Двойные пределы и дифференцирумость. Метод доказательного вычисления, основанный на выделении сходящихся подпоследовательности в последовательности Гейне

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Понятие двойного предела (определение Гейне)

Определяемый предел

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$

Для любых последовательностей x_n, y_n, таких что:

1. $(x_n, y_n) \in dom(f)$
2. $x_n \to 0$
3. $y_n \to 0$
4. $x_n^2 + y_n^2 \neq 0$

Выполнено:

$f(x_n, y_n) \to A$

Переход к полярным координатам

Полярные координаты

- $x_n = r_n cos(\phi_n)$
- $y_n = r_n sin(\phi_n)$

Для любых последовательностей r_n, ϕ_n таких что

1. $(r_n cos(\phi_n), r_n sin(\phi_n)) \in dom(f)$
2. $\phi_n \in [0, 2\pi]$
3. $r_n \to 0$
4. $r_n \neq 0$

Выполнено:

$f(r_n cos(\phi_n), r_n sin(\phi_n)) \to A$

Примечание:

Последовательность углов ϕ_n произвольна.

Дополнительное условие $\phi_n \to \phi_0$

Теорема

Пусть для любого угла ϕ_0 и любых последовательностей r_n, ϕ_n из выполнения условий:

1. $(r_n cos(\phi_n), r_n sin(\phi_n)) \in dom(f)$
2. $\phi_n \in [0, 2\pi]$
3. $r_n \to 0$, $r_n \neq 0$
4. $\phi_n \to \phi_0$

следует выполнение $f(r_n cos(\phi_n), r_n sin(\phi_n)) \to A$. Тогда $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$

Доказательство

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности $\phi_n \in [0, 2\pi]$, $r_n \to 0$, $r_n \neq 0$, такие что $z_n = f(r_n cos(\phi_n), r_n sin(\phi_n)) \not\to A$
2. Так как $z_n \not\to A$, то существует последовательность натуральных чисел n_k такая, что $z_{n_k} \to B \in [-\infty, +\infty]$, $B \neq A$.
3. Выделим также из ограниченной последовательности ϕ_{n_k} сходящуюся подпоследовательность $\phi_{n_{k_q}} \to \phi_0$
4. Выполнено также $r_{n_{k_q}} \to 0$, $r_{n_{k_q}} \neq 0$. В соотвествии с условиями теоремы, выполнено $z_{n_{k_q}} = f(r_{n_{k_q}} cos(\phi_{n_{k_q}}), r_n sin(\phi_{n_{k_q}})) \to A$.
5. С другой стороны $z_{n_{k_q}} \to B$. Противоречие.

Примеры-1

$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Полагаем $r_n \to 0$, $r_n \neq 0$, $\phi_n \to \phi_0$

$z_n = f(x_n cos(\phi_n)), y_n sin(\phi_n)) = cos(\phi_n) \to cos(\phi_0)$. При выборе $\phi_0 = 0$ и $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ значения предела различаются. Двойного предела не существует

$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z_n = r_n cos(\phi_n) sin(\phi_n) \to 0$. Двойной предел равен 0

$f(x,y) = \frac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$

$z_n = \frac{r_n^2 cos(\phi_n) sin(\phi_n)}{1-\sqrt[3]{1+r_n^2 cos(\phi_n) sin(\phi_n)}} \sim \frac{r_n^2 cos(\phi_n) sin(\phi_n)}{(\frac{-1}{3}) r_n^2 cos(\phi_n) sin(\phi_n)}$ = -3. Двойной предел равен -3

$f(x,y) = \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$

$z_n = \frac{sin(r_n sin(\phi_n) - r_n^2 cos^2(\phi_n))}{r_n sin(\phi_n) - r_n^2 cos^2(\phi_n)} \sim 1$, так как $r_n sin(\phi_n) - r_n^2 cos^2(\phi_n) \to 0$ Двойной предел равен 1.

Примеры-2

$f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$\ln z_n = r_n^2 cos(\phi_n) sin(\phi_n) \ln(r_n^2) = r_n^2 \ln(r_n^2) cos(\phi_n) sin(\phi_n) \to 0$, так как $x^2 \ln x^2 \to 0$ при $x \to 0$ Двойной предел равен 1.

$f(x,y) = (1+xy^2)^{1/(x^2+y^2)}$

$\ln z_n = \frac{\ln(1+r_n^3 cos^2(\phi_n) sin(\phi_n))}{r_n^2} \sim \frac{r_n^3 cos^2(\phi_n) sin(\phi_n)}{r_n^2} = r_n \to 0$. Двойной предел равен 1.

$f(x,y) = \frac{xy^2(x^2+y^2)}{1-cos(x^2y^2)}$

$z_n = \frac{r_n^5 cos(\phi_n) sin^2(\phi_n)}{1-cos(r_n^2)} \sim \frac{r_n^5 cos(\phi_n) sin^2(\phi_n)}{-\frac{1}{2}r_n^2} = -2r_n^3 cos(\phi_n) sin^2(\phi_n) \to 0$. Двойной предел равен 0.

