Некоторые критерии равномерной сходимости функциональной последовательности

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

1 **Введение**

2 **Критерий равномерной сходимости**

- **Базовый критерий**
- m_q**-критерий**
- $(x_n \to a)$**-критерий**

3 **Примеры решения задач на равномерную сходимость**

Аннотация

Что доказывается?

Следующие условия равносильны:

1. $f_n \rightrightarrows_E f$
2. Для любой последовательности x_n такой, что:
    1. Все $x_n \in E$
    2. $x_n \to a$

    Выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$

Добавление: так как все $x_n \in E$, то a лежит в замыкании множества E в расширенной числовой прямой

Практическое применение данной теоремы

Показано на 8 примерах из задавальника для студентов факультета ФАКТфаки (см. 3 блок, 2 семинар, C2 §17). Представлено решение всех примеров на равномерную сходимость из данного семинара.

Примечание

Сходимость последовательностей рассматривается на расширенной числовой прямой (с $+\infty$ и $-\infty$). Соответственно, любая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Понятие равномерной сходимости и базовый критерий

Определение

Последовательность функций f_n равномерно сходится к фунции на множестве E, если выполнено $\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0$. Обозначение: $f_n \rightrightarrows_E f$

Теорема (базовый критерий)

Следующие условия равносильны:

1. $f_n \rightrightarrows_E f$
2. Для любой последовательности x_n, такой что все $x_n \in E$, выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$

Базовый критерий (доказательство достаточности)

Утверждение 1

Пусть $f_n \not\rightrightarrows_E f$. Тогда существует последовательность x_n, такая что:

1. Все $x_n \in E$
2. $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$

Доказательство:

1. Положим $r_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$
2. По определению равномерной сходимости $r_n \not\to 0$
3. Выделим подпоследовательность $r_{n_k} \to A \neq 0$
4. Построим последовательность x_n (все $x_n \in E$) таким образом, чтобы было выполнено: $r_n - \frac{1}{n} < |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq r_n$.
5. Положим $b_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$. Таким образом, $r_n - \frac{1}{n} < b_n \leq r_n$
6. Перейдем к подпоследовательностям с членами n_k: $r_{n_k} - \frac{1}{n_k} < b_{n_k} \leq r_{n_k}$
7. Так как $r_{n_k} \to A$, $r_{n_k} - \frac{1}{n_k} \to A - 0 = A$, то по лемме о двух милиционерах выполнено также $b_{n_k} \to A$
8. Так как $b_{n_k} \to A$, $A \neq 0$, то $b_n = |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$
9. Следовательно, $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$. чтд

Базовый критерий (доказательство необходимости)

Утверждение 2

Пусть $f_n \rightrightarrows_E f$, x_n — последовательность такая, что все $x_n \in E$.
Тогда выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$
Доказательство:

1. Положим $b_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$
2. Так как все $x_n \in E$, то $b_n = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq sup_{x \in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ (по определению равномерной сходимости)
3. Таким образом, $b_n = |f_n(x_n) - f(x_n)| \to 0$.
4. Следовательно, $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$, чтд

m_q-критерий

Теорема (m_q-критерий)

Следующие условия равносильны:

1. $f_n \rightrightarrows_E f$
2. Для любой последовательности y_q и последовательности натуральных чисел m_q таких, что
   1. Все $y_q \in E$
   2. $y_q \to a$
   3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$

   Выполнено $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \to 0$

m_q-критерий (доказательство достаточности)

Утверждение 1

Пусть $f_n \not\rightrightarrows_E f$. Тогда существуют:

1. Последовательность натуральных чисел $m_q \uparrow\uparrow +\infty$.
2. Сходящаяся последовательность $y_q \to a$, такая что все $y_q \in E$

Для которых выполнено: $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \not\to 0$
Доказательство:

