Некоторые теоремы математического анализа

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Частичный предел

Определение

Число $A \in [+\infty, -\infty]$ есть частичный предел последовательности x_n, если оно есть предел некой подпоследовательности x_{n_k}.

Утверждения о частичных пределах

- Если $A \in [+\infty, \infty]$ есть предел последовательности x_n, то A также есть частичный предел этой же последовательности.
- Любая последовательность x_n имеет хотя бы один частичный предел в множестве $[+\infty, -\infty]$
- Если частичный предел единственен, то он является пределом.
- Если существуют два различных частичных предела, то у последовательности нет предела.
- Множество частичных пределов (в расширенной числовой прямой) замкнуто.

Нахождение множества частичных пределов

Частичные пределы подпоследовательностей

Если число A является частичным пределеом подпоследовательности, то оно является также и частичным пределом самой последователности.

Разбиение последовательностей

Пусть n_k, q_k — две последовательности натуральных чисел, такие что каждое из натуральных чисел входит в одну из этих последовательностей, x_n — последовательность действительных чисел. Тогда множество частичных пределов последовательности x_n является объединением множеств частичных пределов подпоследовательностей x_{n_k}, x_{q_k}.
Аналогичное утверждение верно и для любого конечного числа подпоследовательностей, на которые разбивается последовательность.

Разновидности пределов

Базы пределов

1. $x \to a$
2. $x \to a + 0$
3. $x \to a - 0$
4. $x \to +\infty$
5. $x \to -\infty$
6. $x \to \infty$

Предел может быть равен $A =$

- $a \in R$
- $+\infty$
- $-\infty$
- ∞

Итого

Всего имеется 24 разновидности пределов.

Определения по Гейне

Общее условие

$x_n \in dom(f)$

Условия для разновидностей пределов (последовательности Гейне)

(для всякой последовательности x_n такой что:)

1. $x_n \to a,\ x_n \neq a$
2. $x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \uparrow a$
3. $x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \downarrow a$
4. $x_n \uparrow +\infty$
5. $x_n \downarrow -\infty$
6. $x_n \to \infty$

Выполнено

$f(x_n) \to A$

Несуществование предела

Признак несуществования предела

Если существуют две последовательности Гейне x_n, y_n такие, что $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$, $A \neq B$

Утверждение

Вышеприведенное условие также является необходимым для несуществования предела. Предположим обратное. Тогда должна существовать последовательность Гейне x_n такая, что $f(x_n)$ не имеет предела. Следовательно, существуют последовательности натуральных чисел n_k, q_k такие, что $f(x_{n_k}) \to A$, $f(x_{q_k}) \to B$. Последовательности x_{n_k}, x_{q_k} являются последовательностями Гейне. Противоречие.

Утверждение

Пусть $\lim f = A$ не выполнено. Тогда существует последовательность Гейне x_n такая, что $f(x_n) \to B$, $A \neq B$. Действительно, из отрицания условия $\lim f = A$ следует существование последовательности Гейне y_n такой, что $f(y_n)$ не стремится к A. Выделим подпоследовательность n_k такую, что $f(y_{n_k}) \to B$, $A \neq B$.

Непрерывность по Гейне

Разновидности непрерывности

1. В точке x_0
2. В точке x_0 справа
3. В точке x_0 слева

Условия для последовательности Гейне

1. $x_n \to x_0$
2. $x_n \downarrow x_0$
3. $x_n \uparrow x_0$

Выполнено

$f(x_n) \to f(x_0)$

Понятие «сильного» предела

Сильный предел по базе

$\forall \epsilon > 0 \ \exists b \in B \ f(b) \subset \mathring{O}_\epsilon(A)$. Различие от обычного понятия предела состоит в том, что прокалывается также ϵ-окрестность.

Сильный предел последовательности

$x_n \to A$, $x_n \neq A$.

Сильные пределы по Гейне

Понятие последовательности Гейне такое же. Изменение: выполнено $f(x_n) \to A$, $f(x_n) \neq A$, т.е. предел последовательности $f(x_n)$ является сильным.

Примечание

Пределы $A = +\infty, -\infty, \infty$ всегда являются сильными.

Вопрос

Как же должен на самом деле называться «сильный» предел?

Признак сильного предела

Утверждение

Пусть существует элемент базы $b_0 \in B$ такой, что $\forall x \in B$ $f(x) \neq A$, $\lim_B f = A$. Тогда данный предел является сильным.