Понятие дифференцирумой функции

Функция $f(x, y)$ дифференцируема в $(0, 0)$, если существуют A, B такие, что:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Значение коэффициентов

Если f дифференцируема в $(0, 0)$, то существуют частные производные, и $A = f_x(0, 0)$, $B = f_y(0, 0)$

Примеры-1

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$

$f(0,0)=0,\ f(x,0)=x,\ f(0,y)=\sqrt[3]{y^4},\ f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=0.$ Предел:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $z_n = g(r_n cos\phi_n, r_n sin\phi_n) = \frac{\sqrt[3]{r_n^3 cos^3(\phi_n)+r_n^4 sin^4(\phi_n)}-r_n cos(\phi_n)}{\sqrt{r_n^2}} =$
$\sqrt[3]{cos^3(\phi_n)+r_n sin^4(\phi_n)} - cos(\phi_n) \to \sqrt[3]{cos^3(\phi_0)+0 sin^4(\phi_0)} - cos(\phi_0) = 0.$
Функция дифференцируема в $(0,0)$.
Примечание: данный пример затруднительно решить без принятия ограничения $\phi_n \to \phi_0$

$f(x,y) = (sinx + \sqrt[3]{xy})^2$

$f(0,0)=0,\ f(x,0)=sin^2x,\ f(0,y)=0,\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$

$z_n = \frac{(sin(r_n cos\phi_n)+\sqrt[3]{r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n})^2}{r_n} =$

$\frac{sin^2(r_n cos\phi_n)}{r_n} + 2\frac{sin(r_n cos\phi_n)\sqrt[3]{r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n}}{r_n} + \frac{\sqrt[3]{(r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n)^2}}{r_n} \to 0$

$\frac{sin^2(r_n cos\phi_n)}{r_n} \sim \frac{r_n^2 cos^2\phi_n}{r_n} = r_n cos^2\phi_n \to 0$

$\frac{sin(r_n cos\phi_n)\sqrt[3]{r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n}}{r_n} \sim \frac{r_n cos(\phi_n)\sqrt[3]{r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n}}{r_n} = cos(\phi_n)\sqrt[3]{r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n} \to 0$

$\frac{\sqrt[3]{(r_n^2 sin\phi_n cos\phi_n)^2}}{r_n} = (r_n)^{1/3} sin^2\phi_n cos^2\phi_n \to 0$

Функция дифференцируема в $(0,0)$

Примеры-2

$f(x,y) = ch(\sqrt[5]{x^2 y})$

$f(0,0) = 1,\ f(x,0) = 1,\ f(0,y) = 1,\ f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = 0.$
$z_n = \frac{ch(\sqrt[5]{r_n^3 cos^2(\phi_n) sin(\phi_n)}) - 1}{r_n} = \frac{(1/2)(\sqrt[5]{r_n^3 cos^2(\phi_n) sin(\phi_n)})^2}{r_n} = \frac{1}{2} r_n^{1/5} \sqrt[5]{cos^4 \phi_n sin^2 \phi_n} \to 0$
Функция дифференцируема в $(0,0)$

$f(x,y) = \sqrt[5]{x^4}(cos(\sqrt[5]{y}) - 1)$

$f(0,0) = 0,\ f(x,0) = 0,\ f(0,y) = 0,\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0\ z_n =$
$\sqrt[5]{r_n^4 cos^4 \phi_n}(cos(\sqrt[5]{r_n cos\phi}) - 1) r_n^{-1} \sim r_n^{4/5} cos^{4/5}(\phi_n)(-1/2) r_n^{2/5} cos^{2/5}(\phi_n) r_n^{-1} \to 0$
Функция дифференцируема в $(0,0)$

$f(x,y) = 1 + xy + sin(\sqrt[5]{x^2 y^4})$

$f(0,0) = 1,\ f(x,0) = 1,\ f(0,y) = 1,\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$
$z_n = (r_n^2 cos\phi_n sin\phi_n + sin(r_n^{6/5} cos^{2/5}\phi_n sin^{4/5}\phi_n)) r_n^{-1} \to 0$
$r_n cos\phi_n sin\phi_n \to 0$
$sin(r_n^{6/5} cos^{2/5}\phi_n sin^{4/5}\phi_n) r_n^{-1} \sim r_n^{1/5} cos^{2/5}\phi_n sin^{4/5}\phi_n \to 0$

P.S.

Связь с равномерной сходимостью

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ равносильно равномерной сходимости $T(r,\phi) \rightrightarrows A$ на множестве $[0, 2\pi]$, где $T(r,\phi) = f(rsin\phi, rcos\phi)$

Обобщение на трехмерный случай

$x_n = r_n cos\phi_n$
$y_n = r_n sin\phi_n cos\psi_n$
$z_n = r_n sin\phi_n sin\psi_n$
Соотвественно полагаем $\phi_n \to \phi_0$, $\psi_n \to \psi_0$

Возможность наложения ограничений произвольного вида

Положим $w_n = g(x_n, y_n)$. Проводя аналогичные рассуждения и переходя к подпоследовательностям, можно потребовать наложения (любого) ограничения вида $w_n \to w_0$