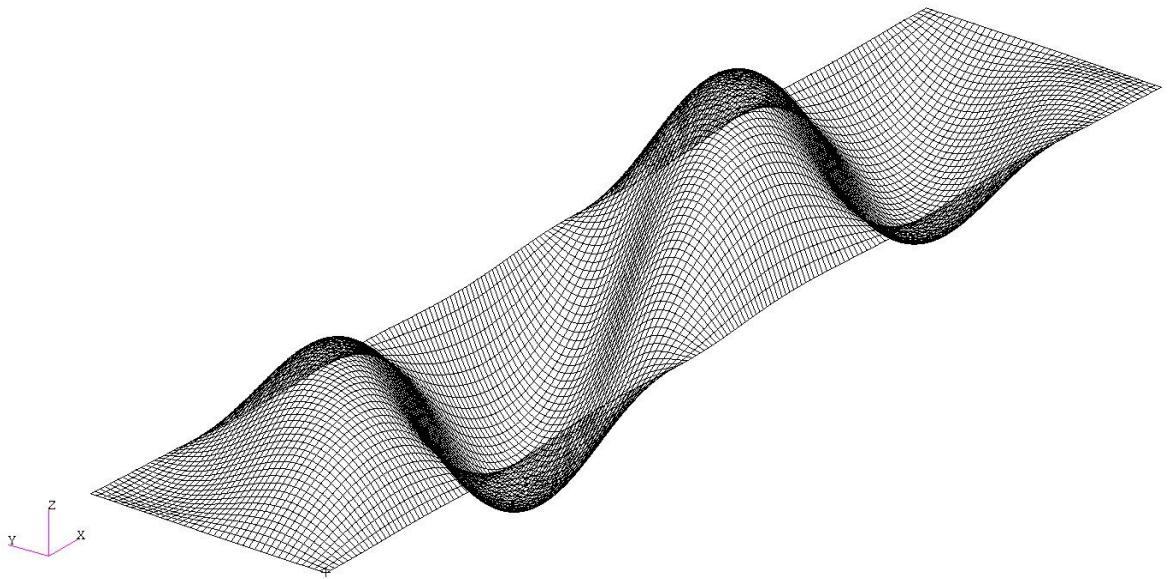


Рис. 6.4.  $a/b=5$ , lay-up  $[[120^\circ]_6, [-4^\circ]_2]_S$ , форма поверхности при КЗН=1.2.

Пластина с укладкой  $[[120^\circ]_6, [-4^\circ]_2]_S$  явилась результатом численного поиска наилучшей укладки. Этот результат соответствует укладке с минимальным уровнем максимальной 2D деформации сжатия. Последняя пластина имеет максимальную 2D деформацию сжатия 4.9E-03 (70% по сравнению с пластиной  $[[120^\circ]_8]_S$ ), максимальный прогиб 6.9 мм (57% по сравнению с пластиной  $[[120^\circ]_8]_S$ ) и собственное значение потери устойчивости 2.80. Как и ожидалось, это собственное значение слегка ( $\sim 1\%$ )

уменьшается. Также интересно, что угол между осью X и направлением главной деформации (растяжение) в срединной плоскости находится в узком диапазоне между  $60^\circ$  и  $52^\circ$ , концентрируясь ближе к  $52^\circ$ .

Укладка пластины  $[[120^\circ]_6,[4^\circ]_2]_s$  была получена путем численного поиска минимума максимального прогиба. Эта пластина имеет максимальный прогиб 6.6 мм (54% от прогиба для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_8]_s$ ), максимальную сжимающую деформацию 5.2E-03 (74% от таковой для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_8]_s$ ) и наименьшее собственное значение потери устойчивости 2.80.

Очевидно, что разница в приведенных выше результатах для двух укладок довольно мала. Полученные результаты означают, что при практическом проектировании можно использовать решение  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_s$ , дающее почти наименьший прогиб 6.7 мм и максимальную деформацию сжатия 5.0E-03.

Рис. 6.5 показывает деформированную поверхность пластины  $[[120^\circ]_6,[-4^\circ]_2]_s$ . Анализ результатов расчётов приводит к выводу, что её деформированная поверхность близка к таковой для укладки  $[[120^\circ]_8]_s$ .

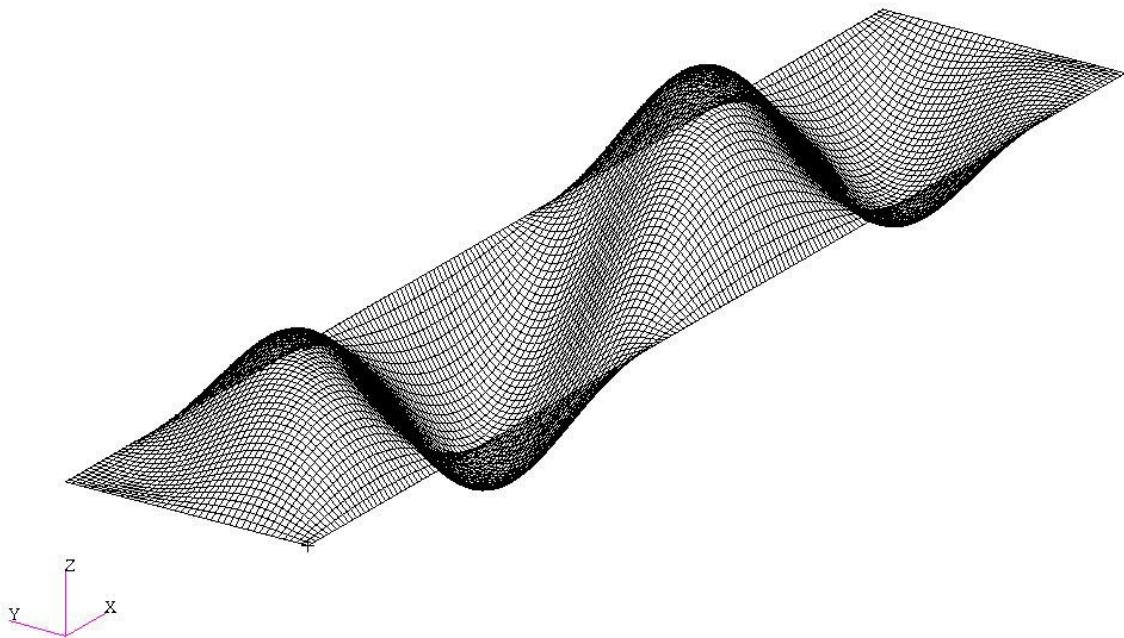


Рис. 6.5.  $a/b=5$ , lay-up  $[[120^\circ]_6,[-4^\circ]_2]_s$ . Деформированная поверхность.

В Табл. 6.1 приведены результаты для пластин  $[[120^\circ]_8]_S$  and  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ . В этой Табл. приведены данные по расположению точек максимального прогиба, расположению точек максимальной деформации сжатия, направлениям главных деформаций. Как мы видим, изменения в местоположениях невелики, но приведенные величины изменяются существенно. Также видно, что точки расположения имеют некоторую симметрию.

Анализируя результаты, приведенные в Табл. 6.1, видно, что величины максимального прогиба и максимальной деформации сжатия уменьшаются существенно (55% и 71% от соответствующих значений для укладки  $[[120^\circ]_8]_S$ ), причём значение угла ориентации выше, чем для  $[[120^\circ]_8]_S$ . Расположение же пиковых значений в этой Табл. изменяется незначительно. Угол ориентации для случая максимальной деформации сжатия изменяется до некоторой степени.

Укладка	Макс. прогиб, мм	Макс. деформ. сжатия	Коорд-ты ( $x, y$ ), мм	Наименьш. главная деформ., угол с осью X, °	Нижняя (L) или верхняя (U) поверх-ть пластины
$[[120^\circ]_8]_s$	12.2		(625., 100.)		
$[[120^\circ]_8]_s$	-12.2		(375., 100.)		
$[[120^\circ]_8]_s$		7.0E-03	(487.5, 32.5)	-47.7	U
$[[120^\circ]_8]_s$		7.0E-03	(512.5, 167.5)	-47.7	L
$[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_s$	6,7		(630., 100.)		
$[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_s$	-6,7		(370., 100.)		
$[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_s$		5.0E-03	(517.5, 172.5)	-40.4	U
$[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_s$		5.0E-03	(482.5, 27.5)	-40.4	L

Табл. 6.1. Результаты расчётов, положительное нагружение,  $a/b = 5$ ,  $h = 2$  мм

Рис. 6.6 и 6.7 показывают положение точек максимума из Табл. 6.1.



Рис. 6.6. Положение точек максимума прогибов (верх  $[[120^\circ]_8]_S$ , низ  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ ).



Рис. 6.7. Положение точек максимума деформации сжатия и ее ориентация (верх  $[[120^\circ]_8]_S$ , низ  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ ).

Обобщая приведенные выше результаты, можно сказать, что ориентация слоёв вблизи срединной поверхности пластины существенно влияет на ее закритическое поведение, а собственное значение потери устойчивости при этом меняется незначительно.

Обсудим также возможность использования так называемых краевых условий «прямой линии». Рассмотрим пластину с укладкой  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ , по контуру которой прикреплены алюминиевые балки с квадратным сечением 5 мм \* 5 мм. Сдвиговое собственное значение пластины будет равно 3.03, а собственная форма потери устойчивости будет подобна форме без балок на контуре, показанной на Рис. 6.4. Балки имеют ненулевые продольную и изгибную (в плоскости XY) жёсткости. Для пластины по-прежнему используются условия простого опирания. Для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_8]_S$  с теми же балками на контуре и краевыми условиями собственное значение будет равно 3.06 (8% разницы с исходным значением 2.83 для пластины  $[[120^\circ]_8]_S$  без балок на контуре). Используя сдвиговую нагрузку выше нагрузки потери устойчивости, до уровня  $1.2*3.06*50000$  Н/м = 183600 Н/м, мы получаем следующие характеристики закритического поведения пластины:

- для укладки  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ : максимальная деформация сжатия 5.4E-03 и максимальный прогиб 7.4 мм;
- для укладки  $[[120^\circ]_8]_S$ : максимальная деформация сжатия 7.7E-03 и максимальный прогиб 13.6 mm.

Отметим, что с ростом сечения балок до 10 мм\*10 мм собственные значения (для пластин с укладкой  $[[120^\circ]_8]_S$  и  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$ ) возрастают значительно и становятся 4.15 и 4.11, соответственно. Кромки контура при закритическом деформировании под нагрузкой  $1.1*4.11*50000$  Н/м всё еще не являются прямолинейными (эта величина нагрузки выбрана для того, чтобы максимальная деформация сжатия не была слишком больше, чем 5.E-03). Для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_8]_S$  максимальный прогиб и максимальная деформация сжатия были 8.7 мм и 6.3E-03, соответственно. Для пластины с укладкой  $[[120^\circ]_6,[0^\circ]_2]_S$  максимальный прогиб и максимальная деформация сжатия были 5.0 мм и 5.4E-03, соответственно. Выводы, следующие из этого анализа пластин, усиленных по контуру (для моделирования условий «прямой линии»), таковы: 1) последние условия ведут к значительно более высокому

собственному значению потери устойчивости, 2) при закритическом нагружении ориентация слоёв вблизи срединной плоскости, тем не менее, влияет на поведение пластины.

По нашему мнению, условия простого опирания, используемые нами, позволяют исследовать работу только пластины и идентифицировать особенности её поведения при закритическом деформировании.

Упругие ограничения на вращение кромок и их влияние на закритическое поведение конструкции также должны быть исследованы аналогичным образом.

#### **6.7.4. Пластины при нагружении сдвигом в двух противоположных направлениях**

В этом подразделе мы проведём численные исследования пластин различных удлинений и толщин (как и ранее, с точностью прямой оптимизации 1°). Пластины нагружены сдвиговым нагружением в двух противоположных направлениях. Для решений «равного уровня потери устойчивости» мы используем результаты (Selyugin 2013). В анализе этого подраздела уровень потери устойчивости также учитывается. А именно, поиск наилучших углов ориентации слоёв, ближайших к срединной плоскости, осуществляется начиная с решений, полученных для «равного уровня потери устойчивости». В дальнейшем описании мы говорим о решениях с высоким сопротивлением к потере устойчивости и закритическому деформированию. Это означает, что в ходе поиска максимальное значение закритических деформаций сжатия достигает наименьшего значения. Величина максимального прогиба также контролируется.

##### **Пластина $a/b=5$ , толщина 2 мм**

Рассматриваются три варианта пластины с закритическим деформированием: 1) пластина  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$  (собственные значения потери устойчивости 1.29 и -1.66), 2) пластина  $[[74^\circ, 134^\circ]_4]_s$  с примерно одинаковым уровнем потери устойчивости для обоих направлений (1.69 и -1.70), 3) вариант с ориентациями слоёв от второго варианта, при этом ориентации двух ближайших к срединной плоскости слоёв выбираются из условий максимизации сопротивления закритическим деформациям. Предполагается, что в третьем случае собственные значения потери устойчивости меняются незначительно.

Нагружение выполняется с КЗН (коэффициентом закритической нагрузки)=1.5 по отношению к уровню потери устойчивости 1.29; это означает, что максимальный сдвиговой поток равен  $1.5 * 1.29 * 50000 \text{ Н/м} = 1.935 * 50000 \text{ Н/м} = 96750 \text{ Н/м}$ .

Третий вариант приводит к решению  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_s$ , с собственными значениями потери устойчивости 1.69 и -1.69. В Табл. 6.2 представлены результаты расчётов. Мы видим, что нижняя строка этой Табл. содержит наилучшие результаты, и с точки зрения потери устойчивости, и с точки зрения закритического поведения пластины.

