УДК 517.53, 517.54

ТЕОРЕМА РИССА-ФЕЙЕРА И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

Ступин Д. Л.

Изложена классическая теорема Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов, охарактеризовано множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью, дано одно условие единственности такого многочлена и связь этого результата с условием единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа.

The classical Fejer-Riesz theorem for trigonometric polynomials is expounded, the set of all polynomials with a positive real part in the unit circle is characterized, and one condition for uniqueness of such a polynomial and the connection of this result with the condition for uniqueness of an extremal function in the Krzyz problem is given.

Ключевые слова: Теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены Лорана, полиномы Лорана, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, Laurent Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions

Введение

Выражение вида

$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

называется тригонометрическим многочленом. Очевидно $T(t) \in \mathbb{R}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ эквивалентно $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Любой тригонометрический полином можно записать в эквивалентной форме

$$T(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Аналогично, $T(t) \in \mathbb{R}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ эквивалентно $\bar{c}_k = c_{-k}$, $k = 0, \dots, n$.

Как указывается в [4], в начале девятнадцатого века Л. Фейер [1] первым отметил важность класса тригонометрических полиномов, принимающих только неотрицательные значения на действительной прямой. Его предположение о структуре таких многочленов было доказано Ф. Риссом [2] и сегодня известно как теорема Рисса-Фейера.

Обозначим единичный круг через $\Delta := \{z : z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1\}$, а единичную окружность через $\partial\Delta$.

Лемма 1. *Если* $H(z) := \sum\limits_{n=0}^{n} h_k z^k$, $h_k \in \mathbb{C}$, *то сужение* $\operatorname{Re} H(z)$ *на единичную окружность* $\partial\Delta$ *есть тригонометрический полином* $T(t) := \operatorname{Re} H(e^{it})$. *Если* $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, *то* $T(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Справедливость леммы 1 очевидна.

В этой статье мы изложим доказательства классической теоремы Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов с действительными и с комплексными коэффициентами по отдельности чисто из методических соображений, так как понятно, что первый результат просто частный случай второго. Доказательство теоремы Рисса-Фейера можно найти в [3] и в [5, стр. 154].

Далее, охарактеризуем множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью. В книге [6, стр. 64] имеется задача 4 о многочленах с положительной действительной частью.

В заключении, покажем единственность многочлена с положительной вещественной частью и ограничением на коэффициенты $h_0 = h_n$, а также укажем на связь этого результата и условия единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа. Отметим, что в [12] доказано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

1. Действительные коэффициенты

Если многочлен $H(z)$ степени n имеет действительные коэффициенты, то соответствующий тригонометрический полином не будет содержать синусов, то есть $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kt$.

Очевидно, что если $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — полином степени n с действительными коэффициентами и $T(t) := |P(e^{it})|^2$, то $T(t) \geqslant 0$. Нетрудно также показать, что $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kt$, $a_k \in \mathbb{R}$. Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 1. *Если* $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ *и* $T(t) := |P(e^{it})|^2$, $t \in \mathbb{R}$, *то* $T(t) \geqslant 0$ *и* $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kt$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Сформулируем и докажем обратное утверждение.

Теорема 1 (Рисс, Фейер). *Пусть* $T(t) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kt \geqslant 0$, $a_n \neq 0$, $t, a_k \in \mathbb{R}$, *тогда найдётся* $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, *такой, что* $T(t) = |P(e^{it})|^2$. *Более того,* $P(z)$ *может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае* $P(z)$ *определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство. Положим $z := e^{it}$, тогда $z^k = e^{ikt}$ и $\cos kt = \dfrac{z^k + z^{-k}}{2}$. После такой замены переменной тригонометрический полином $T(t)$ превращается в многочлен Лорана

$$Q(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{z^k + z^{-k}}{2} = \sum_{k=n}^{1} \frac{a_k}{2} z^{-k} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2} z^k.$$

Многочлен $Q(z)$ имеет $2n$ корней в плоскости $\mathbb{C}$. Действительно,

$$z^n Q(z) = \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} z + \ldots + \frac{a_1}{2} z^{n-1} + a_0 z^n + \frac{a_1}{2} z^{n+1} + \ldots + \frac{a_n}{2} z^{2n}.$$

Так как $a_n \neq 0$, то по основной теореме алгебры многочлен $z^n Q(z)$ имеет $2n$ корней. При этом $z = 0$ не является корнем $z^n Q(z)$, так как $a_n \neq 0$. Заметим, что $z^n Q(z)$ — возвратный многочлен.