1. По базовому критерию, существует последовательность x_n, такая, что все $x_n \in E$, и выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.
2. Положим $b_n = f_n(x_n) - f(x_n)$. Таким образом, $b_n \not\to 0$.
3. Выделим сходящуюся подпоследовательность $b_{n_k} \to A$, $A \neq 0$.
4. Из последовательности x_{n_k} выделим сходящуюся подпоследовательность $x_{n_{k_q}} \to a$.
5. Последовательность $b_{n_{k_q}}$ является подпоследовательностью b_{n_k}, $b_{n_k} \to A$. Следовательно, $b_{n_{k_q}} \to A$
6. Так как $b_{n_{k_q}} \to A$ и $A \neq 0$, то $b_{n_{k_q}} \not\to 0$
7. Положим $m_q = n_{k_q}$, $y_q = x_{m_q} = x_{n_{k_q}}$. Тогда $y_q \to a$, $m_q \uparrow\uparrow +\infty$, поскольку m_q являются номерами членов подпоследовательности.
8. Соответственно, $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) = f_{n_{k_q}}(x_{n_{k_q}}) - f(x_{n_{k_q}}) = b_{n_{k_q}} \not\to 0$, чтд.

m_q-критерий (доказательство необходимости)

Утверждение 2

Пусть $f_n \rightrightarrows_E f$, y_q — последовательность, m_q — последовательность натуральных чисел такие, что:

1. Все $y_q \in E$
2. $y_q \to a$
3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$

Тогда выполнено $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \to 0$.
Доказательство:

1. Положим $r_n = sup_{x \in E}|f_n(y) - f(y)|$
2. По определению равномерной сходимости выполнено $r_n \to 0$
3. Так как m_q — последовательность натуральных чисел такая что $m_q \uparrow\uparrow +\infty$, и $r_n \to 0$, то $r_{m_q} \to 0$.
4. Положим $b_q = |f_{m_q}(y_q) - f(y_q)|$
5. Так как все $y_q \in E$, то $b_q = |f_{m_q}(y_q) - f(y_q)| \leq sup_{x \in E}|f_{m_q}(y) - f(y)| = r_{m_q} \to 0$
6. Таким образом, $b_q = |f_{m_q}(y_q) - f(y_q)| \to 0$.
7. Следовательно, $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \to 0$, чтд

$(x_n \to a)$-критерий

Теорема ($(x_n \to a)$-критерий)

Следующие условия равносильны:

1. $f_n \rightrightarrows_E f$
2. Для любой последовательности x_n такой, что:
    1. Все $x_n \in E$
    2. $x_n \to a$

    Выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$

Лемма о «надпоследовательности с тождественным пределом»

Лемма (о надпоследовательности с тождественным пределом)

Пусть y_q — последовательность, m_q — последовательность натуральных чисел такие, что:

1. Все $y_q \in E$
2. $y_q \to a$
3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$

Тогда существует последовательность x_n такая, что:

1. Все $x_n \in E$
2. $x_n \to a$
3. $x_{m_q} = y_q$

Лемма о надпоследовательности (доказательство)

Построение последовательности x_n

1. Для всех $1 \leq n \leq m_1$ полагаем $x_n = y_1$
2. Для всех $q > 1$ и для всех $m_{q-1} < n \leq m_q$ полагаем $x_n = y_q$

Свойство 1: все $x_n \in E$

Каждый из членов последовательности x_n есть какой-нибудь член последовательности $y_q \in E$

Свойство 2: $x_n \to a$

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и выберем Q такое, что для всех $q > Q$ выполнено $y_q \in O_\varepsilon(a)$. Положим также $N = m_Q$.
2. Тогда при всех $n > N = m_Q$ выполнено $x_n = y_q$, где $q > Q$, и, следовательно, $x_n = y_q \in O_\varepsilon(a)$
3. Предъявим N, а также расфиксируем $\varepsilon > 0$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $n > N$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(a)$, т.е. $x_n \to a$

Свойство 3: $x_{m_q} = y_q$

По определению, при $n = m_q$ выполнено $x_{m_q} = x_n = y_q$

$(x_n \to x_0)$-критерий (доказательство достаточности)

Утверждение 1

Пусть $f_n \not\rightrightarrows_E f$. Тогда существует последовательность x_n, такая что:

1. Все $x_n \in E$
2. $x_n \to a$
3. $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$

Доказательство:

1. В соответствии с m_q-критерием существуют последовательность y_q и последовательность натуральных чисел m_q такие, что выполнено:
   1. Все $y_q \in E$
   2. $y_q \to a$
   3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$
   4. $f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \not\to 0$
2. В соответствии с леммой «о надпоследовательности с тождественным пределом» существует последовательность x_n такая, что выполнено:
   1. Все $x_n \in E$
   2. $x_{m_q} = y_q$
   3. $x_n \to a$
3. Положим $b_n = f_n(x_n) - f(x_n)$, $c_q = f_{m_q}(y_q) - f(y_q) \not\to 0$.
4. Тогда $b_{m_q} = f_{m_q}(x_{m_q}) - f(x_{m_q}) = f_{m_q}(y_q) - f(y_q) = c_q$, т.е. c_q является подпоследовательностью b_n
5. Так как $c_q \not\to 0$, то и $b_n = f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, чтд