	«Положительное» нагружение $1.935=1.5*1.29$				«Отрицательное» нагружение 1.935		
Вариант расчёта	max прогиб, мм	max деформа- ция сжатия	min собст. значе- ние	max прогиб мм	max деформа- ция сжатия	min собст. значе- ние	
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$	14.8	9.2E-03	1.29	8.4	4.5E-03	-1.66	
$[[74^\circ, 134^\circ]_4]_s$ , “равноустойчи- вость”	5.3	3.8E-03	1.69	4.0	4.2E-03	-1.70	
$[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_s$	3.2	2.4E-03	1.69	2.6	2.4E-03	-1.69	

Табл. 6.2. Результаты для пластины с толщиной 2 мм и  $a/b=5$ .

Соответствующие формы закритически деформированных пластин при положительном направлении сдвигового нагружения показаны на Рис. 6.8-6.10.

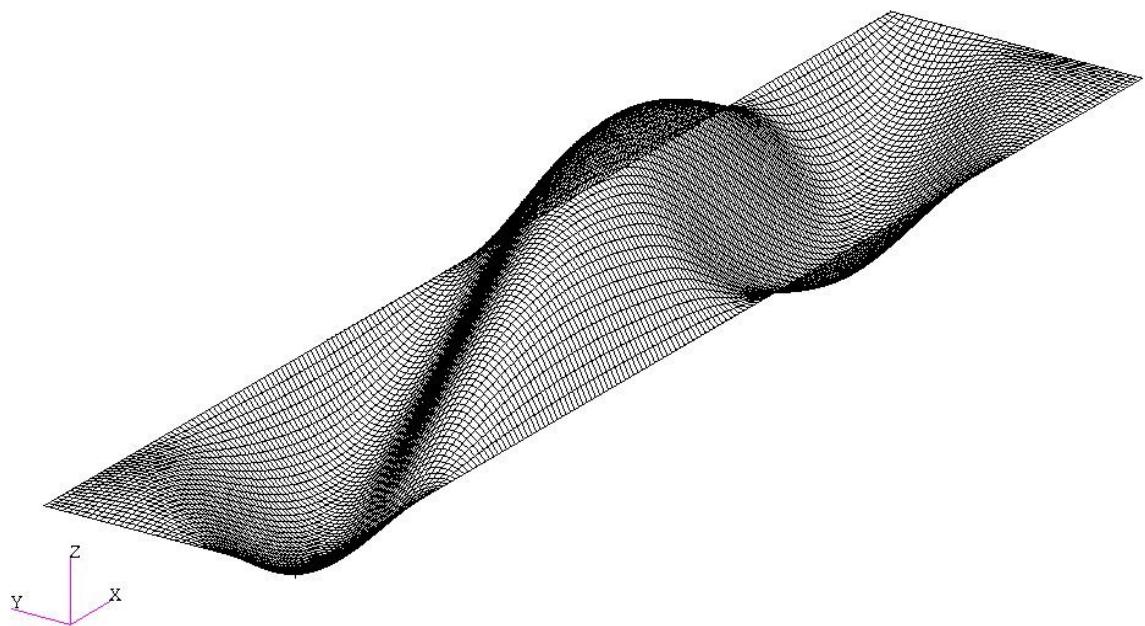


Рис. 6.8. Закритически деформированная пластина, укладка  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$ ,  
 $a/b=5$ , «положительное» сдвиговое нагружение.

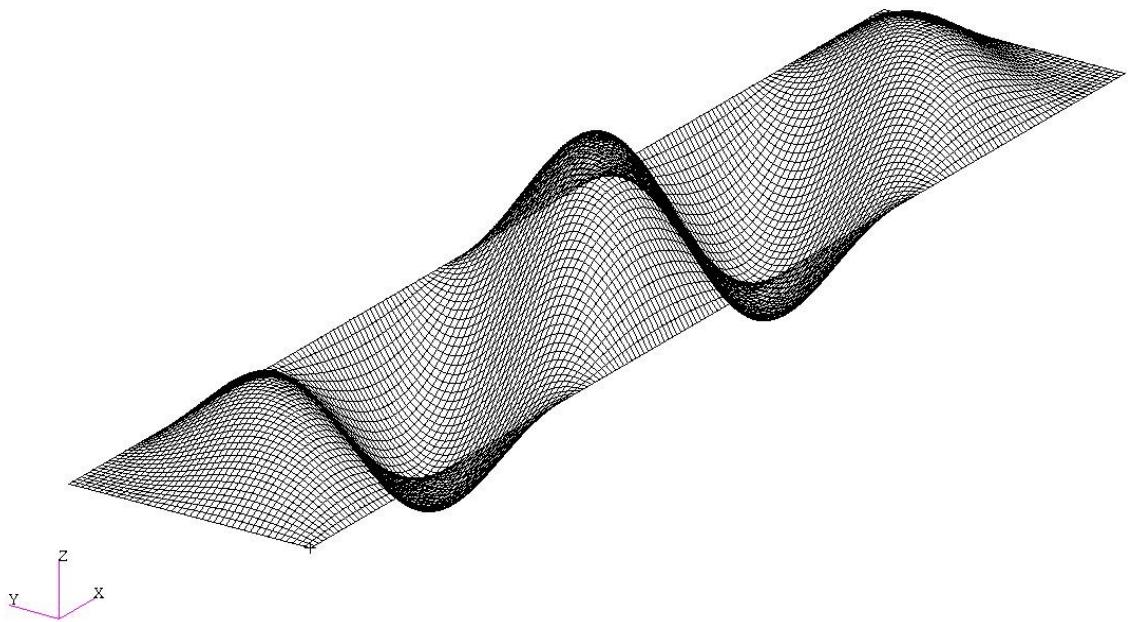


Рис. 6.9. Закритически деформированная пластина, укладка  $[[74^\circ, 134^\circ]_4]_S$ ,  
 $a/b=5$ , «положительное» сдвиговое нагружение.

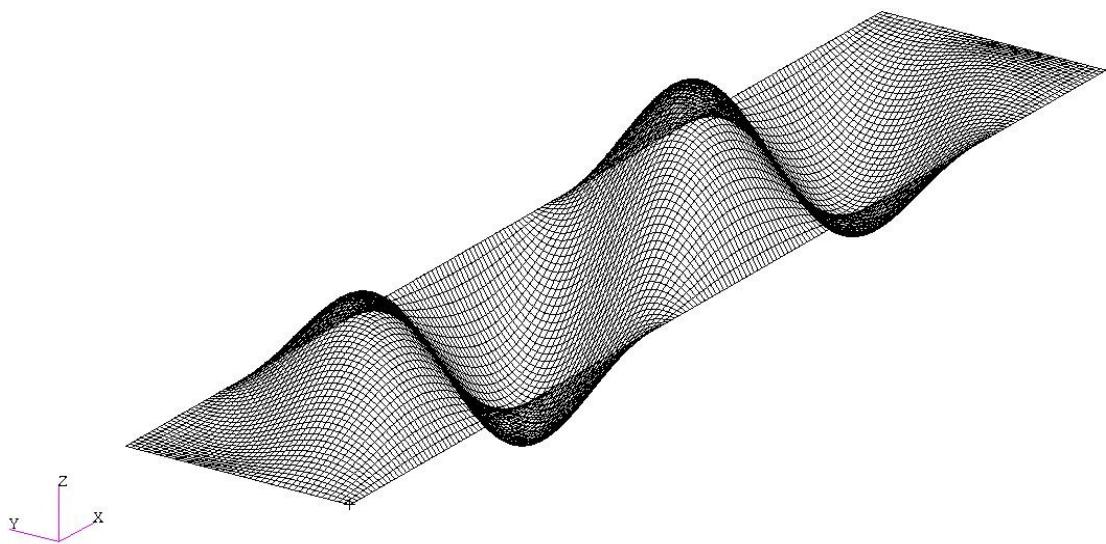


Рис. 6.10. Закритически деформированная пластина, укладка  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$ ,  $a/b=5$ , «положительное» сдвиговое нагружение.

Более подробная информация о результатах расчётов для описанных выше пластин дана в Табл. 6.3.

Из трёх приведенных выше рисунков следует, что форма закритически деформированной пластины для всех трёх вариантов отличается одна от другой.

Анализ Табл. 6.2, 6.3 и Рис. 6.8-6.10 приводит к выводу, что для варианта  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  максимальный прогиб (независимо от направления нагрузки) равен около 22% от максимального прогиба для варианта  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$ . Максимальная деформация сжатия для варианта  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  равна около 26% от таковой для варианта  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$ . Следовательно, вариант  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  проявляет существенно лучшие свойства при закритических деформациях при примерно том же уровне нагрузок потери устойчивости, по сравнению с «равноустойчивым» вариантом  $[[74^\circ, 134^\circ]_4]_S$ .

Вариант анализа	Max прогиб, мм	Max деформация сжатия	Координаты ( $x, y$ ), мм	Направление наименьшего главного значения деформации сжатия, угол с осью X, °	Нижняя (L) или верхняя (U) поверхность пластины
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$	14.8		(500., 100.)		
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$		9.2E-03	(627.5, 142.4)	-75.5	L
$[[74^\circ, 134^\circ]_4]_s$	5.3		(500., 100.)		
$[[74^\circ, 134^\circ]_4]_s$ «отрицательн.» нагружение		4.2E-03	(402.5, 172.5)	37.6	U
$[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_s$	3.2		(600., 100.)		
$[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_s$		2.4E-03	(492.5, 42.5)	-55.5	L

Табл. 6.3. Результаты расчётов для пластин толщиной 2 мм и  $a/b=5$ .

Для варианта  $[[74^\circ, 134^\circ]_3, [9^\circ]_2]_s$  проведен анализ влияния начальной возмущённой формы на закритическое поведение. Использовались по три собственные формы потери устойчивости для обоих направлений нагружения. Более того, первая и вторая собственные формы (для обоих направлений нагружения) соответствуют кратным собственным значениям (обе - +1.69 и - 1.69). Третий собственные формы являются изолированными от первой и

второй. Анализ закритического поведения приводит к несколько меньшим (в пределах 5%) значениям максимального прогиба и максимальной деформации сжатия, по сравнению со случаем использования первой собственной формы. Тем не менее, формы деформированной поверхности отличаются одна от другой. Этот интересный эффект следует впоследствии проанализировать более подробно и предложить соответствующее объяснение.

### **Пластина a/b=3, толщина 2 мм**

В этом подразделе рассматриваются три варианта закритически деформируемых пластин. Это следующие варианты: 1)  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$  (собственные значения для потери устойчивости 1.39 и -1.79), 2)  $[[74^\circ, 136^\circ]_4]_S$  с примерно одинаковым сопротивлением потере устойчивости в обоих направлениях нагружения сдвигом (собственные значения 1.75 и -1.74), 3) ориентация всех слоёв как во втором варианте, за исключением двух слоёв вблизи срединной поверхности пластины. Ориентации этих двух слоёв выбираются так, чтобы улучшить характеристики закритического деформирования - минимизировать деформации сжатия и, по возможности, прогиб (предполагая, что собственные значения потери устойчивости будут меняться несущественно).

Нагружение выполняется с КЗН=1.5, применённого к уровню потери устойчивости 1.39; это значит, что сдвиговая нагрузка равна  $1.5 \cdot 1.39 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 2.085 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 104250 \text{ Н/м}$ .

Третий вариант приводит к решению  $[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  с собственными значениями потери устойчивости 1.74 и -1.73. Табл. 6.4 описывает соответствующие результаты.

Из этой Таблицы следует, что тенденция изменений в Табл. 6.2 и в Табл. 6.4 одинакова. А именно, максимальная деформация сжатия и максимальный прогиб уменьшаются при движении по этим Таблицам сверху вниз.

Следовательно, по сравнению с «равноустойчивым» вариантом  $[[74^\circ, 136^\circ]_4]_S$ , вариант  $[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  значительно лучше с точки зрения сопротивления закритическому деформированию и притом имеет примерно тот же уровень нагрузки потери устойчивости. Отметим, что полученные значения в самой нижней строке Табл. 6.4 немного больше, чем соответствующие значения в Табл. 6.2.

Вариант	«Положительное» нагружение 2.085 (=1.5*1.39)			«Отрицательное» нагружение 2.085		
	max прогиб, мм	max дефор- мация сжатия	min собств. значе- ние	max прогиб мм	max дефор- мация сжатия	min собств. значе- ние
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$	9.9	7.8e-03	1.39	6.6	3.4E-03	-1.79
$[[74^\circ, 136^\circ]_4]_S$ , “равноустойчи- вость”	6.2	4.5E-03	1.75	5.0	5.2E-03	-1.74
$[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$	3.6	2.8E-03	1.74	3.1	2.8E-03	-1.73

Табл. 6.4. Результаты для пластины толщиной 2 мм и  $a/b=3$ .

Изображения формы закритически деформированной пластины и расположения точек максимальных прогиба и деформации сжатия подобны изображениям и результатам предыдущего подраздела. По этой причине, эти данные не показаны здесь.

Анализ Табл. 6.4 приводит к следующим выводам: 1) максимальная деформация сжатия для варианта  $[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  (независимо от

направления нагружения) составляет около 36% от такой же величины для варианта  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$ , 2) максимальный прогиб для варианта  $[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  составляет около 36% от такого прогиба для варианта  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]_S$ . Следовательно, по сравнению с «равноустойчивым» вариантом  $[[74^\circ, 136^\circ]_4]_S$  вариант  $[[74^\circ, 136^\circ]_3, [9^\circ]_2]_S$  значительно лучше сопротивляется закритическим деформациям при примерно том же уровне нагрузки потери устойчивости.

### Пластина $a/b=3$ , толщина 3 мм

Рассматриваются три варианта пластин, имеющих закритические деформации. Эти варианты таковы: 1) пластина с укладкой  $[[45^\circ, 135^\circ]_6]_S$  (собственные значения противоположно направленных сдвиговых нагрузок потери устойчивости равны 4.92 и -5.84), 2) пластина с укладкой  $[[70^\circ, 130^\circ]_6]_S$  с почти одинаковыми значениями собственных чисел потери устойчивости для обоих направлений сдвигового нагружения, а именно 6.08 и -6.06), 3) пластина с укладкой варианта 2 с отличием в возможности варьирования ориентаций трёх слоёв, ближайших к срединной плоскости. Последние ориентации слоёв выбираются из условий максимизации сопротивления закритическому деформированию, то есть уменьшения уровня максимальной деформации сжатия. Собственные значения нагрузки потери устойчивости при этом полагаются изменяющимися слабо.