Очевидно, что корни $Q(z)$ и $z^n Q(z)$ совпадают. Из свойств комплексного сопряжения следует, что

$$Q(z) = \overline{Q(\bar{z})}, \qquad Q(z) = Q\left(\frac{1}{z}\right), \qquad Q(z) = \overline{Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

То есть, если z_k — корень $Q(z)$, $z_k \notin \mathbb{R}$ и $|z_k| > 1$, то $\bar{z}_k$, $1/z_k$ и $1/\bar{z}_k$ тоже корни $Q(z)$. Если r_k — корень $Q(z)$ и $r_k \in \mathbb{R}$ и $|r_k| \geqslant 1$, то только $1/r_k$ будет корнем. В частности, если r_k — корень $Q(z)$ и $|r_k| = 1$, то r_k будет иметь чётную кратность (так как всего корней $2n$).

Если z_k — корень $Q(z)$ и $|z_k| = 1$, $z_k \notin \mathbb{R}$, то только $\bar{z}_k$ будет корнем, так как $z_k = 1/\bar{z}_k$, $\bar{z}_k = 1/z_k$. Покажем, что z_k и $\bar{z}_k$ — корни чётной кратности. Фиксируем k и предположим обратное, то есть предположим, что корень $z_k = e^{i\varphi_k}$ может быть нечётной кратности. Тогда знак тригонометрического многочлена $T(t)$ в достаточно малой окрестности точки φ_k определяется знаком произведения $u_k(t) := e^{-it}(e^{it} - e^{i\varphi_k})(e^{it} - e^{-i\varphi_k})$, так как $u_k(t)$ — действительнозначная функция ($u_k(t) = 2(\cos(t) - \cos(\varphi_k))$). Но очевидно, что u_k меняет свой знак в указанной окрестности и мы приходим к противоречию с тем, что $T(t) \geqslant 0$. Случай с корнем $\bar{z}_k$ разбирается аналогично. Всюду далее считаем, что $|z_k| \geqslant 1$, так как случаи $|z_k| = 1$ и $|z_k| > 1$ ничем не отличаются.

Таким образом,

$$e^{int} T(t) = \frac{a_n}{2} \prod_{k=1}^{n_1} (e^{it} - r_k) \left(e^{it} - \frac{1}{r_k}\right) \prod_{k=1}^{n_2} (e^{it} - z_k)(e^{it} - \bar{z}_k) \left(e^{it} - \frac{1}{z_k}\right) \left(e^{it} - \frac{1}{\bar{z}_k}\right),$$

где $n_1 + 2n_2 = n$.

Заметив, что

$$e^{it} - \frac{1}{r_k} = -\frac{e^{it}}{r_k} \overline{(e^{it} - r_k)}, \qquad e^{it} - \frac{1}{z_k} = -\frac{e^{it}}{z_k} \overline{(e^{it} - \bar{z}_k)}, \qquad e^{it} - \frac{1}{\bar{z}_k} = -\frac{e^{it}}{\bar{z}_k} \overline{(e^{it} - z_k)},$$

имеем

$$e^{int} T(t) = \frac{a_n}{2} \frac{(-1)^{n_1} e^{in_1 t}}{r_1 \cdot \ldots \cdot r_{n_1}} \prod_{k=1}^{n_1} |e^{it} - r_k|^2 \frac{e^{2in_2 t}}{|z_1|^2 \cdot \ldots \cdot |z_{n_2}|^2} \prod_{k=1}^{n_2} |e^{it} - z_k|^2 |e^{it} - \bar{z}_k|^2,$$