$(x_n \to a)$-критерий (доказательство необходимости)

Утверждение 2

Пусть $f_n \rightrightarrows_E f$, x_n — последовательность такая, что:

1. Все $x_n \in E$
2. $x_n \to a$

Тогда выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.
Доказательство:

1. По базовому критерию $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$, чтд

Примеры [1, 2, 3]

Пример 1 (Т.5, а)

$f_n(x) = x\sin\frac{1}{x^2n^2}$, $E = (0, +\infty)$. $f_n(x) \to 0$ поточечно. Полагаем $f(x) = 0$

1. При $x_n \to 0$. $f_n(x_n) - f(x_n) = x_n \sin\frac{1}{x_n^2 n^2} \to 0$
2. При $x_n \to a$, $0 < a < +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = x_n \sin\frac{1}{x_n^2 n^2} \to a\sin(0) = 0$
3. При $x_n \to +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = x_n \sin\frac{1}{x_n^2 n^2} \sim x_n \frac{1}{x_n^2 n^2} = \frac{1}{x_n n^2} \to 0$

Вывод: $f_n \rightrightarrows_E f$

Пример 2 (С2, §17, 5(3))

$f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx^2}$, $E = [1, +\infty)$. $f_n(x) \to 0$ поточечно. Полагаем $f(x) = 0$

1. При $x_n \to a$, $1 \le a < +\infty$.
   $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{\ln nx_n}{nx_n^2} = \frac{1}{x_n^2}(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln x_n}{n}) \to \frac{1}{a^2}(0 + 0\ln a) = 0$
2. При $x_n \to +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{x_n^2}\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\frac{\ln x_n}{x_n^2} \to 0 * 0 + 0 * 0 = 0$

Вывод: $f_n \rightrightarrows_E f$

Пример 3 (С2, §17, 7(5))

$f_n(x) = nx(1-x)^n$, $E = [0, 1]$. $f_n(x) \to 0$ поточечно. Полагаем $f(x) = 0$

1. Положим $x_n = \frac{1}{n}$. Тогда $f_n(x_n) - f(x_n) = n(\frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})^n = (1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1} \neq 0$

Вывод: $f_n \not\rightrightarrows_E f$

Примеры [4, 5]

Пример 4 (C2, §17, 11(6))

$f_n(x) = n \operatorname{arctg} x^n$, $E_1 = [0, 1)$. $E_2 = [0, \delta)$, $0 < \delta < 1$.
Отдельно отметим, что из $x_n \to a$, $a \in [0, 1)$ следует $x_n^n \to 0$, $nx_n^n \to 0$.
Действительно, $\ln x_n^n = n \ln x_n \to -\infty$, $\ln nx_n^n = n(\frac{\ln n}{n} + \ln x_n) \to -\infty$.
Для всех $x \in [0, 1)$ $f_n(x) \sim nx^n \to 0$ поточечно. Полагаем $f(x) = 0$.

1. При $x_n \to a$, $0 \le a < 1$. $f_n(x_n) - f(x_n) = n \operatorname{arctg} x_n^n \sim nx_n^n \to 0$
2. Положим $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Тогда
   $f_n(x_n) - f(x_n) = n \operatorname{arctg} (1 - \frac{1}{n})^n \to (+\infty) \operatorname{arctg} (e^{-1}) = +\infty$

Вывод: $f_n \not\rightrightarrows_{E_1} f$, $f_n \rightrightarrows_{E_2} f$

Пример 5 (C2, §17, 9(10))

$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x}}{nx}$, $E_1 = (0, 1)$. $E_2 = (1, +\infty)$. Для всех $x \in (0, +\infty)$
$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2x}} \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ поточечно. Полагаем $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
Соответственно, $f_n(x) - f(x) = 1/nx(\sqrt{1+n^2x} + \sqrt{n^2x})$