1. Зафиксуем $\epsilon > 0$. Выберем элемент базы b такой что $f(b) \subset O_\epsilon(A)$
2. Выберем также элемент базы $b_1 \subset b \cap b_0$. Тогда $A \notin f(b_1)$, $f(b_1) \subset O_\epsilon(A)$, т.е. $f(b_1) \subset \mathring{O}_\epsilon(A)$
3. Расфиксируем $\epsilon > 0$. Таким образом, выполнено определение сильного предела

Обратное утверждение

Если $\forall x \in B$ $f(x) \neq A$, $\lim_B f = A$ и данный предел является сильным, то существует элемент базы $b_0 \in B$ такой, что $\forall x \in B$ $f(x) \neq A$. Данное утверждение тривиально.

Первая теорема о композиции: сильный внутренний предел

Утверждение

Пусть $\lim_B g(t) = A$, причем предел является сильным, $\lim_{x \to A} f(x) = B$. Тогда $\lim_B g(t) = A$

1. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Выберем элемент базы $b \in B$ такой, что $f(b) \subset \mathring{O}_\epsilon(A)$
2. Множество $\mathring{O}_\epsilon(A)$ является элементом базы предела $x \to A$. Следовательно, $g(\mathring{O}_\epsilon(A)) \subset O_\epsilon(B)$.
3. Таким образом, $g(f(b)) \subset g(\mathring{O}_\epsilon(A)) \subset g(\mathring{O}_\epsilon(A)) \subset O_\epsilon(B)$.

Примечание

База предела: $B = x \to x_0, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$. Для односторонних пределов пришлось бы вводить дополнительные понятия...

Вторая теорема о композиции: непрерывность внешней функции

Утверждение

Пусть $\lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$, $f \in C(x_0)$. Тогда $\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = f(x_0)$.

1. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\epsilon(f(x_0))$
2. Выберем $\delta_1 > 0$ такое, что $g(\mathring{O}_{\delta_1}(t_0)) \subset O_\delta(x_0)$
3. Следовательно, $f(g(\mathring{O}_{\delta_1}(t_0))) \subset f(O_\delta(x_0)) \subset O_\epsilon(f(x_0))$

Непрерывность обратной функции

Теорема

Пусть $f : [a, b] \to [m, M]$ — непрерывная биекция. Тогда $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ также является непрерывной функцией.

Доказательство

1. Зафиксируем точку $y_0 \in [m, M]$. Положим также $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Тогда $y_0 = f(x_0)$.
2. Зафиксируем последовательность y_n такую что: $y_n \in [m, M]$, $y_n \to y_0$. Достаточно доказать, что $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$
3. Положим $x_n = f^{-1}(y_n)$. Тогда $y_n = f(x_n)$. Достаточно доказать, что $x_n \to x_0$.
4. Предположим обратное. Тогда, в соответствии с теоремой о единственном частичным пределе, у последовательности x_n имеется частичный предел x_1, не равный x_0. То есть существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x_1$.
5. Тогда $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_1)$. С другой стороны y_{n_k} — подпоследовательность y_n, $y_n \to y_0$. Следовательно, $y_{n_k} \to y_0$. По теореме о единственности предела выполнено $f(x_1) = y_0$.
6. $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_0$. Так как f —биекция, то отсюда следует $x_1 = x_0$, что противоречит $x_1 \neq x_0$

Топологическое обобщение

Непрерывная биекция компакта есть гомеоморфизм.

Теорема Лопиталя

Условия теоремы

Для каждой из 6 баз (см. разновидности пределов). B — элемент базы.

1. $f, g \in D(B)$
2. Выполнено $\lim f = \lim g = 0$ или $\lim |f| = \lim |g| = +\infty$.
3. $\lim \frac{f'}{g'} = A$, где возможны случаи $A \in R$, $A = +\infty$, $A = -\infty$, $A = \infty$
4. $\forall x \in B\ g'(x) \neq 0$.

Заключение теоремы

$\lim \frac{f}{g} = A$

Подсчет числа случаев

- 6 разновидностей пределов
- 4 значения предела
- 2 неопределенности: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Итого: 48 случаев.

Случай неопределённости $\frac{0}{0}$, $x \to a+0$

Подготовительные соображения

1. Элемент базы: $B = (a, b)$
2. Доопределим функции f, g в точке a: $f(a) = g(a) = 0$. Таким образом, $f, g \in C[a, b) \cap D(a, b)$
3. Предположим, что (a, b) содержит нуль функции g. $g(c) = 0$. По теореме Ролля, существует $x \in (a, c) \subset (a, b)$ такое, что $g'(x) = 0$, что запрещено условиями. Таким образом, $\forall x \in (a, b)$ $g(x) \neq 0$.

