Равномерная сходимость «в точке»

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

Аннотация

Равномерная сходимость «в точке»

Ранее было установлено, что равномерная сходимость последовательности функций f_n к функции f равносильна тому, что для любой точки a из расширенной числовой прямой и для любой последовательности $x_n \to a$ выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$. Соответственно, фиксируя точку a возможно ввести понятие «равномерной сходимости в точке». С другой стороны, возможно понимать «равномерную сходимость в точке» как равномерную сходимость в некоторой окрестности данной точки.
Далее на слайдах представлены определения точек неравномерности «по Гейне» и «по Коши». Установленны соотношения между данными понятиями: это оказывается не одним и тем же, однако множество точек неравномерности по Коши всегда является замыканием множества точек неравномерности по Гейне.

Общее предположение

На множестве $E \subset \mathbb{R}$ определена последовательность функций f_n, а также функция f. Для любого $x \in E$ выполнено $f_n(x) \to f(x)$, т.е. $f_n \to f$ поточечно. Рассматриваются точки $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.

Описание результатов

Введены понятия:

1. Точка неравномерности Коши
2. Точка неравномерности Гейне первого рода
3. Точка неравномерности Гейне второго рода

Доказаны утверждения

1. Всякая точка неравномерности Гейне первого рода является точкой неравномерности Гейне второго рода, и всякая точка неравномерности Гейне второго рода является точкой неравномерности Гейне первого рода.
2. Всякая точка неравномерности Гейне является точкой неравномерности Коши
3. Множество точек неравномерности Коши замкнуто в расширенной числовой прямой.
4. Множество точек неравномерности Гейне плотно в множестве точек неравномерности Коши
5. Существует последовательность функций f_n такая, что множество её точек неравномерности Гейне не совпадает с множеством её точек неравномерности Коши.

Три вида точек неравномерности (Определения)

Определение 1

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Будем говорить, что a есть точка равномерности Коши, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что f_n равномерно сходится к функции f на множестве $E \cap O_\varepsilon(a)$. Если a не является точкой равномерности Коши, то будем говорить, что она есть точка неравномерности Коши.

Определение 2

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Будем говорить, что a есть точка неравномерности Гейне первого рода, если существует последовательность $x_n \to a$ такая, что все x_n лежат в E, и выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$. Если a не является точкой неравномерности Гейне первого рода, то будем говорить, что она есть точка равномерности Гейне первого рода.

Определение 3

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Будем говорить, что a есть точка неравномерности Гейне второго рода, если существует последовательность $x_n \to a$ (все $x_n \in E$), а также последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $f_{n_k}(x_k) - f_{m_k}(x_k) \not\to 0$. Если a не является точкой неравномерности Гейне второго рода, то будем говорить, что она есть точка равномерности Гейне второго рода.

Результат 1: эквивалетность определения 2 и определения 3

Теорема 1

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
Точка a является точкой неравномерности Гейне первого рода тогда и только тогда, когда она является точкой неравномерности Гейне второго рода.

Комментарий 1

В силу представленной теоремы далее слова «точка неравномерности Гейне первого рода» и «точка неравномерности Гейне второго рода» будут заменяться просто на «точка неравномерности Гейне».

Комментарий 2

Определение точки неравномерности Гейне второго рода (а также теорема о эквивалентности) введено для целей изучения равномерной сходимости рядов. Равномерная сходимость рядов будет рассматриваться не в этих слайдах.

Результат 2: неравномерность Гейне влечет неравномерность Коши

Теорема 2

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
Если точка a является точкой неравномерности Гейне, то она является также и точкой неравномерности Коши.

Результат 3: замкнутость множества точек неравномерности Коши

Теорема 3

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
Если a есть точка равномерности Коши, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что все точки множества $\overline{E} \cap O_\varepsilon(a)$ также является точками равномерности Коши.

Комментарий 1

Отсюда немедленно следует, что множество точек равномерности Коши является открытым в $\overline{R}$ относительно множества $\overline{E}$. И, следовательно, множество точек неравномерности Коши является замкнутым в $\overline{R}$ относительно $\overline{E}$ (как дополнение к открытому).