Отметим, что для пластин существенной толщины величина КЗН (превышение уровня нагрузок потери устойчивости) должна быть меньше чем 1.5, для уменьшения уровня максимальной деформации сжатия до приемлемого уровня.

В Табл. 6.5 приведены результаты таких расчётов для рассматриваемой пластины с КЗН=1.3 и нагрузками, равными  $1.3 \cdot 4.92 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 6.396 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 319800 \text{ Н/м}$ .

Вариант пластины	«Положительное» нагружение 6.396 ( $=1.3*4.92$ )			«Отрицательное» нагружение 6.396		
	max прогиб, мм	max деформация сжатия	min собств. значение	max прогиб, мм	max деформация сжатия	min собств. значение
$[[45^\circ, 135^\circ]_6]_s$	10.9	1.2E-02	4.9	6.1	6.2E-03	-5.8
$[[70^\circ, 130^\circ]_6]_s$ , “равноустойчивость”	4.6	5.1e-03	6.1	4.2	8.1E-03	-6.1
$[[70^\circ, 130^\circ]_4, 70^\circ, [9^\circ]_3]_s$	3.0	4.1E-03	6.0	2.5	3.8E-03	-6.1

Табл. 6.5. Результаты расчётов для пластины толщиной 3 мм и  $a/b=3$ .

Эта Таблица показывает, что результаты первой и второй строк являются неприемлемыми вследствие больших деформаций сжатия, но результаты для нижней строки выглядят приемлемыми. Сравнивая нижнюю строку с первой строкой для положительного нагружения, видим, что в нижней строке уровень максимальной деформации сжатия составляет 34% от уровня первой строки, а уровень максимального прогиба – около 28%. При отрицательном нагружении, соответствующие величины будут 61% и 41%, соответственно.

Рисунки закритически деформированных пластин, расположения точек максимального прогиба и точек максимальной деформации сжатия подобны приведенным ранее для пластины  $a/b=5$ . Поэтому эти данные и не приводятся здесь.

Рассматривая результаты трёх последних подразделов, можно сказать, что пластины с  $a/b$  больше либо равным 3 могут рассматриваться как длинные

пластины. Очевидно, что этот вывод справедлив в пределах принятых нами предположений.

### **Пластина a/b=2, толщина 2 мм**

Рассмотрим теперь три варианта короткой пластины, испытывающей закритические деформации. Эти варианты таковы: 1) пластина с укладкой  $[[45^\circ, 135^\circ]_6]_S$  (собственные значения противоположно направленных сдвиговых нагрузок потери устойчивости равны 1.56 и -2.00), 2) пластина с укладкой  $[[74^\circ, 140^\circ]_4]_S$  с почти одинаковыми значениями собственных чисел потери устойчивости для обоих направлений сдвигового нагружения, а именно 1.84 и -1.82), 3) пластина с укладкой варианта 2 с отличием в возможности варьирования ориентаций двух слоёв, ближайших к срединной плоскости. Последние ориентации слоёв выбираются из условий максимизации сопротивления закритическому деформированию, то есть уменьшения уровня максимальной деформации сжатия.

Нагружение выполняется с КЗН=1.5, применённого к уровню потери устойчивости 1.56; это значит, что сдвиговая нагрузка равна  $1.5 \cdot 1.56 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 2.34 \cdot 50000 \text{ Н/м} = 117000 \text{ Н/м}$ .

Третий вариант приводит к решению  $[[74^\circ, 140^\circ]_3, [18^\circ]_2]_S$  с собственными значениями нагрузки потери устойчивости, равными 1.83 и -1.82.

Полученные результаты представлены в Табл. 6.6.

	«Положительное» нагружение 2.34 (=1.5*1.56)			«Отрицательное» нагружение 2.34		
Вариант	max прогиб, мм	max дефор- мация сжатия	min собств. значе- ние	max прогиб, мм	max дефор- мация сжатия	min собств. значе- ние
[[45°,135°]4]s	9.6	6.2E-03	1.56	5.6	3.0E-03	-2.00
[[74°,140°]4]s, “равноустойчи- вость”	5.6	5.4E-03	1.84	5.0	6.5E-03	-1.82
[[74°,140°]3,[18°]2]s	3.4	3.4E-03	1.83	3.3	3.2E-03	-1.82

Табл. 6.6. Результаты для пластины толщиной 2 мм и  $a/b=2$ .

Соответствующие формы закритически деформированных пластин при положительном нагружении показаны на Рис. 6.11-6.13.

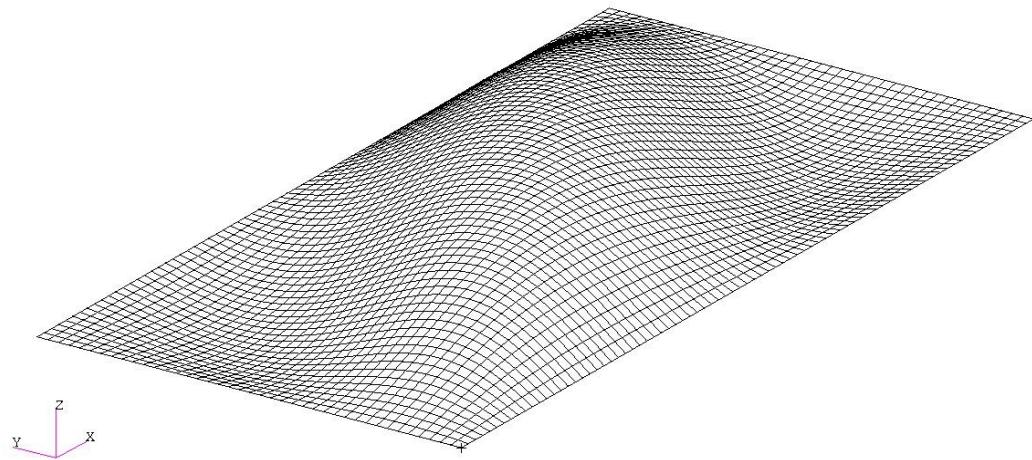


Рис. 6.11. Пластина с укладкой  $[[45^\circ, 135^\circ]_4]s$ , положительное нагружение,  $a/b=2$ .

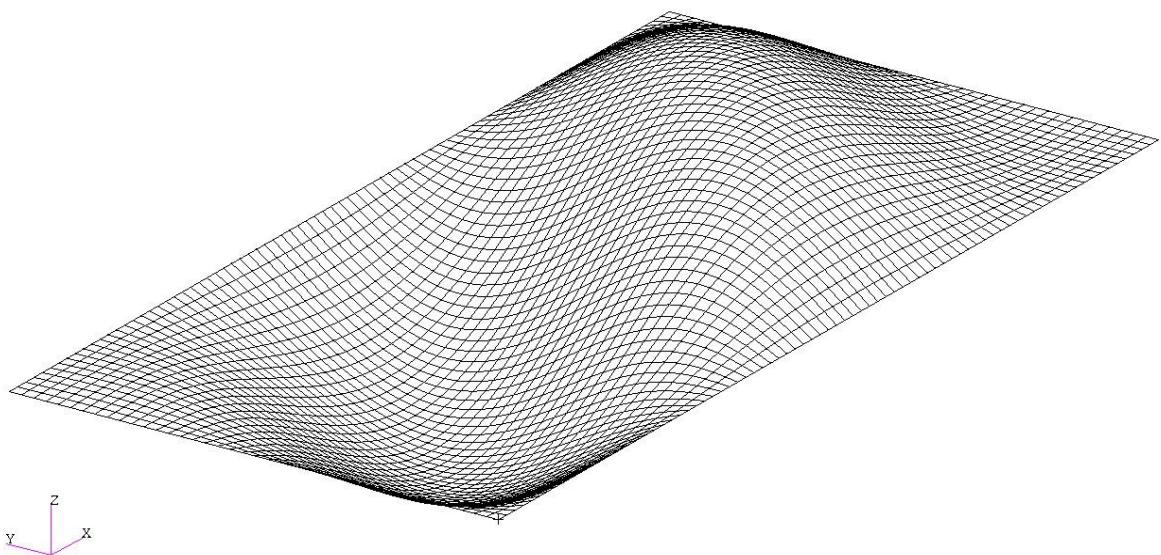


Рис. 6.12. Пластина с “равноустойчивой” укладкой  $[[74^\circ, 140^\circ]_4]_S$ ,  
положительное нагружение,  $a/b=2$ .

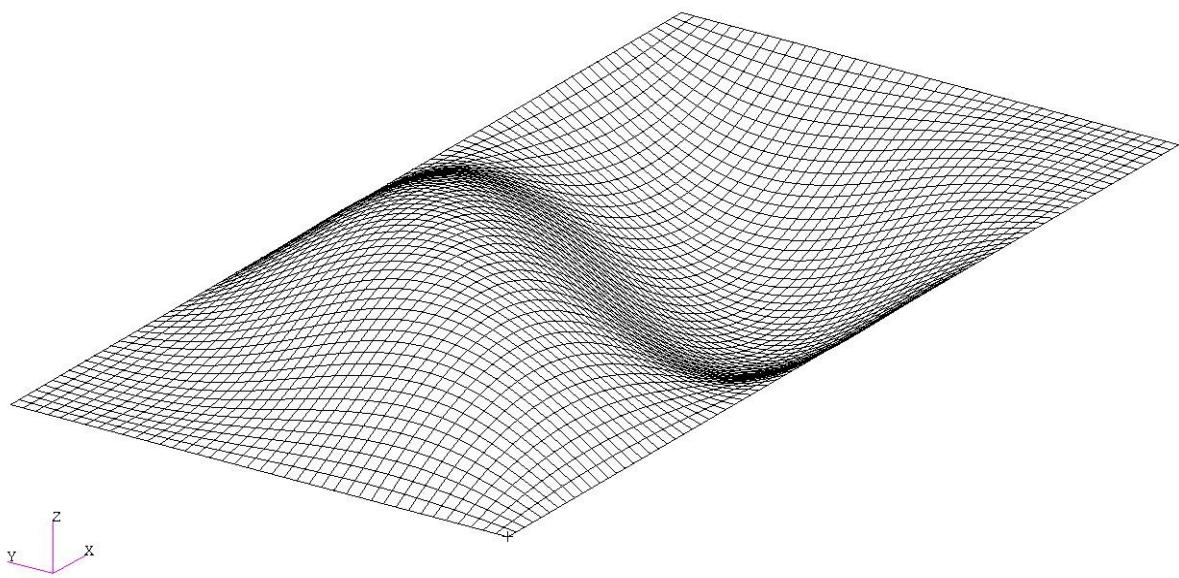


Рис 6.13. Пластина с укладкой  $[[74^\circ, 140^\circ]_3, [18^\circ]_2]_S$ , положительное  
нагружение,  $a/b=2$ .

Из Рис. 6.11 – 6.13 следует, что форма закритически деформированной поверхности для трёх рассматриваемых вариантов существенно различается.

Табл. 6.7 показывает расположение точек максимального прогиба и максимальной деформации сжатия для рассматриваемых вариантов (при

обоих направлениях нагружения). В Таблице специально помечены строки, соответствующие отрицательному нагружению.

Вариант укладки	Max прогиб, мм	Max деформа- ция сжатия	Координа- ты ( $x, y$ ), мм	Направле- ние наименьш. главной деформа- ции сжа- тия, угол с осью X, °	Ниж- няя (L) или верх- няя (U) поверх- ность пласти- -ны
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$	9.6		(200., 100.)		
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$		6.2E-03	(67.5, 37.5)	-65.7	L
$[[74^\circ, 140^\circ]_4]_s$	5.6		(285., 105.)		
	-5.6		(115., 95.)		
$[[74^\circ, 140^\circ]_4]_s$ «Отрицательное» нагружение		6.5E-03	(222.5, 22.5)	36.1	L
$[[74^\circ, 140^\circ]_4]_s$ «Отрицательное» нагружение		6.5E-03	(177.5, 177.5)	36.1	U
$[[74^\circ, 140^\circ]_3, [18^\circ]_2]_s$	3.4		(115., 105.)		

[[74°,140°]3,[18°]2]s	-3.4		(285., 95.)		
[[74°,140°]3,[18°]2]s		3.4E-03	(212.5, 162.5)	-56.1	L
[[74°,140°]3,[18°]2]s		3.4E-03	(187.5, 37.5)	-56.1	U

Табл. 6.7. Результаты расчётов,  $a/b=2$ , толщина пластины 2 мм

Анализ Табл. 6.6, 6.7 и Рис. 6.11 – 6.13 приводит к выводу, что вариант [[74°,140°]3,[18°]2]s имеет максимальную величину деформации сжатия (в независимости от направления нагружения) даже больше, чем эта величина для отрицательного нагружения и укладки [[45°,135°]4]s, но, тем не менее, меньше, чем предельно допускаемая 5.E-03. Мы также видим, что распределение деформаций сжатия варианта [[74°,140°]3,[18°]2]s существенно отличается от варианта [[45°,135°]4]s (это показывают существенно различные углы ориентации направлений минимального главного значения деформаций).

Максимальный прогиб для варианта [[74°,140°]3,[18°]2]s составляет около 61% от максимального прогиба для варианта [[45°,135°]4]s.

Резюмируя, можно сказать, что вариант [[74°,140°]3,[18°]2]s демонстрирует лучшее сопротивление закритическому деформированию при примерно том же уровне нагрузок потери устойчивости, по сравнению с «равноустойчивым» вариантом [[74°,140°]4]s.