то есть

$$T(t)=\frac{a_n}{2}\frac{(-1)^{n_1}}{r_1\cdot\ldots\cdot r_{n_1}\cdot|z_1|^2\cdot\ldots\cdot|z_{n_2}|^2}\prod_{k=1}^{n_1}|e^{it}-r_k|^2\prod_{k=1}^{n_2}|e^{it}-z_k|^2|e^{it}-\bar z_k|^2.$$

Так как $T(t)\geqslant 0$, то

$$c:=\frac{a_n}{2}\frac{(-1)^{n_1}}{r_1\cdot\ldots\cdot r_{n_1}\cdot|z_1|^2\cdot\ldots\cdot|z_{n_2}|^2}=\frac{|a_n|}{2|r_1|\cdot\ldots\cdot|r_{n_1}|\cdot|z_1|^2\cdot\ldots\cdot|z_{n_2}|^2}>0,$$

значит

$$P(z)=\sqrt{c}\prod_{k=1}^{n_1}(z-r_k)\prod_{k=1}^{n_2}(z-z_k)(z-\bar z_k).$$

Так как по построению все корни $P(z)$ лежат вне открытого единичного круга и $T(t)=|P(e^{it})|^2$, то многочлен $P(z)$ определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. ■

Заметим, что если убрать требование о том, чтобы все корни $P(z)$ лежали вне Δ, то $T(z)$ определяется не однозначно, что видно из построений, проведённых в доказательстве теоремы 1.

2. Возвратные многочлены

Если у нас есть многочлен $P_n(z)=p_0+\ldots+p_nz^n$, то взаимным многочленом к P_n будем называть полином $P_n^*(z):=\bar p_0z^n+\ldots+\bar p_n$, то есть $P_n^*(z)=z^n\overline{P_n\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$. Многочлен P будем называть возвратным, если $P(z)=P^*(z)$.

По аналогии с доказательством теоремы 1 можно показать, что возвратность полинома P_{2n} равносильна существованию многочлена P_n такого, что

$$P_{2n}(z)=P_n(z)P_n^*(z).$$

Понятие возвратности можно перенести на лорановские полиномы, после чего теорему Рисса-Фейера для тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами можно будет сформулировать следующим образом:
пусть $T(z):=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_kz^k\geqslant 0$, $c_n\neq 0$, $c_0\in\mathbb{R}$, $c_{-k}=\bar c_k$, $k=1,\ldots,n$, тогда найдётся $P(z):=\sum\limits_{k=0}^{n}p_kz^k$, $p_k\in\mathbb{C}$, такой, что $T(z)=P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$.
По этому поводу см. [3].

Далее мы сформулируем теорему Рисса-Фейера в классическом варианте.

3. Комплексные коэффициенты

Очевидно, что если $P(z)$, $z\in\mathbb{C}$, — полином степени n с комплексными коэффициентами и $T(t):=|P(e^{it})|^2$, то $T(t)\geqslant 0$. Нетрудно также показать, что $T(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$, $a_k,b_k\in\mathbb{R}$. Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 2. *Если* $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $z, p_k \in \mathbb{C}$ *и* $T(t) \coloneqq |P(e^{it})|^2$, $t \in \mathbb{R}$, *то* $T(t) \geqslant 0$ *и* $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Теорема 2 (Рисс, Фейер)**.** *Пусть* $T(t) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \geqslant 0$, $a_n \neq 0$ *или* $b_n \neq 0$, $t, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *тогда найдётся* $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $z, p_k \in \mathbb{C}$, *такой, что* $T(t) = |P(e^{it})|^2$. *Более того,* $P(z)$ *может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае* $P(z)$ *определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство. Положим $z \coloneqq e^{it}$, тогда $z^k = e^{ikt}$, откуда $\cos kt = \dfrac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin kt = \dfrac{z^k - z^{-k}}{2i}$. После такой замены переменной тригонометрический полином $T(t)$ превращается в многочлен Лорана

$$Q(z) \coloneqq \sum_{k=n}^{1} \frac{a_k + ib_k}{2} z^{-k} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} z^k.$$

