Счётица — естественная математика конечных чисел и точек

А. Н. Пан

Аннотация

Предложено вернуться к математике как "науке о количестве" (счётица), использующей только арифметику конечных множеств целых неотрицательных чисел (числица) и геометрию точек конечных размера и размерности (точкица). Введение разрешения чисел и точек с последующим переходом к приближения их непрерывности (сплошность) позволяет обходиться без бесконечных множеств, иррациональных чисел (недробей) и точек нулевого размера.

Математика, определяемая Аристотелем как "наука о количестве" , начиналась с подсчёта и перечисления предметов (арифметика), что привело к понятию числа, которому впоследствие добавили прилагательное "натуральное". Потом появились действия над числами — сложение и вычитание, отражающие прибавление и убавление предметов. Однако требование к действиям "не выводить за пределы заданного количества предметов" показалось слишком ограничительным, было отвергнуто и заменено требованием их применимости ко всем числам, которое могло быть выполнено только при расширении понятия числа и выходе за пределы области его определения.

Вначале **число** обозначало количество предметов и было всегда конечным. Расширение набора чисел $\mathbb{N}_l = [0, N]$ началось с переноса его границ на бесконечность. При $N \to \infty$ получилось множество натуральных чисел с нулём $\mathbb{N} = [0, \infty]$. После введения отрицательных чисел образовалось множество целых чисел $\mathbb{Z} = [-\infty, \infty]$, в котором сложение и вычитание применимы к любым его членам. Затем из сложения выделили умножение, как сложение одинаковых чисел, и обратное ему деление. Требование их всюду применимости привело к введению множества рациональных чисел (дробей) $\mathbb{Q}$. Далее из умножения было выделено возведение в степень, как умножение одинаковых чисел, и обратные ему извлечение корня и логарифмирование, которые стали всюду возможными после введения иррациональных $\mathbb{I}$ (**недроби**) и комплексных $\mathbb{C}$ чисел. Дроби и недроби были объединены в вещественные числа $\mathbb{R}$.

Так арифметика перешла с начальной основы "науки о количестве" на основу "науки об арифметических действиях". Она вышла из области определения и применения числа, как описания конечного количества предметов. Ей пришлось рассматривать бесконечность в качестве математического объекта и, в связи с этим, вводить разные бесконечности, инфинитезимальные, кардинальные и ординальные числа, бесконечно большие и малые величины, что привело к противоречиям.

На этом пути **арифметика потеряла строгость**, которую она же себе приписывала в качестве своего основного достоинства. Количество предметов и соответствующую ему величину числа можно представить сколь угодно большими, но не бесконечными, поскольку это противоречит естественным представлениям о нашем мире. Строго бесконечность возможна лишь как недостижимый предел, который не становится ближе при любом увеличении количества. Величина числа и количество чисел обязаны быть конечными по определению. Все используемые математикой числа, начиная с натуральных, и бесконечные множества этому требованию не удовлетворяют.

Предлагается вернуться к математике как "науке о количестве" . Такая счётная математика получила название **счётица**, чтобы отличить её от общепринятой математики, использующей вещественные числа. Она состоит из счётных арифметики (числица) и геометрии (точкица).

Числица

Числица — счётная арифметика, построенная на основе определений, отражающих простейшие особенности опыта обыденной жизни:
Предмет — часть среды обитания, которую можно рассматривать как некоторую отдельность, пренебрегая её связями с остальной средой и отвлекаясь от любых её особенностей (тождественность предметов).
Число — обозначение количества предметов, взятых из конечного их запаса. Предметы не нумеруются, т. к. это нарушает их неразличимость.
Ноль означает отсутствие предметов, **единица** — один предмет.
Бесконечность строго отсутствует, но может вводиться приближённо,

как обозначение недостижимых в задаче границ множества чисел.
Действие — изменение числа, выраженное сложением и вычитанием. Оно сводится к изменению числа на единицу и не должно выводить за пределы запаса предметов. Это требование ставит арифметику в зависимость от рассматриваемых задач. Счётица выводит её из состояния абсолютности и делает относительной.
Обратное действие совершается с числами из прямого действия.
Сложение двух чисел — прибавление к одному числу количества единиц, равное другому числу.
Вычитание — действие, обратное сложению.
Умножение — сложение нескольких одинаковых чисел. Один множитель — число, другой — количество чисел.
Деление — действие, обратное умножению.
Возведение в степень — умножение нескольких одинаковых чисел. Основание — число, степень — количество множителей.
Извлечение корня и логарифмирование — обратные действия нахождения основание и степени соответственно.