В сравнении с базовой укладкой [[45°,135°]4]s, результаты Табл. 6.8 демонстрируют возможности экономии веса, следующие из более сильного сопротивления закритическому деформированию полученных вариантов укладки при  $a/b=2$  и толщине пластины 2 мм. Уровень нагружения равен  $1.4*1.56*50000$  Н/м =  $2.184*50000$  Н/м (это ниже, чем уровень, использованный выше для того, чтобы сделать вариант укладки [[45°,135°]4]s

приемлемым). Один слой  $18^\circ$  удалён из центра укладки. В результате этого, мы получили 6.25% экономии веса (общее число слоёв при этом изменилось с 16 до 15).

	«Положительное» нагружение 2.184 (=1.4*1.56)			«Отрицательное» нагружение 2.184		
Укладка пластины	max про- гиб, мм	max дефор- мация сжатия	min собст- значе- ние	max про- гиб, мм	max дефор- мация сжатия	min собст- значе- ние
$[[45^\circ, 135^\circ]_4]_s$ $h=2$ мм	8.3	5.1E-03	1.56	3.9	2.1E-03	-2.00
$[[74^\circ, 140^\circ]_3, [18^\circ]_3,$ $[140^\circ, 74^\circ]_3]$ $h=1.875$ мм	4.5	4.2E-03	1.50	4.2	4.6E-03	-1.51

Табл. 6.8. Возможности экономии веса,  $a/b=2$ .

### 6.7.5. Обсуждение результатов для пластин с прямолинейными волокнами

Критерий выбора укладки, использованный выше, это минимизация максимальной деформации сжатия. Этот критерий важен для нахождения потенциальных мест разрушения. Критерий минимизации максимального прогиба (использованный в научной литературе последние несколько десятилетий) также может использоваться при закритических деформациях для того, чтобы понять, началось разрушение или нет. Этот критерий полезен и для уменьшения контурных сил крепления пластины к остальной

конструкции (например, для снижения усилий смятия или продёргивания на заклёпках, когда эти эффекты являются существенными).

Переключение между формами потери устойчивости может существенно влиять на закритическое деформирование. С другой стороны, из практики известно, что КЗН не должен быть слишком большим. Например, для авиационных конструкций этот коэффициент не должен превышать 1.5. Более того, из практики экспериментальных исследований конструкций известно, что такие переключения между формами происходят очень редко и их учёт не слишком важен. Поэтому, наш подход «переключения отсутствуют» представляется приемлемым.

Из теоретического анализа было получено, что при проектировании по жёсткости при закритических деформациях необходимо провести разбиение слоёв укладки на две группы – внешние слои и внутренние слои. При этом ориентация внутренних слоёв пластины определяется величинами и линиями главных 2D-деформаций. Ориентация же внешних слоёв пластины определяется величинами и линиями главных кривизн.

В теоретическом анализе также было указано на существование особых (ортотропных) решений условий оптимальности, при которых линии главных 2D-деформаций и линии главных кривизн совпадают, приводя к локальной ортотропии укладки.

Результаты раздела, посвящённого проектированию укладки при одном сдвиговом нагружении, приводят к важному образу пластины с высоким сопротивлением к потере устойчивости и к высокой жёсткости при закритическом деформировании. Такая пластина содержит несколько 0° внутренних слоёв, а оставшиеся более внешние слои имеют ориентацию 120°.

Из численного анализа закритически деформируемых пластин, нагруженных двумя противоположными сдвиговыми нагрузлениями, следуют некоторые рекомендации (см. Selyugin 2019h). А именно: присутствие нескольких внутренних слоёв с умеренными (до ~20°) углами ориентации

улучшает несущую способность пластины при критических деформациях, по сравнению с пластиной, спроектированной сопротивляться только потере устойчивости. Это означает, что есть три важных направления ориентации слоёв. По нашему мнению, этот результат может быть представлен суперпозицией двух следующих укладок.

Первая соответствует положительному сдвигу, имеет несколько  $0^\circ$  внутренних слоёв и оставшиеся слои с ориентацией  $120^\circ$ . Второе решение есть зеркальное отображение первого решения относительно линии  $90^\circ$ . Скомбинированное таким образом решение поворачивается на некоторый угол до  $\sim 20^\circ$  против часовой стрелки (как было получено в численных примерах), вследствие связи изгиб-кручение и сдвиг-растяжение. Рис. 6.14 схематически описывает этот подход (внутренние слои показаны пунктирными линиями):

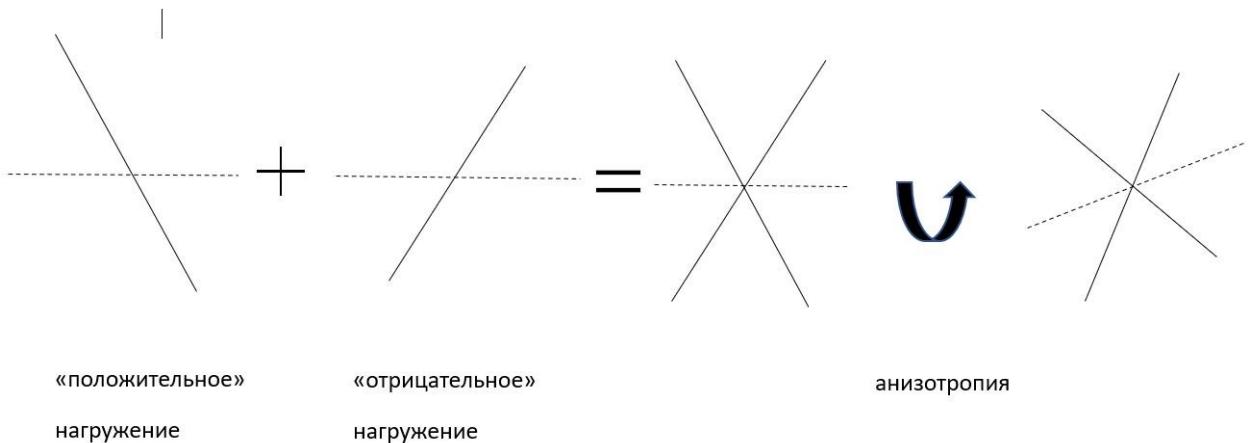


Рис. 6.14. Схематизация построения наилучшей укладки при двух противоположных сдвиговых нагрузлениях.

Исходя из полученных численных результатов, можно считать пластину длинной от  $a/b=3$ .

Для более коротких пластин угол ориентации внутренних слоёв в предложенном подходе будет несколько больше по величине (по сравнению с длинной пластиной).

Описанное схематичное решение подтверждено европейским патентом Selyugin and Balzer (2019) и патентом США (2021e) тех же авторов.

### 6.7.6. Квадратная пластина, нагруженная сжатием или сдвигом

Приведём два примера с точными решениями условий оптимальности при закритическом деформировании пластин с криволинейными волокнами слоёв. В обоих примерах используется квадратная композиционная просто опертая плата с длиной и шириной, равной  $a$ .

В первом случае эта плата сжата (с постоянным потоком усилий) с двух сторон, см. Рис. 6.15. Предполагается, что закритическое деформирование платы развивается от первой (симметричной) формы потери устойчивости.

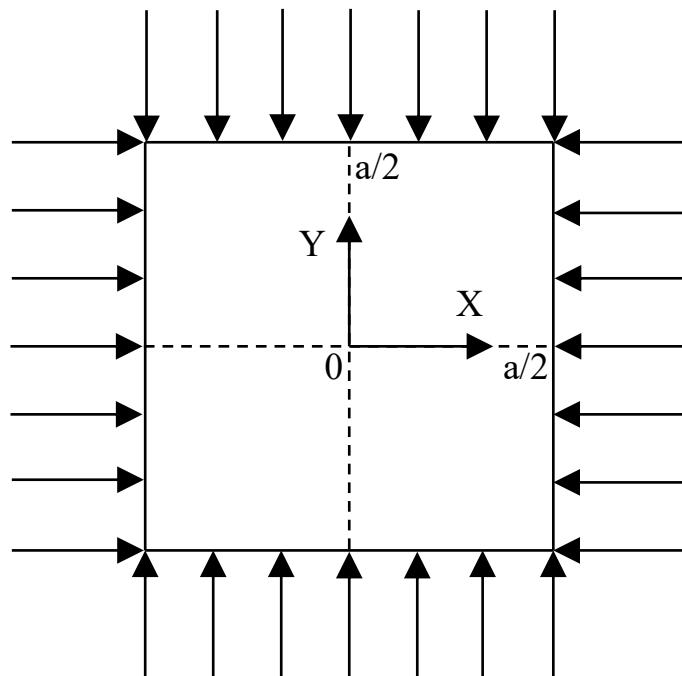


Рис. 6.15. Сжатая плата.

Во втором случае пластина нагружена сдвигом (также с постоянным потоком усилий), см. Рис 6.16. Предполагается, что закритическое деформирование пластины развивается от первой (симметричной относительно диагонали, описываемой уравнением  $x=y$ ) формы потери устойчивости.

Вследствие симметрии первого примера, при симметричной (относительно осей координат X, Y) ориентации слоёв укладки пунктирные линии, соединяющие середины противоположных сторон, будут линиями главной кривизны и главной деформации. Поэтому условия оптимальности (6.71) выполнены для укладки  $0^\circ/90^\circ$  на этих линиях.

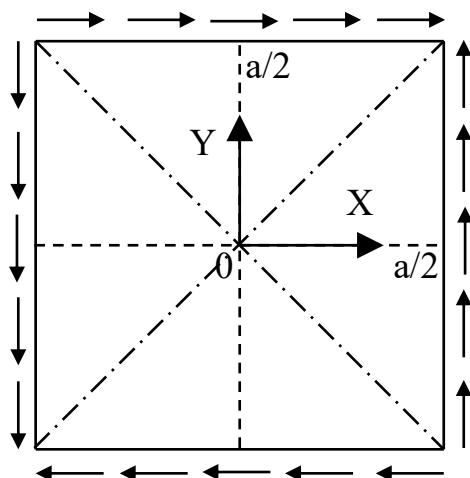


Рис. 6.16. Пластина, нагруженная сдвигом.

Во втором примере, рассмотрим штрихпунктирные линии, проходящие по диагоналям квадрата. Пусть эти линии будут линиями симметрии ориентации слоёв укладки. Тогда эти линии будут линиями главной кривизны и главной деформации. Поэтому условия оптимальности (6.71) выполнены для укладки  $+/-45^\circ$  на этих линиях.

В точках, расположенных на линиях осей координат (первый пример) и на главных диагоналях (второй пример), можно указать последовательность

слоёв оптимальной укладки в частном случае  $K=2$  (четыре слоя, уложенных симметрично). А именно, в этих точках внутренний слой ортогонален линии, на которой он расположен. Очевидно, что указанная укладка имеет большую локальную изгибную жёсткость на этих линиях по сравнению с укладкой, в которой внутренний и внешний слои указанной выше укладки взаимно меняют местоположение.

Получающееся последнее решение будет удовлетворять необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка, но не будет оптимальным в действительности (его изгибная жёсткость будет, ожидаемо, выше, чем таковая жёсткость для первоначального решения).

Следовательно, обсуждаемое первоначальное решение также может использоваться в качестве тестового примера (англ. *benchmark*) для программного обеспечения, предназначенного для оптимизации укладки слоёв закритически деформируемых пластин.

## Упражнения

1. Для трёх моделей композиционных пластин из Упражнений к Главе 5, но нагруженных равномерным сдвигом, произвести расчет нелинейного деформирования при нагрузках, в 1.5 раз выше критических нагрузок потери устойчивости. В качестве возмущения – использовать форму прогибов из плоскости (с коэффициентом 1.E-05) при потере устойчивости.
2. Проанализировать максимальные значения деформаций сжатия и прогибов. Сравнить результаты для различных вариантов пластин.
3. Построить линии главных кривизн, главных деформаций срединной плоскости и линии главных 2D-усилий/моментов. Проанализировать закономерности по близости или различию в прохождении этих линий (см. подраздел 6.6).

4. Сравнить результаты с аналитическими оптимальными решениями подраздела 6.7.6.

## Глава 7. Большие закритические прогибы и выбор наилучшей укладки

### 7.1. Кинематика деформирования

Как уже указывалось в предыдущих разделах, фон Кармановское приближение для тонких пластин описывает только умеренные прогибы, которые превышают толщину пластины, скажем, в несколько раз, но не более.

Вопрос о несущей способности пластин при больших прогибах (значительно больших, чем толщина пластины, но существенно меньших, чем её линейные размеры) требует привлечения аппарата идей нелинейной теории упругости (Новожилов 1948, 1951). Дальнейшее изложение о кинематике деформирования пластин следует работе (Selyugin 2021a). Следующий за этим подраздел также базируется на последней работе.