Так как $a_n - ib_n \neq 0$, то $Q(z)$ имеет $2n$ корней, при этом $z = 0$ не является корнем. Из свойств комплексного сопряжения следует, что $Q(z) = \overline{Q(1/\bar{z})}$. То есть, если z_k — корень $Q(z)$, $|z_k| > 1$, то $1/\bar{z}_k$ тоже корень.

Если z_k — корень $Q(z)$ и $|z_k| = 1$, то $z_k = 1/\bar{z}_k$. Покажем, что z_k — корень чётной кратности. Выбрав произвольный номер k видим, что корень $z_k = e^{i\varphi_k}$ не может быть нечётной кратности так как выражение $e^{it} - e^{i\varphi_k}$ принимает чисто комплексные значения в достаточно малой проколотой окрестности точки φ_k. С другой стороны $u_k(t) \coloneqq -e^{-i(t+\varphi_k)}(e^{it} - e^{i\varphi_k})^2$ есть функция действительнозначная и неотрицательная так как $u_k(t) = 2(1 - \cos(t - \varphi_k))$. Всюду далее считаем, что $|z_k| \geqslant 1$, так как случи $|z_k| = 1$ и $|z_k| > 1$ ничем не отличаются.

Таким образом,

$$e^{int} T(t) = \frac{a_n - ib_n}{2} \prod_{k=1}^{n} (e^{it} - z_k) \left(e^{it} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right).$$

Заметив, что

$$e^{it} - \frac{1}{\bar{z}_k} = -\frac{e^{it}}{\bar{z}_k} \overline{(e^{it} - z_k)},$$

имеем

$$T(t) = \frac{a_n - ib_n}{2} \frac{(-1)^n}{\bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^{n} |e^{it} - z_k|^2.$$

Так как $T(t) \geqslant 0$, то

$$c \coloneqq \frac{a_n - ib_n}{2} \frac{(-1)^n}{\bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n} = \frac{|a_n - ib_n|}{2|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n|} > 0,$$

значит

$$P(z) = \sqrt{c}\prod_{k=1}^{n}(z - z_k).$$

Так как по построению все корни $P(z)$ лежат вне открытого единичного круга и $T(t) = |P(e^{it})|^2$, то многочлен $P(z)$ определён единственным образом с точностью до вращений. ■

Заметим, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней. Таким образом, любой тригонометрический многочлен степени n имеет не более чем $2n$ корней.

4. Характеризация класса полиномов с положительной в единичном круге действительной частью

Теорема 3. *Многочлен* $H(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} h_k z^k$, $h_0 > 0$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, *имеет положительную действительную часть в* Δ *тогда и только тогда, когда*

$$h_0 = \sum_{k=0}^{n}|p_k|^2,\ \ h_k = 2\sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\bar{p}_j, \quad \sum_{k=0}^{n}|p_k|^2 > 0,\ \ p_0, p_k \in \mathbb{C},\ \ k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Более того, $h_k \in \mathbb{R}$ *равносильно* $p_k \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Необходимость: докажем, что если $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, то H имеет коэффициенты (1). По лемме 1, выражение $T(t) \coloneqq \operatorname{Re} H(e^{it})$ есть тригонометрический полином и $T(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 2, найдётся многочлен $P(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, такой, что $T(t) = |P(e^{it})|^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
T(t) =& P(e^{it})\overline{P(e^{it})} = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{ikt} \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k e^{-ikt} = \\
=& |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&+ (p_0\bar{p}_1 + p_1\bar{p}_2 + \ldots + p_{n-1}\bar{p}_n)e^{-it} + \\
&+ (p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})e^{it} + \\
&+ (p_0\bar{p}_2 + p_1\bar{p}_3 + \ldots + p_{n-2}\bar{p}_n)e^{-i2t} + \\
&+ (p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})e^{i2t} + \\
&\quad \ldots \\
&+ p_0\bar{p}_n e^{-int} + \\
&+ p_n\bar{p}_0 e^{int}.
\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}
T(t) =& |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\
&+ 2\operatorname{Re}(\{p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1}\}e^{it}) + \\
&+ 2\operatorname{Re}(\{p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2}\}e^{i2t}) + \\
&\quad \ldots \\
&+ 2\operatorname{Re}(p_n\bar{p}_0 e^{int}).
\end{aligned}$$