Набор чисел $\mathbb{N}_l : n = \{0, 1, \dots N\}$ отражает запас предметов N в данной задаче. Он представлен, как записанный в абсолютной системе чисел (**абсолютный счётчик, а-счётчик**), состоящей из начала отсчёта в нуле $n_0 = 0$ и единицы перехода $n_1 = 1$. При достаточно большом N можно перейти от абсолютного счётчика к относительному, выбирая n_0 в середине $\mathbb{N}_l$ и возможно меняя n_1. Тогда числа $n < n_0$ становятся отрицательными, а расстояние между числами меняется на $1/n_1$.

Набор $\mathbb{Z}_l = [-n_0, N - n_0]$ **целых чисел** $z = (n - n_0)$ получим при $n_1 = 1$ (**ц-счётчик**). Он с ростом N стремится к $\mathbb{Z}$, не достигая его.

Набор $\mathbb{Q}_l = [-n_0/n_1, (N-n_0)/n_1]$ **дробей** $q = (n-n_0)/n_1$ получается из большого набора $\mathbb{Z}_l$ при $N \gg n_1 \gg 1$ (**д-счётчик**).

(Здесь и далее для обозначения конечного количества чисел или предметов применяется выражение "**набор**" , вместо привычного выражения "множество" , оставляемого для обозначения бесконечных количеств, в соответствие со смыслом этого слова.)

Целые числа и дроби, полученные линейным преобразованием сдвига и сжатия чисел, являются простым их переименованием. Только они представляют числа в разных счётчиках: $\mathbb{Q}_l = \mathbb{Z}_l = \mathbb{N}_l$.

Недроби определяются как непредставимый дробями предел бесконечных последовательностей дробей. Т. е. они выражаются числами в пределе бесконечной точности. Из-за отсутствия достижимой бесконечности такой подход неприемлем. Если же бесконечную точность заменить конечной (или ограничить количество членов последовательности), то недроби вполне выражаются дробями, как это обычно и делают.

Разрешение чисел n_r или **дробей** q_r — количество соседних чисел или дробей, которое нельзя различить в данной задаче. Наименьшее разрешение есть расстояние 1 между числами, или $1/n_1$ между дробями $n_r \geqslant 1, q_r \geqslant 1/n_1$. При $n_r \gg 1, q_r \gg 1/n_1$ разрешение может быть описано вероятностным распределением обнаружения числа $p(n)$ или дроби $p(q)$ вокруг их средних значений $\bar{n}, \bar{q}$, охватывающим ближайших к ним соседей. Здесь удобно использовать распределение Гаусса

$$p(n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} n_r} e^{-(n-\bar{n})^2/2n_r^2}, \quad p(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} q_r} e^{-(q-\bar{q})^2/2q_r^2},$$

где n_r и q_r представлены среднеквадратичным отклонением. Оно работает тем лучше, чем больше чисел находится в промежутке разрешения. Если вернуться к связанным с числами предметам, то их количество подсчитывается неточно с заданной конечной погрешностью.

Точность $n_a = 1/n_r$ и $q_a = 1/q_r$ — величина, обратная разрешению.

Неточные числа (дроби) — числа (дроби) с разрешением. Оно есть свойство не числа, а внешнего наблюдения, и не должно быть привязанным к каждому числу, т. к. при этом действия будут его увеличивать вплоть до полного неразличения чисел. Разрешение надо представлять одинаковым, общим для всех чисел или дробей множества. Тогда они будут различаться внешне на величину разрешения n_r или q_r. Внутреннее их различие остаётся прежнем 1 или $1/n_1$. Так число 0 размывается до $\sim [-1, +1]n_r/2$ (или $\sim [-1, +1]q_r/2$) и внешне представлено границами размытия $\pm n_r/2$. Образуется ряд границ $(\pm 1/2 + k)n_r$, $k = 0, 1, \ldots$.

Сплошность — приближенный подход к описанию очень больших наборов чисел, подобный приближению сплошной среды в механике. Он заменяет связанную с бесконечностью непрерывность вещественных чисел. В нём точные значения функции $f(n)$ и её производных заменяются на их средние величины по промежутку разрешения и разбросы. Если функция меняется слабо, то разбросами можно пренебречь.

Переход к сплошности происходит при следующих условиях:
1) количество чисел (предметов) должно быть очень большим $N \gg 1$, 2) существенные для решения задачи их изменения δn должны происходить вдали от границ множества и охватывать большое количество

расположенных рядом чисел $N \gg \delta n \gg 1$.