Комментарий 2

Однако, множество $\overline{E}$ является замкнутым. Следовательно, замкнутое относительно него множество точек неравномерности Коши также является замкнутым в $\overline{R}$

Результат 4: плотность множества точек неравномерности Гейне в множестве точек неравномерности Коши

Теорема 4

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$, a является точкой неравномерности Коши.
Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка b такая, что:

- $b \in \overline{E} \cap O_\varepsilon(a)$
- b является точкой неравномерности Гейне

Комментарий 1

Из результатов 2, 3, 4 следует, что множество точек неравномерности Коши есть замыкание множества точек неравномерности Гейне.

Результат 5: Несовпадение множеств точек неравномерности Коши и Гейне

Функция $f_n(x)$ (n — фиксированно)

Если существует натуральное число m такое, что $x = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 n}$, то полагаем $f_n(x) = x$. Иначе полагаем $f_n(x) = 0$

Теорема 5 (свойства функциональной последовательности f_n)

1. $f_n(x) \to 0$ поточечно.
2. Для любого натурального m точка $y_m = \frac{1}{m}$ является точкой неравномерности Гейне
3. Точка $y_0 = 0$ является точкой равномерности Гейне

Комментарий 1

Так как точки $y_m = \frac{1}{m}$ являются точками неравномерности Гейне, $y_m \to y_0$, то точка $y_0 = 0$ является точкой неравномерности Коши. Таким образом, точка 0 является точкой неравномерности Коши, но не является точкой неравномерности Гейне.

Утверждения, доказанные в прошлом материале

Критерий равномерной сходимости

Следующие условия равносильны:

1. $f_n \rightrightarrows_E f$
2. Для любой последовательности x_n такой, что:
   1. Все $x_n \in E$
   2. $x_n \to a$

   Выполнено $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$

Лемма о надпоследовательности

Пусть y_q — последовательность, m_q — последовательность натуральных чисел такие, что:

1. Все $y_q \in E$
2. $y_q \to a$
3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$

Тогда существует последовательность x_n такая, что:

1. Все $x_n \in E$
2. $x_n \to a$
3. $x_{m_q} = y_q$

Прочие вспомогательные утверждения

Вспомогательное утверждение 1

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$, x_k — последовательность такая, что все x_k лежат в E. Тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что выполнено $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$

Вспомогательное утверждение 2

Пусть для натуральных n_1, n_2, m_1, m_2 выполнено $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2 n_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2^2 n_2}$. Тогда выполнено $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$

Вспомогательное утверждение 1

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$, x_k — последовательность такая, что все x_k лежат в E. Тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k \upuparrows +\infty$ такая, что выполнено $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$

Построение n_1

Последовательность $f_n(x_1) - f(x_1) \to 0$. Следовательно, найдется номер n_1 такой, что $|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| < 1$

Построение n_{k+1} при построенных $n_1, \ldots, n_k$

Последовательность $f_n(x_k) - f(x_k) \to 0$. Следовательно, найдётся номер n_{k+1}, больший всех номеров $n_1, \ldots, n_k$, такой, что выполнено $|f_{n_{k+1}}(x_k) - f(x_k)| < \frac{1}{k+1}$

Свойства

Таким образом, $n_k \upuparrows +\infty$, $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{1}{k}$. Следовательно, $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$.