Вспоминая, что для перехода от обычного многочлена к тригонометрическому мы использовали замену $z = e^{it}$ имеем

$$\begin{aligned} h(z) :=& \\ :=&|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 + \\ &+2(p_1\bar{p}_0 + p_2\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-1})z + \\ &+2(p_2\bar{p}_0 + p_3\bar{p}_1 + \ldots + p_n\bar{p}_{n-2})z^2 + \\ &\quad\ldots \\ &+2p_n\bar{p}_0 z^n. \end{aligned}$$

Итак, мы сначала отбросили мнимую часть функции H и факторизовали $\operatorname{Re} H(e^{it})$ чтобы получить требуемое представление её коэффициентов, затем восстановили аналитическую функцию $h(z)$ по действительной части, функции $H(z)$, заданной на единичной окружности и продолжили её с единичной окружности на всю комплексную плоскость. Так как аналитическое продолжение единственно, то $H(z) \equiv h(z)$. Что и требовалось.

Достаточность: докажем что если H имеет коэффициенты (1), то $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$. Действительно, пусть H имеет коэффициенты (1). Просмотрев вычисления из доказательства необходимого условия в обратном порядке приходим к $\operatorname{Re} H(e^{it}) = P(e^{it})\overline{P(e^{it})} =: T(t)$. Стало быть, $\operatorname{Re} H(e^{it}) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, согласно утверждению 2. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$. Что и требовалось.

Если все коэффициенты многочлена $H(z)$ действительные, то вместо теоремы 2 можно использовать теорему 1. ■

5. Условие единственности многочлена с положительной действительной частью

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $H(z) := h_0 + h_1 z + \ldots + h_n z^n$, $h_0 > 0$, и $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, тогда существует и притом единственный многочлен H такой, что $h_0 = h_n$. Более того, $h_1 = \ldots = h_{n-1} = 0$.*

Доказательство. Многочлен $H(z) := h_0 + h_1 z + \ldots + h_n z^n$ по теореме 3 может быть представлен в виде

$$H(z) = (|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2)z^0 + \ldots + 2p_n\bar{p}_0 z^n,$$

откуда следует, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2, \qquad h_n = 2p_n\bar{p}_0.$$

Стало быть, так как $h_0 = h_n$, то

$$|p_0|^2 + \ldots + |p_n|^2 = 2p_n\bar{p}_0,$$

что эквивалентно

$$|p_0|^2 - 2\operatorname{Re} p_n\bar{p}_0 + |p_n|^2 + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 2i \operatorname{Im} p_n\bar{p}_0,$$

что равнозначно

$$|p_0 - p_n|^2 + |p_1|^2 + \ldots + |p_{n-1}|^2 = 2i \operatorname{Im} p_n \bar{p}_0,$$

а это равносильно тому, что $p_0 = p_n$ и $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$. ∎

6. Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж высказал гипотезу [7, 8] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z,t) \coloneqq e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Задачу о нахождении

$$m_n \coloneqq \max_{f \in B} |\{f\}_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

мы будем называть проблемой Кшижа. Функцию f будем называть экстремальной в проблеме Кшижа, если $|\{f\}_n| = m_n$.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время, она доказана только до шестого тейлоровского коэффициента включительно [9]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Через Ω_0 обозначим класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть функции $G(z)$ и $g(z)$ голоморфны в Δ. Функция $g(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $G(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $G(z)$ будем называть мажорантой для $g(z)$ в Δ. Подробности см. в [11].