Сплошные числа — приближённо непрерывное множество чисел, заменяющее вещественные числа.

Сплошное множество чисел $\mathbb{N}_c$ или дробей $\mathbb{Q}_c$ является представлением в сплошности наборов $\mathbb{N}_l$ или $\mathbb{Q}_l$. Если возведение дроби в дробную степень или её логарифмирование с дробным основанием не выражаются дробью, то они, в пределах используемой точности, заменяется на дробь. Сплошные числа (или дроби) сменяют вещественные числа, сохраняя удобства непрерывности и не теряя связи с числами из $\mathbb{N}_l$.

Строгая теория чисел должна исходить из их раздельности, а непрерывность вводить как приближение сплошности с заменой вещественных чисел на сплошные дроби $\mathbb{Q}_c$. **Строгая непрерывность невозможна**, т. к. она, противоречит определению чисел на основе отдельных предметов и не может быть описана числовым образом.

Счётица возвращает математику в рамки науки о количестве, которое не бывает бесконечным. Введение конечной числовой точности узаконивает обычное в математике обращение с недробями, в котором недроби записываются в виде действий с дробями и функций от них или представляются ими с нужной точностью.

Счётица упрощает и даже отменяет некоторые разделы математики. В ней **отсутствуют бесконечные множества** кроме недостижимого счётного. Конечные множества сводятся к набору чисел $\mathbb{N}_l$. Пропадает нужда во введении бесконечно больших и малых, инфинитезимальных, кардинальных, ординальных и других неестественных чисел. Она избавляет теорию множеств от имеющихся в ней противоречий и парадоксов.

Существенно меняется **теория функций**. Для её обоснования не требуются "строгие" и громоздкие доказательства на основе бесконечно малых величин, а достаточно элементарной математики. **Функция** $f(n)$ (из $\mathbb{N}_l$ в $\mathbb{N}_l$) является конечной и ограниченной последовательностью. Набор этих функций $\mathbb{F}_l$ имеет мощность $(N+1)^2$. Строго, он не является бесконечным пространством, но в сплошности приближённо представляется им, если в рассматриваемых задачах его границы не достигаются.

Производная функции сводится к разности соседних членов последовательности, а интеграл — к сумме ряда из них. В строение k-ой производной $f^{(k)}$ участвуют $k+1$ соседних чисел — производные не являются функциями одного числа, как это было в теории вещественных функций. **Дифференциал** (линейная часть приращения функции, содержащая много чисел) и запись производных с его помощью $f^{(k)} = d^k f/dn^k$, можно вводить лишь в сплошности.

Комплексные числа в счётике представлены любым из конечных числовых множеств

$\mathbb{C}_n = \mathbb{N}_l + i\mathbb{N}_l$, $\mathbb{C}_z = \mathbb{Z}_l + i\mathbb{Z}_l$, $\mathbb{C}_q = \mathbb{Q}_l + i\mathbb{Q}_l$, $\mathbb{C}_c = \mathbb{Q}_c + i\mathbb{Q}_c$, $i = \sqrt{-1}$.

Комплексный анализ сводится к анализу функций конечных гауссовых переменных $f_z(c_z)$, $f_z, c_z \in \mathbb{C}_z$, составляющих набор $\mathbb{F}_z$. Он отличается от обычной теории функций комплексного переменного использованием конечных разностей вместо бесконечно малых величин, но переходит в обычную теорию в приближении сплошности.

Точкица

Геометрия началась с точки Евклида: "Точка есть то, что не имеет частей". В современной геометрии добавлено требование, чтобы точка не имела размера и лишь отмечала место пребывания. Получилась крайняя идеализация обыденных точек как предельно малых пятен. Точки нулевого размера не могут служить мерой длины — длина меряется только отрезками. Построенная из таких точек прямая (числовая ось) соответствует множеству вещественных чисел, представляет их геометрически и вбирает в себя все их недостатки.

От недостатков современного понимания точек легко избавиться отменой требования отсутствия размера точек при сохранении их неделимости. Тогда множество точек отрезка становится конечным и изоморфным набору чисел $\mathbb{N}_l$ (или $\mathbb{Q}_l$). Точка становится наименьшей мерой в измерении длины отрезков. Образуется счётная геометрия, названная **точкица** для отличия её от обычной геометрии. Она построена на основе неделимых точек Евклида, дополненных требованием конечных размера и размерности. Начавшись как геометрия на решётке точек, она в приближении сплошности переходит в привычную непрерывную геометрию, но в которой несоизмеримые отрезки становятся соизмеримыми с заданной точностью, а их отношение выражается числами.