Вспомогательное утверждение 2

Утверждение

Пусть для натуральных n_1, n_2, m_1, m_2 выполнено $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2 n_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2^2 n_2}$. Тогда выполнено $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$

Доказательство

1. Предположим, что $m_1 \neq m_2$. Для определенности положим $m_1 > m_2$. Тогда $m_1 - 1 \geq m_2$, и, соответственно, $\frac{1}{m_1 - 1} \leq \frac{1}{m_2}$. Также верно $m_1 > 1$
2. Так как $n_1 >= 1$, то произведем оценку: $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2 n_1} \leq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2} \leq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1(m_1-1)} = \frac{m_1 - 1 + 1}{m_1(m_1-1)} = \frac{1}{m_1 - 1} \leq \frac{1}{m_2} < \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2^2 n_2}$
3. Т.е. $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2 n_1} < \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2^2 n_2}$, что противоречит условию. Таким образом, $m_1 = m_2 = m$.
4. Следовательно, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 n_1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 n_2} \to \frac{1}{m^2 n_1} = \frac{1}{m^2 n_2} \to \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \to n_1 = n_2$

Теорема 1. Доказательство необходимости

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$, точка a является точкой неравномерности Гейне первого рода.
Тогда точка a является точкой неравномерности Гейне второго рода.

Доказательство

1. По условию, существует последовательность x_k такая, что все $x_k \in E$, $x_k \to a$, $f_k(x_k) - f(x_k) \not\to 0$.
2. В соответствии со вспомогательным утверждением 1, существует последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что выполнено $f_{m_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$
3. Таким образом, $f_k(x_k) - f_{m_k}(x_k) = (f_k(x_k) - f(x_k)) - (f_{m_k}(x_k) - f(x_k)) \not\to 0$, откуда следует, что точка a является точкой неравномерности Гейне второго рода.

Теорема 1. Доказательство достаточности (Лемма)

Лемма

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$, точка a является точкой равномерности Гейне первого рода.
Тогда для любой последовательности натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ и любой последовательности $x_k \to a$ такой, что все $x_k \in E$ выполнено $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$

Доказательство леммы

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \not\to 0$
2. Применяя лемму о надпоследовательности, установим существование последовательности $y_k \to a$ (все $y_k \in E$) такой, что $y_{n_k} = x_k$
3. Положим $a_k = f_k(y_k) - f(y_k)$. Тогда $a_{n_k} = f_{n_k}(y_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \not\to 0$. Откуда следует, что также $f_k(y_k) - f(y_k) = a_k \not\to 0$
4. И, следовательно, a является точкой неравномерности Гейне первого рода, что противоречит условию.

Теорема 1. Доказательство достаточности

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$, точка a является точкой неравномерности Гейне второго рода.
Тогда точка a является точкой неравномерности Гейне первого рода.

Доказательство

1. Предположим обратное: точка a является точкой равномерности Гейне первого рода.
2. Зафиксируем последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow\uparrow +\infty$, а также последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$)
3. Применяя лемму, получаем: $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$, $f_{m_k}(x_k) - f(x_k) \to 0$.
4. И, следовательно, $f_{n_k}(x_k) - f_{m_k}(x_k) \to 0$.
5. Расфиксируем n_k, m_k, x_k. Точка a является точкой равномерности Гейне второго рода, что противоречит условию.

Теорема 2

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
Если точка a является точкой неравномерности Гейне, то она является также и точкой неравномерности Коши.

Доказательство

1. Так как a является точкой неравномерности Гейне первого рода, то существует последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) такая, что $a_k = f_k(x_k) - f(x_k) \not\to 0$
2. Предположим обратное: точка a является точкой равномерности Коши. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f_n \rightrightarrows_{E \cap O_\varepsilon(a)} f$
3. Так как $x_k \to a$, то найдётся номер N такой, что при $n > N$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(a)$. Положим $y_k = x_{k+N}$. Тогда все $y_k \in E \cap O_\varepsilon(a)$
4. Положим $b_k = f_{k+N}(y_k) - f(y_k) = a_{k+N}$
5. Тогда $|f_{k+N}(y_k) - f(y_k)| \leq \sup_{y \in E \cap O_\varepsilon(a)} |f_{k+N}(y) - f(y)| \to 0$.
6. Таким образом, $b_k \to 0$. И, следовательно, также $a_k \to 0$ (отбрасывание конечного числа членов). Противоречие

Теорема 3

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
Если a есть точка равномерности Коши, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что все точки множества $\overline{E} \cap O_\varepsilon(a)$ также являются точками равномерности Коши.