1. Положим $x_n = 1/n^2$. Тогда $f_n(x_n) - f(x_n) = 1/(n\frac{1}{n^2}(\sqrt{2} + \sqrt{1})) = \frac{n}{1+\sqrt{2}} \to +\infty$
2. При $x_n \to a$, $0 < a < +\infty$.
   $f_n(x_n) - f(x_n) = (1/x_n)(1/(n(\sqrt{1+n^2x_n} + \sqrt{n^2x_n}))) \to (1/a) * 0 = 0$
3. При $x_n \to +\infty$ $f_n(x_n) - f(x_n) = (1/x_n)(1/(n(\sqrt{1+n^2x_n} + \sqrt{n^2x_n}))) \to 0 * 0 = 0$

Вывод: $f_n \not\rightrightarrows_{E_1} f$, $f_n \rightrightarrows_{E_2} f$

Примеры [6, 7]

Пример 6 (С2, §17, 12(5))

$f_n(x) = \ln(x^2 + \frac{1}{n})$, $E_1 = (0, +\infty)$. $E_2 = (\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.
$f_n(x) = \ln(x^2 + \frac{1}{n}) \to \ln(x^2) = 2\ln x$ поточечно. Полагаем $f(x) = 2\ln x$.
Соответственно, $f_n(x) - f(x) = \ln(1 + \frac{1}{nx^2})$

1. Положим $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда $f_n(x_n) - f(x_n) = \ln 2 \neq 0$
2. При $x_n \to a$, $0 < a < +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \ln(1 + \frac{1}{nx_n^2}) \to \ln(1 + 0 * \frac{1}{a^2}) = 0$
3. При $x_n \to +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \ln(1 + \frac{1}{nx_n^2}) \to \ln(1 + 0 * 0) = 0$

Вывод: $f_n \not\rightrightarrows_{E_1} f$, $f_n \rightrightarrows_{E_2} f$

Пример 7 (С2, §17, 8(5))

$f_n(x) = n(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}})$, $E_1 = [0, 1]$, $E_2 = (1, +\infty)$. Разложение:
$\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^3}{n\sqrt{n}}(\frac{1}{3} + r(\frac{x}{\sqrt{n}}))$, где $\lim_{y\to 0} r(y) = 0$. Таким образом,
$f_n(x) = \frac{x^3}{\sqrt{n}}(\frac{1}{3} + r(\frac{x}{\sqrt{n}})) \to 0$ поточечно при $x \in [0, +\infty)$. Полагаем $f(x) = 0$

1. При $x_n \to 0$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{x_n^3}{\sqrt{n}}(\frac{1}{3} + r(\frac{x_n}{\sqrt{n}})) \to 0 * 0 * (\frac{1}{3} + 0) = 0$
2. При $x_n \to a$, $0 < a < +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) \to a^3 * 0 * (\frac{1}{3} + 0) = 0$
3. Положим $x_n = \sqrt{n}$. Тогда $f_n(x_n) - f(x_n) = n(1 - \frac{\pi}{4}) \to +\infty$

Вывод: $f_n \rightrightarrows_{E_1} f$, $f_n \not\rightrightarrows_{E_2} f$

Примеры [8]

Пример 8 (С2, §17, 13(7))

$f_n(x) = n^2(1 - \cos\frac{1}{nx})$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (1, +\infty)$. Разложение:
$\cos\frac{1}{nx} = 1 - \frac{1}{x^2n^2}(\frac{1}{2} + r(\frac{1}{nx}))$, где $\lim_{y\to 0} r(y) = 0$. Таким образом,
$f_n(x) = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{2} + r(\frac{1}{nx})) \to \frac{1}{2x^2}$ поточечно для всех $x \in (0, +\infty)$. Полагаем
$f(x) = \frac{1}{2x^2}$. Тогда $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{x^2} r(\frac{1}{nx})$.

1. Положим $x_n = \frac{1}{n}$. Тогда
$f_n(x_n) - f(x_n) = n^2(1 - \cos 1) - \frac{n^2}{2} = n^2(\frac{1}{2} - \cos 1) \to -\infty$.
2. При $x_n \to a$, $0 < a < +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{x_n^2} r(\frac{1}{nx_n}) \to \frac{1}{a^2} * 0 = 0$
3. При $x_n \to +\infty$. $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{x_n^2} r(\frac{1}{nx_n}) \to 0 * 0 = 0$

Вывод: $f_n \not\rightrightarrows_{E_1} f$, $f_n \rightrightarrows_{E_2} f$