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [11], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\, h(z)}, \qquad h \in C, \tag{3}$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$. Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C и B_t.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

7. Некоторые свойства экстремальной функции в гипотезе Кшижа

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — экстремальная в проблеме Кшижа, то $\eta f(\zeta z)$, $|\eta| = |\zeta| = 1$, тоже экстремальная. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно мы можем считать без ограничения общности, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. Всюду далее, говоря об экстремальной функции f в проблеме Кшижа считаем, что $f \in B_t$, $t > 0$.

Все результаты этого пункта позаимствованы из [12]. Для полноты приведём их с доказательствами.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B$, $g \in C$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)}$, тогда*

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n) + o(\varepsilon). \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию функции f функцией $e^{\varepsilon g(z)}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z)g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив тереть $\{v\}_n$ получим требуемый результат. ∎

Утверждение 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция экстремальная в проблеме Кшижа и $H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \ldots + 2\{f\}_0 z^n$, причём $f(z) = e^{-th(z)}$, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, $h \in C$, тогда для любой $g \in C$*

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n) \geqslant 0. \tag{5}$$

В частности

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) = 0, \tag{6}$$

$$\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0, \tag{7}$$

$$\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0, \qquad z \in \bar{\Delta}. \tag{8}$$

Доказательство. Вариация v функции f при $\varepsilon > 0$ есть внутренняя вариация, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \to 0$ справедлива лемма 3, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная в проблеме Кшижа, значит $\operatorname{Re}\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$. Отсюда вытекает справедливость формулы (5).

Если теперь вместо g взять функцию h, то мы сможем найти достаточно малое $\varepsilon < 0$ такое, что $v(z) = f \cdot f^{\varepsilon} \in B$. Проведя рассуждения из предыдущего абзаца для $\varepsilon < 0$ получаем $\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) \leqslant 0$. Для $\varepsilon > 0$ справедлива формула (5) — $\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n) \geqslant 0$, откуда делаем вывод, что формула (6) верна.

Подставив коэффициенты функции $g(z) = \frac{1+z^n}{1-z^n} = 1 + 2z^n + \ldots$ в формулу (5) получим (7).

Подставив коэффициенты функции $g(z) = \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} = 1 + 2\zeta z + 2\zeta^2 z^2 + \ldots$ в формулу (5) получим $\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}\zeta + \ldots + \{f\}_0\zeta^n) \geqslant 0$, $|\zeta| \leqslant 1$, что равносильно (8). ∎

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Наличие выпуклой структуры на множестве всех функций g, подчиненных функции

$$M(z,t) \coloneqq \frac{e^{-t}+z}{1+e^{-t}z} = e^{-t} + (1-e^{-2t})z + \dots.$$

позволяет получить оценки $|\{g\}_n| \leqslant 1-e^{-2t}$, причём равенство в этом неравенстве достигается только на вращениях $M(z,t)$ в плоскости переменной z.

Каждая функция f класса B_t подчинена мёбиусову отображению $M(z,t)$, стало быть

$$|\{f\}_n| < 1-e^{-2t} = 1 - |\{f\}_0|^2. \tag{9}$$

Неравенство строгое, так как $M(z,t) \notin B$.

Отметим, что при $t \in [0,1]$ эта оценка даёт хорошее приближение для предполагаемой верхней границы $|\{f\}_n|$ (гипотеза состоит в том, что $|\{f\}_n| \leqslant 2te^{-t}$, $f \in B_t$, $t \in [0,\,1]$). При $t=1$ погрешность максимальна и равна $1-e^{-2}-2e^{-1} < 0.129$, погрешность монотонно убывает и стремится к нулю при стремлении t к нулю [10].