Доказательство

1. Зафиксируем последовательность x_n такую что $x_n \in (a, b)$, $x_n \to a$.
2. В соответствии с теоремой Коши построим последовательность ξ_n, для которой выполнено $\xi_n \in (a, x_n)$, $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}$
3. Так как $\xi_n \in (a, x_n)$, $x_n \to a$, то $\xi_n \to a$.
4. Так как $\xi_n \in (a, x_n) \subset (a, b)$, $\xi_n \to a$, то (в соответствии с условием) $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A$. И, следовательно, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A$

Случай неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to a+0$ (подготовка)

Лемма о выборе ϵ-окрестности

Пусть $A \neq B$, где $A, B \in [-\infty, +\infty]$, или же $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$. Тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что B не лежит в замыкании множества $O_\epsilon(A)$. (в расширенной прямой)

Элемент базы

1. Элемент базы: $B = (a, b)$
2. Так как $\lim |g| = +\infty$, то элемент базы можно выбрать так, чтобы $\forall x \in (a, b)\ g(x) \neq 0$

Последовательность Гейне

Предположим, что заключение теоремы ложно, то есть $\lim \frac{f}{g} = A$ неверно. Тогда существует последовательность x_n такая, что $x_n \in (a, b)$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to B$. Где $A \neq B$, $B \neq \infty$ если $A \neq \infty$, и $B \in \mathbb{R}$, если $A = \infty$.

Выбор окрестности

Выберем $\epsilon > 0$ таким образом, чтобы было выполнено $B \notin \overline{O_\epsilon(A)}$

Случай неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to a+0$ (построение последовательности)

Применение определения предела по Коши

Так как $\lim \frac{f'}{g'} = A$, то найдётся $c \in (a,b)$ такое, что для всех $\xi \in (a,c)$ выполнено $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in O_\epsilon(A)$

Удаление конечного числа членов

Так как $x_n \to a$, $x_n \in (a,b)$, то существует N такое, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in (a,c)$. Положим $y_n = x_{n+N}$. Свойства последовательности y_n:

1. $y_n \in (a,c)$
2. $y_n \to a$
3. $g(y_n) \neq 0$ (см. выбор элемента базы)
4. $g(y_n) \neq g(c)$ (иначе бы по теореме Ролля имелся бы нуль производной)
5. $\frac{1}{g(y_n)} \to 0$ (следует из $|g(y_n)| \to +\infty$, см. условие $\lim |g| = +\infty$)
6. $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \to B$ (как результат удаления конечного числа членов последовательности $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$)

Случай неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to a+0$ (применение теоремы о среднем)

Применение теоремы Коши о среднем

Зафиксируем произвольное $y \in (a, c)$. Тогда, в соотвестствии с теоремой Коши о среднем, выполнено $\frac{f(y)-f(c)}{g(y)-g(c)} = \frac{f'(\xi_y)}{g'(\xi_y)} \in O_\epsilon(A)$, где $\xi_y \in (x, c) \subset (a, c)$.

Последовательность z_n

Положим $z_n = \frac{f(y_n)-f(c)}{g(y_n)-g(c)}$. Тогда $z_n = \frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)} - \frac{f(c)}{g(y_n)}}{1 - \frac{g(c)}{g(y_n)}} \to \frac{B-0}{1-0} = B$

Следствие для последовательности z_n

Так как $y_n \in (a, c)$, то $z_n = \frac{f(y_n)-f(c)}{g(y_n)-g(c)} \in O_\epsilon(A)$

Замыкание множества

Так как $z_n \in O_\epsilon(A)$, $z_n \to B$, то $B \in \overline{O_\epsilon(A)}$, что противоречит выбору ϵ.

Прочие случаи

База $x \to +\infty$

Сводится к случаю $t \to +0$ последством замены переменной $t = \frac{1}{x}$

Случаи $x \to a - 0$, $x \to -\infty$

Симметрично относительно отражения числовой прямой

Двусторонние пределы

Сводятся к односторонним.

Равномерная непрерывность

Определение

Функция f равномерно непрерывна на множестве X, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $|x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

Признак отсутствия равномерной непрерывности

Если существуют две последовательности x_n, y_n такие, что:

1. $x_n, y_n \in X$
2. $x_n - y_n \to 0$
3. $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

То f не является равномерно непрерывной на множестве X

Признак наличия равномерной непрерывности

Если для любого $x_0 \in \overline{X}$, где замыкание берётся в расширенной числовой прямой, и любых последовательностей x_n, y_n из выполнения

1. $x_n, y_n \in X$
2. $x_n \to x_0$,
3. $y_n \to x_0$
4. $x_n - y_n \to 0$

следует выполнение $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, то f равномерно непрерывна на множестве X.