Доказательство

1. По условию, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f_n \rightrightarrows_{E \cap O_\varepsilon(a)} f$.
2. Зафиксируем $a' \in E \cap O_\varepsilon(a)$
3. Так как $O_\varepsilon(a)$ — открытое множество, то существует $\varepsilon' > 0$ такое, что $O_{\varepsilon'}(a') \subset O_\varepsilon(a)$.
4. И, следовательно, $O_{\varepsilon'}(a') \cap E \subset O_\varepsilon(a) \cap E$. Таким образом, $f_n \rightrightarrows_{E \cap O_{\varepsilon'}(a')} f$
5. Т.е. a' является точкой равномерности Коши.

Теорема 4

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции $f : E \to R$, $E \subset R$. Пусть также $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$, a является точкой неравномерности Коши.
Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка b такая, что:

- $b \in \overline{E} \cap O_\varepsilon(a)$
- b является точкой неравномерности Гейне

Доказательство

1. 1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
2. 2. Так как a является точкой неравномерности Коши, то f_n не сходится равномерно к f на множестве $E \cap O_{\varepsilon/2}(a)$
3. 3. В соответствии с критерием равномерной сходимости, существует последовательность x_k такая, что все $x_k \in E \cap O_{\varepsilon/2}(a)$, $x_k \to b$, $f_k(x_k) - f(x_k) \not\to 0$
4. 4. Так как все $x_k \in E$, $x_k \to b$, то $b \in \overline{E} \subset \overline{R}$.
5. 5. Так как все $x_k \in O_{\varepsilon/2}(a)$, $x_k \to b$, то $b \in \overline{O_{\varepsilon/2}(a)} \subset O_\varepsilon(a)$. Примечание: если $a = \pm\infty$, то здесь подразумевается, что $a \in O_\varepsilon(a)$.
6. 6. Так как все $x_k \in E$, $x_k \to b$, $f_k(x_k) - f(x_k) \not\to 0$, то b есть точка неравномерности Гейне.

Теорема 5. Формулировка, свойство 1)

Функции f_n

Если существует натуральное число m такое, что $x = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 n}$, то полагаем $f_n(x) = x$. Иначе полагаем $f_n(x) = 0$

Утверждение

1. $f_n(x) \to 0$ поточечно.
2. Для любого натурального m точка $y_m = \frac{1}{m}$ является точкой неравномерности Гейне
3. Точка $y_0 = 0$ является точкой равномерности Гейне

Доказательство свойства 1)

1. Зафиксируем $x \in E$. Положим $a_n = f_n(x)$.
2. Предположим, что a_n отлична от 0 на двух различных членах,т.е. $f_{n_1}(x) = a_{n_1} \neq 0$, $f_{n_2}(x) = a_{n_2} \neq 0$, где $n_1 \neq n_2$.
3. Тогда найдутся натуральные числа m_1, m_2 такие, что $x = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2 n_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2^2 n_2}$
4. В соответствии со вспомогательным утверждением 2, отсюда следует $n_1 = n_2$. Противоречие. Следовательно, a_n равна 0 на всех членах, кроме, может быть, одного.
5. Таким образом $a_n = f_n(x) \to 0$

Теорема 5. Свойства 2), 3)

Доказательство свойства 2)

1. Зафиксируем натуральное m
2. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 n}$. Выполнено $x_n \to \frac{1}{m}$
3. Также $f_n(x_n) - f(x_n) = x_n - 0 = x_n \to \frac{1}{m} \neq 0$
4. Следовательно, $\frac{1}{m}$ есть точка неравномерности Гейне.

Доказательство свойства 3)

1. Зафиксируем последовательность $x_n \to 0$
2. Выполнено $|f(x_n)| \leq |x_n| \to 0$. Следовательно, $f(x_n) \to 0$.
3. Т.е. $f_n(x_n) - f(x_n) = f_n(x_n) - 0 = f_n(x_n) \to 0$.
4. Расфиксируем последовательность x_n. Таким образом, 0 является точкой равномерности Гейне.