Оценка (9) позволяет вычислить значение t_0 такое, что

$$|\{f\}_n| < 1-e^{-2t_0} = 2e^{-1}.$$

Вычисления дают $t_0 = -\ln\sqrt{1-2e^{-1}} \approx 0.665$. Следовательно, если $f \in B$ и $|\{f\}_0| \geqslant \sqrt{1-2e^{-1}} \approx 0.514$, то справедливы неравенства $|\{f\}_n| < 2/e$.

Из неравенства (7) и оценки (9) вытекает

Следствие 1. *Если f — экстремальная функция в проблеме Кшижа, причём $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$2\{f\}_0 \leqslant \{f\}_n < 1 - \{f\}_0^2.$$

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция экстремальная в проблеме Кшижа и $\{f\}_0 > 0$, тогда $\{f\}_0 < \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ или $t > -\ln(\sqrt{2}-1) \approx 0.881$.*

Доказательство. Подставив в (4) функцию $g(z) = \frac{1-z^n}{1+z^n} = 1-2z^n+\dots$ получим

$$\{v\}_n = (1-\varepsilon)\{f\}_n + 2\varepsilon\{f\}_0 + o(\varepsilon).$$

Благодаря этой формуле и следствию 1 мы можем видеть, что если $f \in B$ и $\{f\}_n > 0$, то $\{v\}_n > \{f\}_n$ при $t \leqslant t_0$ и $\{v\}_n < \{f\}_n$ при $t > 1$. Здесь t_0 — корень уравнения $1-e^{-2t_0} = 2e^{-t}$. (Легко показать, что $\{v\}_n > 0$.)

Основное свойство экстремальной функции f состоит в том, что $\{v\}_n \leqslant \{f\}_n$, а мы знаем, что при $\{f\}_n \geqslant \sqrt{2}-1$ имеет место неравенство $\{v\}_n \geqslant \{f\}_n$, следовательно $\{f\}_0 < \sqrt{2}-1$, что и требовалось доказать. ■

8. О единственности экстремальной функции в гипотезе Кшижа

Как упоминалось выше, класс B инвариантен относительно вращений в плоскостях переменных z и w ($w=f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — экстремальная в проблеме Кшижа, то мы можем считать без ограничения общности, что $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. При таких ограничениях на экстремальную функцию можно ставить вопрос о её единственности.

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f *— экстремальная функция в проблеме Кшижа и* $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$, *тогда* f *— единственная и* $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$, *другими словами* $f = F(z^n, 1)$.

Доказательство. Многочлен $H(z)$ из утверждения 3 удовлетворяет всем условиям леммы 2, стало быть искомая экстремальная функция единственна и удовлетворяет условиям $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$. Функция $F(z^n, 1)$, см. (2) имеет наибольший n-й коэффициент среди всех функций $F(z, t)$, $t > 0$, и соответствует всем этим требованиям и, в силу единственности, другой такой функции быть не может. Что и требовалось доказать. ■

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f *— экстремальная функция в проблеме Кшижа,* $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, *и* $\{f\}_1 = \ldots = \{f\}_{n-1} = 0$, *тогда* $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, f *— единственная и* $f = F(z^n, 1)$.

Доказательство. Из (6) следует, что $\{f\}_n = -\{f\}_0 \operatorname{Re}\{h\}_n \leqslant 2\{f\}_0$. (Здесь мы использовали оценку $|\{h\}_n| \leqslant 2$, $h \in C$. См. [11].) Так как f — экстремальная, то $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, откуда, согласно теореме 4 вытекает единственность f и то, что $f = F(z^n, 1)$. ■

В статье [12] приведено довольно-таки много свойств экстремальной функции и доказана их эквивалентность. Благодаря подходу, основанному на использовании теоремы 3, доказательство утверждений, содержащихся в теореме 4 удалось существенно сократить по сравнению с доказательствами, приведёнными в [12].