Рассматриваются как металлические, так и композитные пластины. Предполагается, что удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Следуя (Новожилов 1948, 1951), перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  внутри пластины (соответственно вдоль X, Y, Z) описываются формулами:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \hat{u}(x, y) + z \cdot \xi(x, y) \\ v(x, y) &= \hat{v}(x, y) + z \cdot \zeta(x, y) \\ w(x, y) &= \hat{w}(x, y) + z \cdot \chi(x, y) \end{aligned} \tag{7.1}$$

где верхняя «крышка» означает величину в срединной плоскости. Используя (7.1) и определение компонент тензора деформаций Грина, Новожиловым показано, что

$$\begin{aligned} \xi &= -\hat{w}_{,x} (1 + \hat{v}_{,y}) + \hat{v}_{,x} \hat{w}_{,y} \\ \zeta &= -\hat{w}_{,y} (1 + \hat{u}_{,x}) + \hat{u}_{,y} \hat{w}_{,x} \\ \chi &= \hat{u}_{,x} + \hat{v}_{,y} + \hat{u}_{,x} \hat{v}_{,y} - \hat{u}_{,y} \hat{v}_{,x} \end{aligned} \tag{7.2}$$

и

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \hat{\varepsilon}_{xx} + zK_{xx} + z^2\eta_{xx} \\
\varepsilon_{yy} &= \hat{\varepsilon}_{yy} + zK_{yy} + z^2\eta_{yy} \\
\varepsilon_{xy} &= \hat{\varepsilon}_{xy} + zK_{xy} + z^2\eta_{xy}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Деформации срединной поверхности в (7.3) даются формулами

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{xx} &= \hat{u}_{,x} + 1/2 [\hat{u}_{,x}^2 + \hat{v}_{,x}^2 + \hat{w}_{,x}^2] \\
\hat{\varepsilon}_{yy} &= \hat{v}_{,y} + 1/2 [\hat{u}_{,y}^2 + \hat{v}_{,y}^2 + \hat{w}_{,y}^2] \\
2\hat{\varepsilon}_{xy} &= \hat{u}_{,y} + \hat{v}_{,x} + \hat{u}_{,y}\hat{u}_{,x} + \hat{v}_{,x}\hat{v}_{,y} + \hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

и другие величины в (7.3):

$$\begin{aligned}
K_{xx} &= \xi_{,x} + \hat{u}_{,x}\xi_{,x} + \hat{v}_{,x}\zeta_{,x} + \hat{w}_{,x}\chi_{,x} \\
K_{yy} &= \zeta_{,y} + \hat{u}_{,y}\xi_{,y} + \hat{v}_{,y}\zeta_{,y} + \hat{w}_{,y}\chi_{,y} \\
2K_{xy} &= \xi_{,y} + \zeta_{,x} + \hat{u}_{,x}\xi_{,y} + \hat{u}_{,y}\xi_{,x} + \hat{v}_{,x}\zeta_{,y} + \hat{v}_{,y}\zeta_{,x} + \hat{w}_{,x}\chi_{,y} + \hat{w}_{,y}\chi_{,x} \\
\eta_{xx} &= 1/2 [\xi_{,x}^2 + \zeta_{,x}^2 + \chi_{,x}^2] \\
\eta_{yy} &= 1/2 [\xi_{,y}^2 + \zeta_{,y}^2 + \chi_{,y}^2] \\
2\eta_{xy} &= \xi_{,x}\xi_{,y} + \zeta_{,x}\zeta_{,y} + \chi_{,x}\chi_{,y}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

В работах (Новожилов 1948, 1951) указано, что при малых удлинениях и сдвигах последние члены в (7.3) (квадратичные по  $z$ ) весьма малы, по сравнению с первыми. Пренебрегая этими членами, квадратичными по  $z$ , получаем из (7.3):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \hat{\varepsilon}_{xx} + zK_{xx} \\
\varepsilon_{yy} &= \hat{\varepsilon}_{yy} + zK_{yy} \\
\varepsilon_{xy} &= \hat{\varepsilon}_{xy} + zK_{xy}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Подставляя (7.2) в (7.5), после громоздких, но простых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned}
K_{xx} &= -\xi(x, y)\hat{u}_{,xx} - \zeta(x, y)\hat{v}_{,xx} - (1 + \chi(x, y))\hat{w}_{,xx} \\
K_{yy} &= -\xi(x, y)\hat{u}_{,yy} - \zeta(x, y)\hat{v}_{,yy} - (1 + \chi(x, y))\hat{w}_{,yy} \\
K_{xy} &= -\xi(x, y)\hat{u}_{,xy} - \zeta(x, y)\hat{v}_{,xy} - (1 + \chi(x, y))\hat{w}_{,xy}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

## 7.2. Вывод уравнений равновесия из принципа виртуальных перемещений

Покажем, как выводятся уравнения равновесия пластины на основе принципа виртуальных перемещений, иногда называемого также принципом виртуальных работ (Васидзу 1987). В рассматриваемом случае этот принцип записывается в виде:

$$\int_V dV [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}] - \int_{\Gamma} q(x, y) \delta w d\Gamma - \int_{S_1} [f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w] dS = 0 \quad (7.9)$$

где  $q, f_x, f_y, f_z, \delta, V$  соответственно поперечное внешнее давление на поверхности  $\Gamma$  пластины, X-Y-Z силы на единицу площади, приложенные на части  $S_1$  боковой поверхности  $S$  пластины, символ вариации, объем пластины.

Введем следующие обозначения:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz,$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz,$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz,$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz,$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz,$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz$$

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz,$$

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz,$$

$$\begin{aligned}
F_z &= \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz \\
\tilde{M}_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \\
\tilde{M}_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz \\
\tilde{F}_z &= \int_{-h/2}^{h/2} z f_z dz
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Подставляя (7.2), (7.4), (7.5), (7.7), (7.8), (7.10) в (7.9) и производя необходимые преобразования, получаем соотношение:

$$\int_{\Gamma} d\Gamma \left[ \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + K_u \delta \hat{u} + K_v \delta \hat{v} + K_w \delta \hat{w} \right] - \int_{\Gamma} q(x, y) \delta w d\Gamma - \int_{S_1} [f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w] dS = 0 \tag{7.11}$$

Отметим, что вывод (7.11) через силы, моменты и перемещения требует чрезвычайно громоздких математических выкладок и преобразований (с двукратным использованием интегрирования по частям и применением теоремы Остроградского-Гаусса). По этой причине подинтегральное выражение в (7.11) может быть надежно проверено с помощью известных компьютерных программ символьных вычислений.

Величины  $K_u, K_v, K_w$  (см. Приложение) содержат члены, идентичные таковым из приближения фон Кармана (они выписаны ниже в явном виде), плюс нелинейные члены, которые линейны по силам и моментам. Эти нелинейные члены содержат силы и моменты, умноженные на различные комбинации перемещений и их разных производных. В общем виде можно записать:

$$K_u = -N_{x,x} - N_{xy,y} + \dots \tag{7.12}$$

$$K_u = -N_{x,x} - N_{xy,y} + \dots \tag{7.13}$$

$$K_w = -M_{x,xx} - M_{y,yy} - 2M_{xy,xy} - \frac{\partial}{\partial x}(N_x \widehat{w}_x + N_{xy} \widehat{w}_y) - \frac{\partial}{\partial y}(N_{yx} \widehat{w}_x + N_y \widehat{w}_y) + \dots \quad (7.14)$$

Величины  $P_x, P_y$  содержат члены, идентичные таковым из приближения фон Кармана (см. Приложение), плюс разного рода нелинейные члены, которые линейны по силам и моментам. Эти нелинейные члены представляют из себя силы и моменты, умноженные на различные комбинации перемещений, их вариаций и вариаций первых производных перемещений, и разных производных перемещений. Начальные члены для  $P_x, P_y$  записываются в виде:

$$P_x = [N_x(1 + \widehat{u}_x) + N_{xy}\widehat{u}_y]\delta\widehat{u} + [N_x\widehat{v}_x + N_{xy}(1 + \widehat{v}_y)]\delta\widehat{v} + [N_x\widehat{w}_x + N_{xy}\widehat{w}_y]\delta\widehat{w} + \dots \quad (7.15)$$

$$P_y = [N_{xy}(1 + \widehat{u}_x) + N_y\widehat{u}_y]\delta\widehat{u} + [N_{xy}\widehat{v}_x + N_y(1 + \widehat{v}_y)]\delta\widehat{v} + [N_{xy}\widehat{w}_x + N_y\widehat{w}_y]\delta\widehat{w} + \dots \quad (7.16)$$

Уравнения равновесия по  $x, y, z$  соответственно записутся:

$$\begin{aligned} K_u &= 0 \\ K_v &= 0 \\ K_w - q &= 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Уравнения равновесия, очевидно, содержат члены от приближения фон Кармана плюс дополнительные члены, нелинейные по перемещениям и их производным.

Краевые условия следуют из теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\Gamma} (P_{x,x} + P_{y,y}) d\Gamma = \int_C \left( \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}^T, \vec{n} \right) dC \quad (7.18)$$

Приравнивая к нулю множители при вариациях независимых переменных, мы получаем нужные нам условия стационарности виртуальной работы.

Укажем некоторые соотношения, используемые для преобразований и для контурных членов ( $a, b, d$  – некоторые функции от  $x, y$ ):

$$ab_{,xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (ab_{,y} - a_{,y}b) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (ab_{,x} - a_{,x}b) + a_{,xy}b$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = l \frac{\partial}{\partial n} - m \frac{\partial}{\partial s} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial n} + l \frac{\partial}{\partial s}$$

$$ad_{,x} + bd_{,y} = (al + bm)d_{,n} + (-am + bl)d_{,s} \quad (7.19)$$

где производные по  $n, s$  означают производные по нормали и по касательной к граничному контуру пластины, соответственно.

Предполагается, что условия защемления на  $S_2$  приближенно описываются соотношениями на  $C_2$ :

$$\delta \hat{u} = \delta \hat{v} = \delta \hat{w} = \delta \hat{u}_{,n} = \delta \hat{v}_{,n} = \delta \hat{w}_{,n} = 0 \quad (7.20)$$

Условия же на  $C_1$  (нагруженной части контура пластины) и их вывод представлены в Приложении.

Уравнения равновесия (7.17) должны быть дополнены соотношениями, описывающими силы и моменты в срединной плоскости через перемещения и их производные.

### 7.3. Кинематический вариационный принцип

#### 7.3.1. Обобщённые соотношения напряжение-деформация

Уравнения равновесия (7.17), выписанные в предыдущем подразделе, требуют присоединения к ним обобщённых соотношений напряжение-деформация, а именно, соотношений, связывающих силы и моменты в срединной плоскости с деформациями в этой плоскости и обобщёнными кривизнами  $K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}$ .

Для металлических пластин, подчиняющихся закону Гука, матрицы жёсткости  $A$  и  $D$  (аналоги таковых матриц для теории композитных пластин, см. Gibson 1994) даются формулами:

$$A = h \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{E\mu}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{E\mu}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix}; \quad D = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{E\mu}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{E\mu}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

где  $E, \mu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно. Эти матрицы используются в соотношениях, связывающих потоки напряжений в срединной плоскости  $\vec{N}$ , изгибающий/крутящий моменты на единицу длины  $\vec{M}$  и вектора-столбцы  $\vec{\varepsilon}, \vec{K}$ , содержащие деформации срединной плоскости  $\varepsilon_{ij}$  и обобщённые кривизны  $K_{ij}$ , соответственно.

Будем использовать обозначения

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} ; \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2K_{xy} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} ; \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon} ; \quad \vec{M} = D\vec{K} \quad (7.24)$$

Матрицы жёсткости  $A$  и  $D$  для композитных пластин описаны в многочисленных учебниках, например, (Gibson 1994).

### 7.3.2. Потенциальная энергия деформации и её вариация

Потенциальная энергия деформации  $P$  как функционал кинематических параметров даётся следующей формулой:

$$P = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_\Gamma \left[ \frac{1}{2} (\vec{N}, \hat{\vec{\varepsilon}}) + \frac{1}{2} (\vec{M}, \hat{\vec{K}}) \right] d\Gamma = \int_\Gamma \left[ \frac{1}{2} (\hat{\vec{\varepsilon}}^T A \hat{\vec{\varepsilon}}) + \frac{1}{2} (\hat{\vec{K}}^T D \hat{\vec{K}}) \right] d\Gamma \quad (7.25)$$

где, как и ранее,  $\sigma_{ij}$  - второй тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа, а два вектор-столбца в круглых скобках через запятую означают скалярное произведение этих векторов.

Теперь выполним варьирование  $P$  по перемещениям в срединной плоскости  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ :

$$\begin{aligned}
\delta P &= \int_{\Gamma} [(\vec{N}, \delta \hat{\vec{\varepsilon}}) + (\vec{M}, \delta \vec{K})] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} [N_x \delta \varepsilon_{xx} + N_y \delta \varepsilon_{yy} + 2N_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + M_x \delta K_{xx} + M_y \delta K_{yy} \\
&\quad + 2M_{xy} \delta K_{xy}] d\Gamma
\end{aligned} \tag{7.26}$$

где здесь и далее силы и моменты даются формулами (7.10) и при выводе кинематического вариационного принципа считаются функциями от кинематических величин (перемещений центрального слоя и величин  $\hat{\vec{\varepsilon}}, \vec{K}$ , содержащих соответствующие производные этих перемещений). В правой части (7.26) под интегралом стоят шесть членов. Вычисляя их, получим те же уравнения равновесия и краевые условия, что были получены выше.

Следующий шаг нашего анализа посвящён потенциалу внешних сил.

### 7.3.3. Потенциал внешних сил

Потенциал внешних сил даётся выражением:

$$W = \int_{\Gamma} q(x, y) \hat{w} d\Gamma + \int_{S_1} [f_x u + f_y v + f_z w] ds \tag{7.27}$$

После проведения соответствующих достаточно громоздких преобразований, учитывая условия защемления на части  $C_2$ :

$$\delta \hat{u} = \delta \hat{v} = \delta \hat{w} = \delta \hat{u}_{,n} = \delta \hat{v}_{,n} = \delta \hat{w}_{,n} = 0 \tag{7.28}$$

получаем при варьировании  $W$  достаточно громоздкие соотношения на нагруженной части контура (см. Приложение).

Условия (7.28) являются так называемыми существенными условиями. Условия же на нагруженной части контура - это так называемые естественные краевые условия.

Укажем, что все полученные соотношения (уравнения равновесия и краевые условия) являются следствием кинематического вариационного принципа, приведенного ниже.

### 7.3.4. Кинематический вариационный принцип

Этот принцип формулируется так:

$$P - W \xrightarrow{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}} \text{stationarity} \quad \text{при условии (7.28)} \quad (7.29)$$

Действительно, из (7.29), как уже было сказано, мы получаем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} K_u &= 0 \\ K_v &= 0 \\ K_w - q &= 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

и соответствующие краевые условия.

### 7.4. Условия совместности деформаций

Получим условия совместности деформаций в срединной плоскости (Selyugin 2022a).