Основные определения точкицы:

Точка — входящий во все построения неделимый элемент конечных размера и размерности (конечная многомерная точка Евклида).

Соседние точки — те которые соприкасаются, т. е. между ними нельзя вставить другие точки. Чтобы построить линию каждая точка должна иметь двух соседей, каждый из которых выделяет исходящие из точки

противоположные направления и может иметь своих соседей. Поверхность строится из соседних линий и т. д. Точка может иметь чётное число соседей, которые между собой не являются соседями.
Размерность точки — количество соседних с ней пар точек.
Линия — цепочка попарно связанных соседей, имеющая внутренние точки с двумя соседями и конечные точки с одним соседом.
Линии пересекаются, если имеют одну общую точку.
Длина линии — количество точек в ней. Между двумя точками могут быть линии разной длины.
Прямая — кратчайшая линия. **Кривые** — остальные линии.
Расстояние между точкой и линией — наименьшая длина линий, проведённых между этой точкой и точками линии.
Расстояние между двумя линиями — наименьшая длина линий, проведённых между точками одной линии и другой.
Соседние линии — если все точки одной из линий являются соседями точек другой линии. Обратное соотношение не обязательно.
Многомерная область или **k-область**, $(k = 2, 3, ...)$ состоит из внутренних $(k-1)$-областей, имеющих по два соседа, и двух граничных.
Соседние k-области — если все точки одной из k-областей являются соседями точек другой.
Площадь (объём) k-области есть количество точек в ней.
Многомерная плоскость (**k-плоскость**) — k-область наименьшей площади или объёма между двумя $(k-1)$-областями.
Расстояние между точкой и k-областью — наименьшая длина линий, проведённых между этой точкой и точками **k**-области.
Расстояние между двумя k-областями — наименьшая длина линий, проведённых между точками одной k-области и другой.
Многомерное пространство (**k-пространство**) — k-плоскость, охватывающая достаточное для решения данных задач количество точек.

Перемещения на уровне решётки точек возможны лишь по выделенным осям соседства — от соседа к соседу. Ломанный путь по решётке между двумя точками можно заменить условно прямым, который проходит внутри решётки и имеет направление, определяемое количеством шагов вдоль каждой оси с учётом их знака.

Пусть в плоской области оси соседства обозначены как x и y. Наименьшей частью пути является **проход**, состоящий из сделанных подряд k_x шагов вдоль оси x и k_y шагов вдоль оси y. Для обозначения его направления u вводятся угловые переменные $t_x^2 = k_y^2/k_x^2$ или $t_y^2 = k_x^2/k_y^2$, связанные с обычными углами α_x и α_y между u и осями x или y выражениями $t_{x,y} = \operatorname{tg} \alpha_{x,y}$. Вместо них можно использовать косинусы углов:

$c_{x,y}^2 = k_{x,y}^2/(k_x^2 + k_y^2) = 1/(t_{x,y}^2 + 1) = \cos^2 \alpha_{x,y}$.

Квадраты тригонометрических выражений удобны тем, что их значения записываются через количества шагов в числах или дробях. Подобные определения направлений легко ввести в любой многомерной области.

Разрешение точек — различимое при наблюдении их количество. Если область разрешения содержит много точек, а направление проходов в ней почти не меняется, то можно перейти к сплошности. В ней ломанные пути, составленные из шагов, заменяются приближённо гладкими. Выделенность направлений сменяется их приближённой изотропностью. Любые длины линий становятся соизмеримыми с заданной точностью, а необходимость использования недробей пропадает. При этом геометрия становится обычной геометрией Евклида с размерами и величинами углов, выражаемыми числами и/или дробями без использования недробей.

Итак область разрешения заменяет точку и становится большой точкой. Но тогда и точку можно считать областью разрешения, которая может иметь своё внутреннее неразрешимое в данном масштабе строение. **Понятие точки становится относительным** и связанным с разрешением, а характер геометрии, зависящий от свойств точки, может меняться с изменением масштаба наблюдения, если при этом меняются свойства точек. Поскольку последние извлекаются из наблюдений мира и его материи, то и геометрия определяется известными на данное время свойствами мировой среды, выраженными через свойства пространства.

Расплывчатость пятна разрешения точек способно проявляться двояко. Подобно разрешению чисел она может быть привязана к точке, или быть внешней к ней. В первом случае расплывчатость растёт вместе с числом точек, а во втором остаётся постоянной. Геометрия Евклида получается лишь при внешней расплывчатости, если масштабы расстояний и их изменений много больше разрешения. В противном случае образуется расплывчатая геометрия. Возникает соотношение геометрий подобное соотношению классической и квантовой механик в физике.