Из теоремы 3 и утверждения 3 сразу вытекает

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f *— экстремальная функция в проблеме Кшижа, причём* $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, *тогда найдутся* $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n$, *такие, что*

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \bar{p}_j. \tag{10}$$

Заметим, что из (10) следует, что $\{f\}_n = \sum\limits_{j=0}^{n} |p_j|^2$, а $\{f\}_0 = p_n \bar{p}_0$ и, так как $\{f\}_0 > 0$, то $\arg p_0 = \arg p_n$. Если показать, что ещё и $|p_0| = |p_n|$, то из теоремы 4 следует, что экстремальная функция единственная, а в [12] показано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В частности, если экстремальная функция единственная, то все её коэффициенты действительные. Действительно, если у экстремальной функции f есть хотя бы один комплексный коэффициент, то $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ тоже будет экстремальной и притом $f(z) \neq f^*(z)$.

9. Функции экстремального типа

Из следствия 2 вытекает, что экстремальную функцию нужно искать в классах B_t, $t > -\ln(\sqrt{2} - 1)$. Но $\ln(\sqrt{2} - 1) < 1$, а гипотеза Кшижа утверждает, что $t = 1$. Покажем, как свести поиски экстремальной функции к поискам не обязательно экстремальной функции в классах B_t, $t \geqslant 1$.

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Гипотеза Кшижа верна если и только если в классах B_t, $t \geqslant 1$ не существует f, такая, что $\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.*

Доказательство. Если существует экстремальная в проблеме Кшижа функция f, такая, что $\{f\}_0 > e^{-1}$, то $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0 > 2e^{-1}$, то найдётся константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$. Ясно, что $c\{f\}_0 < e^{-1}$ и $cf \in B$.

Если существует экстремальная в проблеме Кшижа функция f, такая, что $\{f\}_0 < e^{-1}$, то $\{f\}_n \geqslant 2e^{-1}$, то найдётся константа $c \leqslant 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$. Ясно, что $c\{f\}_0 < e^{-1}$ и $cf \in B$.

Таким образом, наличие в классе B функции f с $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n = 2e^{-1}$ эквивалентно тому, что гипотеза Кшижа не верна. При этом например из формулы (6) ясно, что $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.

Гипотеза Кшижа будет также не верна если в классе B_1 найдётся функция f, такая, что $\{f\}_n = 2\{f\}_0 = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \ldots + |\{f\}_{n-1}| > 0$. Из теоремы 4 следует, что f не может быть экстремальной. ■

Если f — функция экстремальная в проблеме Кшижа, то $cf \in B$, $0 < c < 1$. При этом, хотя cf уже не является экстремальной, для неё тем не менее верны соотношения (5), (6), (7) и (8).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = e^{-th(z)}$, $h \in C$, $t \geqslant 1$. Будем называть функцию f функцией экстремального типа, если

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{g\}_n\right) \geqslant 0,$$

для любой $g \in C$ и

$$\operatorname{Re}\left(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \ldots + \{f\}_0\{h\}_n\right) = 0.$$

(См. формулы (5) и (6) соответственно.)

Из этого определения ясно, что если f — функция экстремального типа, то $f \in B$, $0 < \{f\}_0 \leqslant e^{-1}$.

Так как формулы (7) и (8) являются следствиями формулы (5), то если f есть функция экстремального типа, то $\{f\}_n \geqslant 2\{f\}_0$ и $\operatorname{Re} H(z) \geqslant 0$, $z \in \bar{\Delta}$. Из последнего неравенства следует, что $\{f\}_n > 0$.

Список литературы

[1] Fejér L. Über trigonometrische Polynome. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 53—82.

[2] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 83—87.

[3] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization. // IJSRP. 2021. V. 11. I. 6.

[4] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. Encyclopedia of Mathematics. Springer Verlag GmbH, EMS.

[5] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.

[6] Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Издательство Томского университета. Томск. 1976.

[7] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[8] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[9] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112619

[10] Ступин Д. Л. Доказательство гипотезы Кшижа в некоторых подклассах. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2006. С. 49–50.

[11] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[12] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.