Используя (7.4), вычислим следующие величины для срединной плоскости  $\hat{\epsilon}_{xx,yy}, \hat{\epsilon}_{yy,xx}, \hat{\epsilon}_{xy,xy}$ :

$$\hat{\epsilon}_{xx,yy} = \hat{u}_{,xyy} + \hat{u}_{,xy}^2 + \hat{u}_{,x}\hat{u}_{,xyy} + \hat{v}_{,xy}^2 + \hat{v}_{,x}\hat{v}_{,xyy} + \hat{w}_{,xy}^2 + \hat{w}_{,x}\hat{w}_{,xyy} \quad (7.31)$$

$$\hat{\epsilon}_{yy,xx} = \hat{v}_{,xxy} + \hat{u}_{,xy}^2 + \hat{u}_{,y}\hat{u}_{,xxy} + \hat{v}_{,xy}^2 + \hat{v}_{,y}\hat{v}_{,xxy} + \hat{w}_{,xy}^2 + \hat{w}_{,y}\hat{w}_{,xxy} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{xy,xy} = & \hat{u}_{,xyy} + \hat{v}_{,xxy} + \hat{u}_{,x}\hat{u}_{,xyy} + \hat{u}_{,xy}^2 + \hat{u}_{,yy}\hat{u}_{,xx} + \hat{u}_{,y}\hat{u}_{,xxy} + \hat{v}_{,xxy}\hat{v}_{,y} \\ & + \hat{v}_{,xx}\hat{v}_{,yy} + \hat{v}_{,xy}^2 + \hat{v}_{,x}\hat{v}_{,xyy} + \\ & + \hat{w}_{,xxy}\hat{w}_{,y} + \hat{w}_{,xx}\hat{w}_{,yy} + \hat{w}_{,xy}^2 + \hat{w}_{,x}\hat{w}_{,xyy} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Затем, используя (7.32)-(7.33) и вычисляя выражение  $\hat{\varepsilon}_{xx,yy} + \hat{\varepsilon}_{yy,xx} - 2\hat{\varepsilon}_{xy,xy}$ , приходим к следующему соотношению:

$$\hat{\varepsilon}_{xx,yy} + \hat{\varepsilon}_{yy,xx} - 2\hat{\varepsilon}_{xy,xy} = \hat{u}_{,xy}^2 - \hat{u}_{,xx}\hat{u}_{,yy} + \hat{v}_{,xy}^2 - \hat{v}_{,xx}\hat{v}_{,yy} + \hat{w}_{,xy}^2 - \hat{w}_{,xx}\hat{w}_{,yy} \quad (7.34)$$

Соотношение (7.34) и является условием совместности деформаций в срединной плоскости.

## **7.5. О возможности анализа прощёлкивания**

Указанные выше в данной Главе соотношения позволяют, в принципе, анализировать поведение пластины при больших закритических прогибах, включая и точку начала прощёлкивания.

Известно, что нелинейный анализ конструкций по МКЭ надёжно работает в начале нелинейного деформирования. При больших закритических прогибах надёжность МКЭ анализа, как известно, снижается. Предлагаемый нами подход даёт ещё одно средство для такого анализа, в дополнение к МКЭ.

## **7.6. Условия оптимальности углов ориентации слоёв укладки**

### **7.6.1. Предварительные замечания**

При выборе оптимальной ориентации слоёв примем жёсткость пластины за целевую функцию, которую надо максимизировать. В качестве меры жёсткости будем рассматривать общую потенциальную энергию конструкции  $U$ .

Указанная энергия записывается в виде, см. подраздел о кинематическом вариационном принципе данной Главы:

$$U = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^T A \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{K}^T D \vec{K} \right) d\Gamma - W \quad (7.35)$$

где интеграл – это общая потенциальная энергия деформации  $\Pi$ :

$$\Pi = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}^T A \hat{\varepsilon}) + \frac{1}{2} (\vec{K}^T D \vec{K}) \right] d\Gamma \quad (7.36)$$

$W$  – это потенциал внешних «мёртвых» сил. На контуре  $C_2$  заданы условия защемления для  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ .

Кинематический вариационный принцип (стационарность общей потенциальной энергии пластины), приведенный в начале данной Главы, описывает как просто геометрически нелинейное поведение пластины, так и закритическое поведение пластины.

Вариационный принцип для композитных пластин в принятых выше допущениях формулируется следующим образом. Пластина в состоянии равновесия удовлетворяет соотношению

$$\delta U = \delta \Pi - \delta W = 0 \quad (7.37)$$

для всех кинематически допустимых перемещений  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ .

Принцип (7.37) ведёт к уравнениям равновесия для перемещений в срединной плоскости  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ .

Предполагается, что углы ориентации слоёв  $\theta_i$  являются гладкими функциями точек в срединной плоскости  $(x, y)$ ,  $i=1, \dots, K$ .

## 7.6.2. Условия оптимальности

Как было показано в (5.37), производные матриц  $A$ ,  $D$  по углам ориентации слоёв  $\theta_k$  даются формулами,  $ij=11, 12, 22; k=1, \dots, K$ :

$$\begin{aligned} \frac{dA_{ij}}{d\theta_k} &= (z_k - z_{k-1}) \frac{d(\bar{Q}_{ij})_k}{d\theta_k} \\ \frac{dD_{ij}}{d\theta_k} &= \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \frac{d(\bar{Q}_{ij})_k}{d\theta_k} \end{aligned} \quad (7.38)$$

где  $\bar{Q}_{ij}$  в скобках с индексом  $k$  – это матрицы жёсткости  $k$ -го слоя (Gibson 1994),  $z_k$  – это верхняя координата  $k$ -го слоя.

Следуя обычной вариационной процедуре и используя вариационный принцип (7.37), получаем необходимые условия локальной оптимальности первого порядка. Максимизация жёсткости конструкции означает, что первая вариация  $U$  по углам ориентации слоёв равна нулю.

Вариация общей потенциальной энергии конструкции даётся соотношением:

$$\delta U = \delta U|_{A-\text{non-varied}} + \delta U|_{(u,v,w)-\text{non-varied}} = 0 \quad (7.39)$$

Первый член в (7.39) равен нулю вследствие (7.37). Во втором члене, матрицы  $A, D$  – это функции от углов ориентации слоя. Для этого члена, получаем соотношение для углов ориентации  $i$ -го слоя в текущей точке,  $i=1,\dots,K$ :

$$\delta U|_{(u,v,w)-\text{non-varied}} = \sum_{i=1}^K \int d\Gamma \left( \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^T \frac{dA}{d\theta_i} \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{K}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{K} \right) \delta \theta_i = 0 \quad (7.40)$$

и, учитывая независимость  $\theta_i$  компонент друг от друга,  $i=1,\dots,K$ , и основную лемму вариационного исчисления, получаем необходимые условия локальной оптимальности первого порядка для максимизации жёсткости закритически деформируемой пластины:

$$\frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^T \frac{dA}{d\theta_i} \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{K}^T \frac{dD}{d\theta_i} \vec{K} = 0, \quad i=1,\dots,K \quad (7.41)$$

Далее, вычислим первый член в (7.41) (этот член соответствует 2D-деформациям срединной плоскости) в осях главных 2D-деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Второй член в (7.41) (этот член соответствует изгибу и кручению пластины) вычислим в осях главных обобщённых кривизн  $K_1, K_2$  срединной плоскости, где  $K_1 \geq K_2$ . Проводя необходимые преобразования и помня, что абсолютная величина якобиана перехода от осей главных деформаций к осям главных обобщённых кривизн равен единице (этот переход является просто поворотом), получаем для  $i=1,\dots,K$ :

$$\frac{1}{2} \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} \frac{dA_{11}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} \\ \frac{dA_{12}^{pr.str.}}{d\theta_i} & \frac{dA_{22}^{pr.str.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (K_1, K_2) \begin{bmatrix} \frac{dD_{11}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \\ \frac{dD_{12}^{pr.cur.}}{d\theta_i} & \frac{dD_{22}^{pr.cur.}}{d\theta_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (7.42)$$

где  $pr.str.$ ,  $pr.cur.$  соответствуют главным осям деформаций и обобщённых кривизн.

Анализируя (7.42), рассмотрим сначала первый член этого соотношения.

Подставляя в (7.42) соотношения (7.38), получаем для каждого  $i$ -го слоя,  $i=1,\dots,K$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + \\ + \varepsilon_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi) \end{array} \right\} \frac{1}{2}(z_i - z_{i-1}) \quad (7.43)$$

где  $\varphi$  - угол между глобальной осью  $x$  и осью  $\varepsilon_1$ ;  $U_2, U_3$  - некоторые константы материала слоя (см. Gibson, 1994).

Аналогично, второй член даёт для каждого  $i$ -го слоя,  $i=1,\dots,K$ :

$$\begin{aligned} & \{K_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] \\ & + K_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] \\ & + 2K_1K_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)\} \frac{1}{6}(z_i^3 - z_{i-1}^3) \end{aligned} \quad (7.44)$$

где  $\psi$  - угол между глобальной осью  $x$  и осью  $K_1$ .

Сумма (7.43) и (7.44), приравненная нулю, будет необходимым условием локальной оптимальности первого порядка для каждого слоя,  $i=1,\dots,K$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + \\ + \varepsilon_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \varphi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi)] + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \varphi) \end{array} \right\} \frac{1}{2}(z_i - z_{i-1}) \\ & + \left\{ \begin{array}{l} K_1^2[-2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + \\ + K_2^2[2U_2 \sin 2(\theta_i - \psi) - 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi)] + 2K_1K_2 4U_3 \sin 4(\theta_i - \psi) \end{array} \right\} \frac{1}{6}(z_i^3 - z_{i-1}^3) = 0 \end{aligned} \quad (7.45)$$

Как мы видим, эти условия – существенно нелинейны. Преобразуя (7.45), получаем:

$$\begin{aligned}
& 2 \sin 2(\theta_i - \varphi) \{ \varepsilon_1^2 [-U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi)] + \varepsilon_2^2 [U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi)] \\
& + 8\varepsilon_1\varepsilon_2 U_3 \cos 2(\theta_i - \varphi) \} \frac{1}{2} (z_i - z_{i-1}) \\
& + 2 \sin 2(\theta_i - \psi) \{ K_1^2 [-U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \psi)] \\
& + K_2^2 [U_2 - 4U_3 \cos 2(\theta_i - \psi)] + 8K_1 K_2 U_3 \cos 2(\theta_i - \psi) \} \frac{1}{6} (z_i^3 \\
& - z_{i-1}^3) = 0
\end{aligned} \tag{7.46}$$

И, наконец, деля на  $-(z_i - z_{i-1})4U_3$ :

$$\begin{aligned}
& \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] \\
& + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (K_1^2 - K_2^2) + (K_1 - K_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 \\
& + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) = 0
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Как мы видим, зависимость от материала осуществляется через параметр  $\frac{U_2}{4U_3}$ . Точная зависимость от положения слоя по  $z$  обусловлена последним множителем второго члена. Связь между слоями происходит вследствие линий главных 2D-деформаций, линий главных обобщённых кривизн, значений главных 2D-деформаций и значений главных обобщённых кривизн. Далее обсудим расположение слоёв с возможным доминированием одного члена (слагаемого) условий оптимальности.

Анализируя (7.47), можно также сказать, что внутренние и внешние слои играют различную роль в этих условиях. В частности, из первого члена в (7.47) следует, что внутренние слои наиболее чувствительны к главным 2D-деформациям и соответствующим им главным направлениям. Что касается же внешних слоёв, они наиболее чувствительны (вследствие множителя с  $z^2$  у второго члена) к главным значениям обобщённых кривизн и соответствующим им главным направлениям.

Если мы просуммируем (7.46) для всех  $i$  и воспользуемся соотношениями (7.38) для матриц  $A$  и  $D$  через  $\bar{Q}_{ij}$  (см. также Gibson, 1994), то получим следующее объединяющее условие:

$$\begin{aligned} & [A_{16}^{pr.str.} \varepsilon_1^2 - A_{26}^{pr.str.} \varepsilon_2^2 - (A_{16}^{pr.str.} - A_{26}^{pr.str.}) \varepsilon_1 \varepsilon_2] + \\ & + [D_{16}^{pr.cur.} K_1^2 - D_{26}^{pr.cur.} K_2^2 - (D_{16}^{pr.cur.} - D_{26}^{pr.cur.}) K_1 K_2] = 0 \end{aligned} \quad (7.48)$$

или, после использования определений матриц  $A$  и  $D$ , соотношение с ясным физическим смыслом

$$N_{xy}^{pr.str.} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.} (K_1 - K_2) = 0 \quad (7.49)$$

Соотношение (7.49) – это линейная комбинация условий оптимальности (7.46) или (7.47), и, следовательно, соотношение (7.49) является условием оптимальности, объединяющим таковые для каждого слоя. Первый член в (7.49), если его отдельно рассмотреть равным нулю, означает, что (при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ) тензор деформаций в срединной плоскости соосен с тензором сил, и поток напряжений сдвига в осях главных деформаций срединной плоскости равен нулю. Второй член в (7.49), если его отдельно рассмотреть равным нулю, означает, что (при  $K_1 \neq K_2$ ) тензор обобщённых кривизн срединной плоскости и тензор моментов – соосны, и крутящий момент в осях главных кривизн равен нулю.

Отметим, что результат (7.49) справедлив и для локально-ортотропной пластины при  $K=1$ .

Обобщение (7.47) на случай слоёв с прямолинейными волокнами записывается так,  $i=1, \dots, K$ :

$$\begin{aligned} & \iint d\Gamma \left\{ \sin 2(\theta_i - \varphi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos 2(\theta_i - \varphi) \right] \right. \\ & + \sin 2(\theta_i - \psi) \left[ \frac{U_2}{4U_3} (K_1^2 - K_2^2) + (K_1 - K_2)^2 \cos 2(\theta_i - \psi) \right] \frac{1}{3} (z_i^2 \\ & \left. + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2) \right\} = 0 \end{aligned}$$

(7.50)

Обобщение (7.49) для этого случая будет

$$\int_{\Gamma} d\Gamma [N_{xy}^{pr.str.}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + M_{xy}^{pr.cur.}(k_1 - k_2)] = 0 \quad (7.51)$$

### 7.6.3. Некоторые особые решения условий оптимальности

Анализ условий оптимальности (7.47) позволяет установить некоторые их решения. А именно: когда

$$\theta_i = (\varphi \text{ или } \psi), i=1, \dots, K \quad (7.52)$$

и

$$\varphi = \psi \quad (7.53)$$

или

$$\varphi = \psi + \pi/2 \quad (7.54)$$

тогда условия (7.47) удовлетворены. В этом случае синусы перед квадратными скобками в (7.47) равны нулю.