Переход же от сколь угодно малого конечного размера точки к бесконечно малому или отсутствующему является не только отвлечением от размера, как это обычно представляют, но переходом в новое качество. С точки зрения масштаба единицы сколь угодно малое число почти не отличается от нуля и вполне может быть им заменено. Но в масштабе этого числа оно также далеко от нуля, как и единица, которая теперь стала сколь угодно большой. Между нулём или бесконечностью и любым конечным числом всегда остаётся непреодолимая пропасть. Её переход требует введения качественно других математических объектов, отличных от обычных чисел, связанных с конечным количеством предметов. А перенос на эти объекты способов представления и преобразования конечных чисел нельзя считать достаточно правомерным.

Итог

Арифметика возникла и развивалась на основе опытного знания окружающего мира в процессе отвлечения от всех его свойств, кроме подсчёта количества предметов (отдельностей) и обозначения его с помощью чисел. Действия над числами были вторичны и не могли выводить за пределы их множества. Современная же арифметика строится на основе первичности действий и введения подчинённых им "числовых" множеств, что выводит эти множества за пределы области определения чисел и делает арифметику наукой о действиях, а не о количестве.

Основное противоречие арифметики "вещественных чисел" состоит в конечной величине недробей ("иррациональных чисел") и бесконечно малом промежутке между ними. Введение бесконечности и применение к ней методов конечных чисел не совместимы. На это указывают разные математики уже не одно столетие.

Данная работа идёт путём возвращения математики к её первой основе "науки о количестве". Вводится набор (конечное множество) чисел (целые положительные или неотрицательные) $\mathbb{N}_l$, который может быть представлен наборами целых чисел или дробей. Переход от набора к набору совершается с помощью счётчика (системы отсчёта), а не требования применимости действий ко всем числам, вынуждающего расширять понятие о числах. Недостижимыми пределами этих наборов являются множества натуральных, целых и рациональных чисел.

Для любой задачи с числами, найдётся включающий их набор, границы которого в задаче не достигаются и который можно условно считать бесконечным. Если же действия, не выводя за границы множества, не выражаются числами, то надо вводить числовое разрешение или точность, задающие различимость близких по величине чисел. Тогда, в пределах заданной точности, результат действия заменяется числом.

Введение числового разрешения соответствует познанию окружающего мира, возможного только с некоторой точностью, и не выводит за пределы естественного определения числа. На деле оно везде и постоянно применяется в математике. Недроби всегда выражаются дробями, а очень длинные дроби сокращаются до разумных размеров. В то же время бесконечная точность недостижима и неестественна. Она есть не просто отвлечение, но качественное изменение математики из-за введения в неё бесконечности, как объекта, подобного конечному.

Если взять очень большой набор чисел с достаточно большим разрешением, то можно перейти к приближённо непрерывным числам — приближение сплошности (сплошных чисел или дробей), подобное приближению сплошной среды. Сплошные дроби сменяют вещественные числа, сохраняя удобства их непрерывности и не теряя связи с числами. При этом они не требуют для обоснования сложного, громоздкого анализа с использованием бесконечно малых величин. Математический анализ становится простым и более строгим в своей простоте.

Вместе с бесконечностью из рассмотрения выводятся бесконечные множества и пространства. Теории множеств и функций вместе с функциональным анализом качественно упрощаются.

Геометрия избавляется от бесконечностей введением точек конечного размера. Точка становится строительным материалом геометрии и наименьшей мерой длины отрезков. Образуется решётка точек с выделенными направлениями их соседства, только вдоль которых возможны перемещения между точками.

Геометрия в непрерывном пространстве получается после введения разрешения точек и перехода к приближению сплошности. Выделенность направлений сменяется их изотропностью. Ломанные пути заменяются приближённо гладкими. Любые длины линий становятся соизмеримыми с заданной точностью, а необходимость использования недробей пропадает. Геометрия становится обычной геометрией Евклида.

Вывод. Для обоснования математики существует строгий подход, состоящий в использовании обычного определения чисел как обозначения количества предметов, ограниченности числового множества, введения в нём счётчиков и разрешения, применения приближения сплошных чисел вместо непрерывности. Он позволяет обходиться без сомнительных "иррациональных чисел" и неестественных надуманных аксиом, приводящих к сложным, громоздким и противоречивым теориям.