Доказательства

Доказательство 1

1. Пусть f равномерно непрерывно на множестве X, $x_n, y_n \in X$, $x_n - y_n \to 0$
2. Зафиксируем $\epsilon > 0$. По определению равномерной непрерывности, существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $|x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Выберем такое $\delta > 0$.
3. Так как $x_n - y_n \to 0$, $\delta > 0$, то найдётся N такое, что для всех $n > N$ выполнено $|x_n - y_n| < \delta$. Выберем такое N.
4. Следовательно, для всех $n > N$ выполнено $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$
5. Расфиксируя $\epsilon > 0$, получаем $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Доказательство

Доказательство 2

1. Пусть f не является равномерно непрерывной на X. Тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует $x, y \in X$ такие, что $|x - y| < \delta$ и $|f(x) - f(y)| > \epsilon$. Выберем такое $\epsilon > 0$.
2. Положим $\delta_n = \frac{1}{n}$. Построим соответствующие последовательности x_n, y_n такие, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Таким образом, $x_n - y_n \to 0$, $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$
3. Так как $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$, то существует последовательность n_k такая, что $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to B$, $B \neq 0$. Так же $x_{n_k} - y_{n_k} \to 0$.
4. Выделим последовательность натуральных чисел k_q такую, что $x_{n_{k_q}} \to x_0$. Так как все $x_{n_k} \in X$, то $x_0 \in \overline{X}$.
5. Тогда также $y_{n_{k_q}} \to x_0$, так как $x_{n_{k_q}} - y_{n_{k_q}} \to 0$, $f(x_{n_{k_q}}) - f(y_{n_{k_q}}) \to B$.
6. Следовательно, $f(x_{n_{k_q}}) - f(y_{n_{k_q}}) \not\to 0$.

Применение

Теорема Кантора

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда f равномерно непрерывна на $[a,b]$.

1. Зафиксируем $x_0 \in [a,b]$, а также последовательности $x_n, y_n \to x_0$, $x_n - y_n \to 0$
2. Тогда $f(x_n) \to f(x_0)$, $f(y_n) \to f(x_0)$. Таким образом, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Обобщение

Пусть $f \in C[a,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f = A \in \mathbb{R}$. Тогда f — равномерно непрерывно на множестве $[a,+\infty)$

1. Зафиксируем x_0, а также последовательности $x_n, y_n \to x_0$, $x_n - y_n \to 0$
2. Случай $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $f(x_n) \to f(x_0)$, $f(y_n) \to f(x_0)$. Таким образом, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.
3. Случай $x_0 = +\infty$. Тогда $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to A$. Таким образом, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Ограниченная и бесконечно большая производная

$|f'| \le M$

Пусть $f \in D[a, +\infty)$, $|f'| \le M$. Тогда f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$

1. Зафиксируем x_0 и последовательности $x_n, y_n \in [a, +\infty)$, $x_n, y_n \to x_0$, $x_n - y_n \to 0$ В случае $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_n) - f(y_n) \to f(x_0) - f(x_0) = 0$. Таким образом, остается рассмотреть только случай $x_0 = +\infty$
2. В соотвествии с теоремой Лагранжа, построим последовательность ξ_n такую, что ξ_n лежит между x_n и y_n (и, следовательно, $\xi_n \to +\infty$), и выполнено $f(y_n) - f(x_n) = f'(\xi_n)(y_n - x_n)$
3. Таким образом, $|f(y_n) - f(x_n)| \le M|y_n - x_n| \to 0$, т.е. $f(y_n) - f(x_n) \to 0$

$|f'| \to +\infty$

Пусть $f \in D[a, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} |f'| = +\infty$. Тогда f не является равномерно непрерывной на множестве $[a, +\infty)$.

1. Так как $\lim_{x\to+\infty} |f'| = +\infty$, то возможно построить последовательность $x_n \uparrow +\infty$ такую, что из $x > x_n$ следует, что $|f'(x)| > n$. Положим также $y_n = x_n + \frac{1}{n}$. Тогда выполнено $y_n \to +\infty$, $y_n - x_n \to 0$.
2. В соответствии с теоремой Лагранжа, построим последовательность ξ_n такую, что $f(y_n) - f(x_n) = f'(\xi_n)(y_n - x_n)$, $x_n < \xi_n < y_n$. Таким образом, выполнено $\xi_n \to +\infty$. Также выполнено $|f'(\xi_n)| > n$.
3. Следовательно, $|f(y_n) - f(x_n)| = |f'(\xi_n)||y_n - x_n| > n * \frac{1}{n} = 1$. Таким образом, $f(y_n) - f(x_n) \not\to 0$.