Оптимальные ориентации (7.52)-(7.54) являются локально ортотропными. Оси ортотропии для этих решений соприкасаются с налагающимися друг на друга осями главных 2D-деформаций и главных обобщённых кривизн.

## **Глава 8. Заключение и выводы**

Резюмируем приведенные в этой книге результаты в целом и сформулируем необходимые заключение и выводы.

В качестве заключения можно сказать, что нами получены и представлены результаты выбора укладок слоёв композиционных пластин, максимизирующие нагрузку потери устойчивости и повышающие несущую способность и прочность пластин и панелей как при умеренных, так и при больших закритических прогибах.

Основные выводы из проведенного анализа – следующие:

- важную роль при выборе оптимальной укладки пластины играют величины и направления главных 2D-деформаций и (обобщённых) кривизн деформированной поверхности;
- при проектировании для одного случая нагружения возможным решением является направление армирующих волокон слоёв вдоль одного из указанных главных направлений.

Укажем также, что теоретические результаты Глав 5, 6 и 7 по анализу устойчивости и умеренных или сильных закритических прогибов и выбору наилучших укладок для таких условий очевидным образом непосредственно обобщаются и являются справедливыми для случая панелей и пластин с сотовым слоем внутри (как указано в разделе 2.2).

## **Список литературы**

Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва, Машиностроение, 1984.

Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск, Наука, 2001.

Баничук Н. В., Кобелев В. В., Рикардс Р. Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. Москва, Машиностроение, 1988.

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, изд-во Лань. 2015

Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. Москва, Физматлит, 2003

Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва, Машиностроение, 1980.

Васидзу К. 1987. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., Мир.

Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. Москва, Машиностроение, 1988.

Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов Ф. Ф. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. Москва, Наука, 1997.

Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.

Голован В.И. и др., 2022. Проектирование, расчёты и статические испытания металлокомпозитных конструкций. Москва, ЦАГИ, РИЦ Техносфера, 408 стр.

Гришин В. И., Дзюба А. С., Дударьков Ю. И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. Москва, Физматлит, 2013.

Дудченко А. А. Прочность и проектирование элементов авиационных конструкций из композитного материала. Москва, МАИ, 2014, ISBN 9785703518809, 200 с.

Елпатьевский А. Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. Москва, Машиностроение, 1972.

Зиновьев П.А., Смердов А.А. Оптимальное проектирование композитных материалов, Москва, МГТУ, 2006.

Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.

Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва, Наука, 1977.

Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Москва, Ленинград, ОГИЗ, 1947.

Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига, Зинатне, 1980.

Максименко В.Н., Олегин И.П., Пустовой Н.В. Методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций из композитов. НГТУ, 2015.

Матвеев К. А., Пустовой Н. В. Вариационные методы исследования устойчивости анизотропных пластин при температурно-силовом нагружении. Новосибирск, НГУ, 2005.

Митрофанов О.В. Проектирование несущих панелей авиационных тонкостенных конструкций по критическому состоянию с учетом ограничений по ресурсу. Москва, Спутник, 2012.

Митрофанов О.В. Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по критическому состоянию. Москва, изд-во МАИ, 2020.

Митрофанов О.В., Кайков К.В. Прикладные задачи проектирования композитных подкрепленных панелей при ограничениях по устойчивости и несущей способности. Москва, Спутник, 2017.

Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва, Наука, 1970.

Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига, Зинатне, 1988.

Новожилов В.В. 1948. Основы нелинейной теории упругости. ОГИЗ.

Новожилов В.В. 1958. Теория упругости. Судпромгиз.

Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., «Машиностроение», 1977, 144 с.

Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. МГУ, 1984.

Полилов А.Н. 2016. Экспериментальная механика композитов. МГТУ им. Баумана.

Ashton J. E., Whitney J. M. Theory of laminated plates. Technomic Publication, 1970

Christensen PW, Klarbring A. 2009. An Introduction to Structural Optimization. Springer, 2009.

Falzon BG, Aliabadi MH Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies, Imperial College Press, 2008.

Gibson RF 1994. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, Inc., 425 pp.

Grenestedt JL, 1989. A study of the effect of bending-twisting coupling on buckling strength. Composite Structures, 12, 271-290.

Grenestedt JL, 1991. Layup optimization against buckling of shear panels. Structural Optimization, 3, 115-120.

Groh, R. , & Weaver, P. M. (2015). Mass Optimisation of Variable Angle Tow, Variable Thickness Panels with Static Failure and Buckling Constraints. In 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. (AIAA).  
<https://doi.org/10.2514/6.2015-0452>

Jones RM. 2018. Mechanics of composite materials. Taylor & Francis.

Kollar L. P., Spinger G. S. Mechanics of composite structures. New York,Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

Kassapoglou C 2010. Design and Analysis of Composite Structures: With Applications to Aerospace Structures. Wiley.

Libove C. (1983). Buckle pattern of biaxially compressed simply supported orthotropic rectangular plates. [Journal of Composite Materials 1983 / 01 Vol. 17; Iss. 1](#). DOI: 10.1177/002199838301700104

Nemeth MP. (1995). Buckling Behavior of Long Anisotropic Plates Subjected to Combined Loads. NASA TP 3568

Narita Y, Leissa AW, 1990. Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates. Engng & Applied Sciences, (32)11, 909-924, 1990.

Reddy JN 2004. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2<sup>nd</sup> edition. CRC Press, 831 pp.

Selyugin S. (2013). On Choice of Optimal Anisotropy of Composite Plates against Buckling, with Special Attention to Bending-twisting Coupling. Struct Multidisc Optim 48: 279–294

Selyugin S. (2016) Some approaches to buckling analysis of flexurally anisotropic composite plates, subjected to combined in-plane loading. Thin-Walled Structures, 98: 375-383.

Selyugin S., Balzer J-R. (2017a) European Patent EP2910365B1. Composite structural element and torsion box.

Selyugin S., Balzer J-R. (2017b) USA Patent US9,827,737B2. Composite structural element and torsion box.

Selyugin S., Balzer J-R. (2019) European Patent EP3530452B1. Composite structural element.

Selyugin, S. (2019a). A reciprocity theorem for buckling states of vat (steered fiber) composite plates. <https://doi.org/10.31224/osf.io/2ewqn>

Selyugin, S. (2019b). A relation between lamination parameters of stiffest post-buckled composite plate. <https://doi.org/10.31224/osf.io/ctzue>

Selyugin, S. (2019c). A complementary energy theorem for composite plates in postbuckling. <https://doi.org/10.31224/osf.io/5mtq6>

Selyugin, S. (2019d). Composite plates in postbuckling: dual extremal variational principles, energy features, stability, lay-up optimality conditions via complementary energy approach. <https://doi.org/10.31224/osf.io/3vbj6>

Selyugin, S. (2019e). Lay-up optimality conditions for stiffness maximization of anisotropic composite plates in postbuckling. <https://doi.org/10.31224/osf.io/k2rwp>

Selyugin, S. (2019f). Composite plates and their lay-up solutions leading to high buckling and post-buckling resistance. <https://doi.org/10.31224/osf.io/6q4zj>

Selyugin, S. (2019g). Lay-up optimality conditions for buckling level maximization of VAT (steered fiber) composite plates.  
<https://doi.org/10.31224/osf.io/g7v2a>

Selyugin S. (2019h). On Lay-up Solutions for Composite Plates with High Resistance to Buckling and Postbuckling. ISBN 978-90-829101-1-7. SAMPE-Europe, Nantes, France, September 17-19, 2019.

Selyugin, S. (2020). Analysis of lay-up optimality conditions for buckling optimization of VAT (steered fiber) composite plates.

<https://doi.org/10.31224/osf.io/9n58h>

Selyugin, S. (2021a). Thin metallic and composite plates experiencing large deflections above the von Karman limits.

DOI: <https://doi.org/10.31224/osf.io/hr79j>

Selyugin, S. (2021b). A kinematic variational principle for thin metallic and composite plates experiencing large deflections above the von Karman limits.

DOI: <https://doi.org/10.31224/osf.io/e2vgj>

Selyugin, S. (2021c). Locally orthotropic lay-up as an optimal solution for vat post-buckled composite plates experiencing large deflections above von Karman limits. DOI: <https://doi.org/10.31224/osf.io/4a6hz>

Selyugin, S. (2021d). Some featured optimal lay-up solutions for composite vat plates under buckling, postbuckling and large-deflection postbuckling conditions. DOI:

<https://doi.org/10.31224/osf.io/v6djp>

Selyugin S., Balzer J-R. (2021e) US Patent US11,136,108. Composite structural element.

Selyugin S. (2022a). On strain compatibility conditions for metallic or composite plates experiencing large deflections. DOI: 10.13140/RG.2.2.20941.31204

Selyugin (2022b) On optimal lay-up solutions for VAT (steered fibre) composite plates, withstanding buckling under two alternative loadings. DOI:  
10/13140/RG.2.2.35765/96483/1

Tenenbaum J, Deutsch A, Eisenberger M. Analytical buckling loads for corner supported rectangular orthotropic and symmetrically laminated plates ZAMM, 2019, 99, 11. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900142>

Thielemann W. 1950. Contribution to the problem of buckling of orthotropic plates with special reference to plywood, NACA TM 1263, 1950

Timoshenko JG, Gere JM. 1961. Theory of elastic stability. McGraw-Hill

Turvey GJ, Marshall IH (eds) 1995. Buckling and postbuckling of composite plates. Chapman and Hall.

Weaver PM, Nemeth MP. (2008). Improved Design Formulae for Buckling of Orthotropic Plates under Combined Loading. AIAA J, 2008, 46 (9), 2391 - 2396

Xu, Y., Zhu, J., Wu, Z. et al. (2018). A review on the design of laminated composite structures: constant and variable stiffness design and topology optimization. *Adv Compos Hybrid Mater* 1, 460–477 (2018). <https://doi.org/10.1007/s42114-018-0032-7>

Zhang Y. and Matthews F. L., 1984. Postbuckling Behaviour of Anisotropic Laminated Plates under Pure Shear and Shear Combined with Compressive Loading, *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 2, 1984, 281-286.

## Приложение

Приведём некоторые преобразования и формулы для громоздких членов из Главы 7:

$$\begin{aligned}
K_u &= -N_{x,x} - N_{xy,y} - (N_x \hat{u}_{,x} + N_{xy} \hat{u}_{,y})_{,x} - (N_y \hat{u}_{,y} + N_{xy} \hat{u}_{,x})_{,y} - (M_x \xi)_{,xx} \\
&\quad - (M_y \xi)_{,yy} - \\
&- 2(M_{xy} \xi)_{,xy} + (\Omega_2 \hat{w}_{,y})_{,x} - (\Omega_2 \hat{w}_{,x})_{,y} - (\Omega_3)_{,x} - (\Omega_3 \hat{v}_{,y})_{,x} + (\Omega_3 \hat{v}_{,x})_{,y} \\
K_v &= -N_{y,y} - N_{xy,x} - (N_x \hat{v}_{,x} + N_{xy} \hat{v}_{,y})_{,x} - (N_y \hat{v}_{,y} + N_{xy} \hat{v}_{,x})_{,y} - (M_x \zeta)_{,xx} \\
&\quad - (M_y \zeta)_{,yy} - \\
&- 2(M_{xy} \zeta)_{,xy} + (\Omega_1 \hat{w}_{,x})_{,y} - (\Omega_1 \hat{w}_{,y})_{,x} - (\Omega_3)_{,y} - (\Omega_3 \hat{u}_{,x})_{,y} + (\Omega_3 \hat{u}_{,y})_{,x} \\
K_w &= -(M_x(1 + \chi))_{,xx} - (M_y(1 + \chi))_{,yy} - 2(M_{xy}(1 + \chi))_{,xy} \\
&\quad - (N_x \hat{w}_{,x} + N_{xy} \hat{w}_{,y})_{,x} - (N_y \hat{w}_{,y} + N_{xy} \hat{w}_{,x})_{,y} + (\Omega_1(1 + \hat{v}_{,y}))_{,x} - \\
&-(\Omega_1 \hat{v}_{,x})_{,y} + (\Omega_2(1 + \hat{u}_{,x}))_{,y} - (\Omega_2 \hat{u}_{,y})_{,x} \\
P_x &= [N_x(1 + \hat{u}_{,x}) + N_{xy} \hat{u}_{,y} + (M_x \xi)_{,x} + (M_{xy} \xi)_{,y} - \Omega_2 \hat{w}_{,y} + \Omega_3 + \Omega_3 \hat{v}_{,y}] \delta \hat{u} + \\
&+[N_{xy}(1 + \hat{v}_{,y}) + N_x \hat{v}_{,x} + (M_x \zeta)_{,x} + (M_{xy} \zeta)_{,y} + \Omega_1 \hat{w}_{,y} - \Omega_3 \hat{u}_{,y}] \delta \hat{v} + \\
&+[N_{xy} \hat{w}_{,y} + N_x \hat{w}_{,x} + (M_x(1 + \chi))_{,x} + (M_{xy}(1 + \chi))_{,y} - \Omega_1(1 + \hat{v}_{,y}) \\
&\quad + \Omega_2 \hat{u}_{,y}] \delta \hat{w} - \\
&-(M_x \xi) \delta \hat{u}_{,x} - (M_x \zeta) \delta \hat{v}_{,x} - M_x(1 + \chi) \delta \hat{w}_{,x} - M_{xy} \xi \delta \hat{u}_{,y} - M_{xy} \zeta \delta \hat{v}_{,y} \\
&\quad - M_{xy}(1 + \chi) \delta \hat{w}_{,y} \\
P_y &= [N_{xy}(1 + \hat{u}_{,x}) + N_y \hat{u}_{,y} + (M_{xy} \xi)_{,x} + (M_y \xi)_{,y} + \Omega_2 \hat{w}_{,x} - \Omega_3 \hat{v}_{,x}] \delta \hat{u} + \\
&+[N_y(1 + \hat{v}_{,y}) + N_{xy} \hat{v}_{,x} + (M_{xy} \zeta)_{,x} + (M_y \zeta)_{,y} - \Omega_1 \hat{w}_{,x} + \Omega_3 + \Omega_3 \hat{u}_{,x}] \delta \hat{v} + \\
&+[N_y \hat{w}_{,y} + N_{xy} \hat{w}_{,x} + (M_y(1 + \chi))_{,y} + (M_y(1 + \chi))_{,x} + \Omega_1 \hat{v}_{,x} \\
&\quad - \Omega_2(1 + u_{,x})] \delta \hat{w} -
\end{aligned}$$

$$-M_{xy}\xi\delta\hat{u}_{,x}-M_{xy}\zeta\delta\hat{v}_{,x}-M_{xy}(1+\chi)\delta\hat{w}_{,x}-M_y\xi\delta\hat{u}_{,y}-M_y\zeta\delta\hat{v}_{,y} \\ -M_y(1+\chi)\delta\hat{w}_{,y}$$

где

$$\Omega_1 = -M_x\hat{u}_{,xx}-M_y\hat{u}_{,yy}-2M_{xy}\hat{u}_{,xy}$$

$$\Omega_2 = -M_x\hat{v}_{,xx}-M_y\hat{v}_{,yy}-2M_{xy}\hat{v}_{,xy}$$

$$\Omega_3 = -M_x\hat{w}_{,xx}-M_y\hat{w}_{,yy}-2M_{xy}\hat{w}_{,xy}$$

Вариация интеграла от контурных сил в потенциале внешних сил преобразуется к виду:

$$\int_{S_1} [f_x\delta u + f_y\delta v + f_z\delta w]dS = \\ = \int_{C_1} dC \{ F_x\delta\hat{u} + F_y\delta\hat{v} + F_z\delta\hat{w} \\ + [\left(-\tilde{M}_y\hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z(1 + \hat{v}_{,y})\right)l + (\tilde{M}_y\hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z\hat{v}_{,x})m] \delta\hat{u}_{,n} + \\ + [-(\tilde{M}_y\hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z(1 + \hat{v}_{,y}))m + (\tilde{M}_y\hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z\hat{v}_{,x})l] \delta\hat{u}_{,s} + \\ + [(\tilde{M}_x\hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z\hat{u}_{,y})l + (-\tilde{M}_x\hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z(1 + \hat{u}_{,x}))m] \delta\hat{v}_{,n} + \\ + [-(\tilde{M}_x\hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z\hat{u}_{,y})m + (-\tilde{M}_x\hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z(1 + \hat{u}_{,x}))l] \delta\hat{v}_{,s} + \\ + [(-\tilde{M}_x(1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y\hat{u}_{,y})l + (\tilde{M}_x\hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y(1 + \hat{u}_{,x}))m] \delta\hat{w}_{,n} + \\ + [(-\tilde{M}_x(1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y\hat{u}_{,y})m + (\tilde{M}_x\hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y(1 + \hat{u}_{,x}))l] \delta\hat{w}_{,s} \}$$

где, как было указано ранее в Главе 7:

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz, \quad \tilde{M}_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz$$

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz, \quad \tilde{M}_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz$$

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz ; \quad \tilde{F}_z = \int_{-h/2}^{h/2} z f_z dz$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (P_{x,x} + P_{y,y}) d\Gamma - \int_{S_1} [f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w] dS = \\
& \int_C dC \{ \delta \hat{u} [(1 + \hat{u}_{,x})(N_x l + N_{xy} m) + \hat{u}_{,y} (N_{xy} l + N_y m) + \Omega_2 (-l \hat{w}_{,y} + m \hat{w}_{,x}) \\
& \quad + \Omega_3 (l \hat{v}_{,y} - m \hat{v}_{,x})] \\
& \quad + l ((M_x \xi)_{,x} + (M_{xy} \xi)_{,y}) + m ((M_{xy} \xi)_{,x} + (M_y \xi)_{,y}) \} + \\
& \quad + \delta \hat{v} [\hat{v}_{,x} (l N_x + m N_{xy}) + (1 + \hat{v}_{,y}) (l N_{xy} + m N_y) + \Omega_1 (l \hat{w}_{,y} - m \hat{w}_{,x}) \\
& \quad + \Omega_3 (-l \hat{u}_{,y} + m (1 + \hat{u}_{,x})) + l ((M_x \zeta)_{,x} + (M_{xy} \zeta)_{,y}) + \\
& \quad + m ((M_{xy} \zeta)_{,x} + (M_y \zeta)_{,y})] + \\
& \quad + \delta \hat{w} [l (N_x \hat{w}_{,x} + N_{xy} \hat{w}_{,y} + (M_x (1 + \chi))_{,x} + (M_{xy} (1 + \chi))_{,y} - \Omega_1 (1 + \hat{v}_{,y}) \\
& \quad + \Omega_2 \hat{u}_{,y}) \\
& \quad + m (N_{xy} \hat{w}_{,x} + N_y \hat{w}_{,y} + (M_y (1 + \chi))_{,y} + (M_{xy} (1 + \chi))_{,x} + \\
& \quad + \Omega_1 \hat{v}_{,x} - \Omega_2 (1 + \hat{u}_{,x}))] - \\
& \quad - (l^2 M_x \xi + 2 l m M_{xy} \xi + m^2 M_y \xi) \delta \hat{u}_{,n} \\
& \quad - (-l m (M_x - M_y) \xi + (l^2 - m^2) M_{xy} \xi) \delta \hat{u}_{,s} - \\
& \quad - (l^2 M_x \zeta + 2 l m M_{xy} \zeta + m^2 M_y \zeta) \delta \hat{v}_{,n} \\
& \quad - (-l m (M_x - M_y) \zeta + (l^2 - m^2) M_{xy} \zeta) \delta \hat{v}_{,s} - \\
& \quad - (l^2 M_x + 2 l m M_{xy} + m^2 M_y) (1 + \chi) \delta \hat{w}_{,n} \\
& \quad - (-l m (M_x - M_y) + (l^2 - m^2) M_{xy}) (1 + \chi) \delta \hat{w}_{,s} \} - \\
& - \int_{C_1} dC \{ F_x \delta \hat{u} + F_y \delta \hat{v} + F_z \delta \hat{w} \\
& \quad + [(-\tilde{M}_y \hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z (1 + \hat{v}_{,y})) l + (\tilde{M}_y \hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z \hat{v}_{,x}) m] \delta \hat{u}_{,n} + \\
& \quad + [-(-\tilde{M}_y \hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z (1 + \hat{v}_{,y})) m + (\tilde{M}_y \hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z \hat{v}_{,x}) l] \delta \hat{u}_{,s} + \\
& \quad + [(\tilde{M}_x \hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z \hat{u}_{,y}) l + (-\tilde{M}_x \hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z (1 + \hat{u}_{,x})) m] \delta \hat{v}_{,n} + \\
& \quad + [(-\tilde{M}_x \hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z \hat{u}_{,y}) m + (-\tilde{M}_x \hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z (1 + \hat{u}_{,x})) l] \delta \hat{v}_{,s} + \\
& \quad + [(-\tilde{M}_x (1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y \hat{u}_{,y}) l + (\tilde{M}_x \hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y (1 + \hat{u}_{,x})) m] \delta \hat{w}_{,n} + \\
& \quad + [(-\tilde{M}_x (1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y \hat{u}_{,y}) m + (\tilde{M}_x \hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y (1 + \hat{u}_{,x})) l] \delta \hat{w}_{,s} \}
\end{aligned}$$

Следуя обычной процедуре, мы должны исключить вариации тангенциальных производных  $\delta \hat{u}_{,s}$ ,  $\delta \hat{v}_{,s}$ ,  $\delta \hat{w}_{,s}$  из полученного соотношения.

Соответствующий подход описан в (Васидзу 1987, Reddy 2004). Если контурный интеграл, написанный ниже, проинтегрировать по частям, то получаем

$$\int_G H \frac{\partial \delta\beta}{\partial s} ds = (H\delta\beta)|_G - \int_G \delta\beta \frac{\partial H}{\partial s} ds$$

где  $H, \delta\beta$  – некоторые функции на контуре  $G$  и первый член в правой части означает разницу произведения в скобках на концах контура.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} A_u &= (lm(M_x - M_y)\xi - (l^2 - m^2)M_{xy}\xi) \\ &+ \left[ (-\tilde{M}_y \hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z(1 + \hat{v}_{,y}))m - (\tilde{M}_y \hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z \hat{v}_{,x})l \right] \\ A_v &= (lm(M_x - M_y)\zeta - (l^2 - m^2)M_{xy}\zeta) \\ &+ \left[ (\tilde{M}_x \hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z \hat{u}_{,y})m - (-\tilde{M}_x \hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z(1 + \hat{u}_{,x}))l \right] \\ A_w &= (lm(M_x - M_y) - (l^2 - m^2)M_{xy})(1 + \chi) \\ &+ \left[ (-\tilde{M}_x(1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y \hat{u}_{,y})m - (\tilde{M}_x \hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y(1 + \hat{u}_{,x}))l \right] \end{aligned}$$

Тогда все члены, содержащие вариации тангенциальных производных, записываются в виде:

$$A_u \delta \hat{u}_{,s} + A_v \delta \hat{v}_{,s} + A_w \delta \hat{w}_{,s}$$

Следует отметить, что члены в квадратных скобках не равны нулю только на нагруженной части  $C_1$  контура  $C$  пластины.

Преобразуя контурный интеграл с учётом сказанного и удаляя члены на концах контура (вариации перемещений на концах опёртой части  $C_2$  контура  $C$  равны нулю), мы получаем подинтегральный член, соответствующий тангенциальным производным перемещений  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ , в виде:

$$\frac{\partial A_u}{\partial s} \delta \hat{u} + \frac{\partial A_v}{\partial s} \delta \hat{v} + \frac{\partial A_w}{\partial s} \delta \hat{w}$$

Теперь ясно, что последнее соотношение даст некоторые дополнительные члены для краевых условий. Полученные соотношения и ведут к этим краевым

условиям. А именно, на  $C_1$  множители у величин  $\delta\hat{u}, \delta\hat{v}, \delta\hat{w}, \delta\hat{u}_{,n}, \delta\hat{v}_{,n}, \delta\hat{w}_{,n}$  должны быть равны нулю. Это дает шесть соотношений на  $C_1$ :

$$\begin{aligned}
& [(1 + \hat{u}_{,x})(N_x l + N_{xy} m) + \hat{u}_{,y}(N_{xy} l + N_y m) + \Omega_2(-l\hat{w}_{,y} + m\hat{w}_{,x}) \\
& \quad + \Omega_3(l\hat{v}_{,y} - m\hat{v}_{,x})] \\
& + l((M_x \xi)_{,x} + (M_{xy} \xi)_{,y}) + m((M_{xy} \xi)_{,x} + (M_y \xi)_{,y})] + \frac{\partial A_u}{\partial s} - F_x = 0 \\
& [\hat{v}_{,x}(lN_x + mN_{xy}) + (1 + \hat{v}_{,y})(lN_{xy} + mN_y) + \Omega_1(l\hat{w}_{,y} - m\hat{w}_{,x}) \\
& \quad + \Omega_3(-l\hat{u}_{,y} + m(1 + \hat{u}_{,x}))] \\
& + l((M_x \zeta)_{,x} + (M_{xy} \zeta)_{,y}) + m((M_{xy} \zeta)_{,x} + (M_y \zeta)_{,y})] + \frac{\partial A_v}{\partial s} - F_y = 0 \\
& [l(N_x \hat{w}_{,x} + N_{xy} \hat{w}_{,y} + (M_x(1 + \chi))_{,x} + (M_{xy}(1 + \chi))_{,y} - \Omega_1(1 + \hat{v}_{,y}) + \Omega_2 \hat{u}_{,y}) \\
& \quad + m(N_{xy} \hat{w}_{,x} + N_y \hat{w}_{,y} + (M_y(1 + \chi))_{,y} + (M_{xy}(1 + \chi))_{,x} + \Omega_1 \hat{v}_{,x} \\
& \quad - \Omega_2(1 + \hat{u}_{,x}))] + \frac{\partial A_w}{\partial s} - F_z = 0 \\
& -(l^2 M_x \xi + 2lm M_{xy} \xi + m^2 M_y \xi) \\
& \quad - [(-\tilde{M}_y \hat{w}_{,y} + \tilde{F}_z(1 + \hat{v}_{,y}))l + (\tilde{M}_y \hat{w}_{,x} - \tilde{F}_z \hat{v}_{,x})m] = 0 \\
& -(l^2 M_x \zeta + 2lm M_{xy} \zeta + m^2 M_y \zeta) \\
& \quad - [(\tilde{M}_x \hat{w}_{,y} - \tilde{F}_z \hat{u}_{,y})l + (-\tilde{M}_x \hat{w}_{,x} + \tilde{F}_z(1 + \hat{u}_{,x}))m] = 0 \\
& -(l^2 M_x + 2lm M_{xy} + m^2 M_y)(1 + \chi) \\
& \quad - [(-\tilde{M}_x(1 + \hat{v}_{,y}) + \tilde{M}_y \hat{u}_{,y})l + (\tilde{M}_x \hat{v}_{,x} - \tilde{M}_y(1 + \hat{u}_{,x}))m] = 0
\end{aligned}$$

На  $C_2$  мы имеем условия защемления

$$\delta\hat{u} = \delta\hat{v} = \delta\hat{w} = \delta\hat{u}_{,n} = \delta\hat{v}_{,n} = \delta\hat{w}_{,n} = 0$$

Уравнения равновесия должны быть дополнены соотношениями, описывающими силы и моменты в срединной плоскости через перемещения и их производные.