Равномерная ограниченность

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

Аннотация

Равномерная ограниченность

Исследуется понятие равномерной ограниченности. Введены понятия равномерной ограниченности «в точке» по Коши и по Гейне, доказывается их эквивалентность. Установлен критерий равномерной ограниченности

Общее предположение

На множестве $E \subset \mathbb{R}$ определена последовательность функций f_n. Каждая из функций f_n является ограниченной.

Описание результатов

Введены понятия:

1. Равномерная ограниченность
2. Точка неограниченности Коши
3. Точка неограниченности Гейне

Доказаны утверждения

1. Необходимое условие равномерной ограниченности: если последовательность функций f_n равномерно ограничена, то каждая из этих функций ограничена
2. Множества точек неограниченности Коши и Гейне совпадают
3. Последовательность ограниченных функций f_n равномерно ограничена тогда и только тогда, когда не имеется точек неравномерности

Понятие равномерной ограниченности

Определение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность функций. Будем говорить, что f_n равномерно ограничена, если существует число M такое, что для любого натурального n и любого $x \in E$ выполнено $|f_n(x)| \leq M$

Теорема 1 (необходимое условие)

Если последовательность функций f_n равномерно ограничена, то каждая из функций f_n ограничена.

Точки неограниченности

Определение 1

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Будем говорить, что a есть точка ограниченности Коши, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что последовательность функций f_n равномерно ограничена на множестве $E \cap O_\varepsilon(a)$. Если a не является точкой ограниченности Коши, то будем говорить, что она есть точка неограниченности Коши.

Определение 2

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Будем говорить, что a есть точка неограниченности Гейне, если существует последовательность $x_n \to a$ такая, что все $x_n \in E$, и последовательность $f_n(x_n)$ является неограниченной. Если a не является точкой неограниченности Гейне, то будем говорить, что она есть точка ограниченности Гейне.

Теорема 2 (Эквивалентность определений)

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Точка a является точкой неограниченности Гейне тогда и только тогда, когда она является точкой неограниченности Коши.

Критерий равномерной ограниченности

Теорема 3

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций. Следующие условия равносильны:

1. Последовательность функций f_n равномерно ограничена
2. Не имеется точек неограниченности Гейне

Лемма о надпоследовательности

Пусть y_q — последовательность, m_q — последовательность натуральных чисел такие, что:

1. Все $y_q \in E$
2. $y_q \to a$
3. $m_q \uparrow\uparrow +\infty$

Тогда существует последовательность x_n такая, что:

1. Все $x_n \in E$
2. $x_n \to a$
3. $x_{m_q} = y_q$

Вспомогательное утверждение 1

Пусть f_n — последовательность ограниченных функций, не являющаяся равномерно ограниченной, M — некое действительное число. Тогда существуют $x \in E$ и натуральное число $n > N$ такие, что $|f_n(x)| > M$

Вспомогательное утверждение 2

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций, не являющаяся равномерно ограниченной. Тогда существуют последовательность x_k (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что для всех k выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$.

Вспомогательное утверждение 3

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций. Если существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел n_k такие, что последовательность $f_{n_k}(x_k)$ является неограниченной. Тогда a является точкой неравномерности Гейне.

Вспомогательное утверждение 4

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций, a — точка неограниченности Коши. Тогда существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что для всех k выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$

Вспомогательное утверждение 1

Утверждение

Пусть f_n — последовательность ограниченных функций, не являющаяся равномерно ограниченной, N — некое натуральное число, M — некое действительное число. Тогда существуют $x \in E$ и натуральное число $n > N$ такие, что $|f_n(x)| > M$

Доказательство

1. Предположим обратное, т.е. что для всех $x \in E$ и для всех $n > N$ выполнено $|f_n(x)| \leq M$
2. Все функции ограничены, то есть существуют числа M_i такие что для всех индексов i и для всех $x \in E$ выполнено $|f_i(x)| \leq M_i$
3. В частности, для всех $x \in E$ выполнено $|f_1(x)| \leq M_1, \ldots, |f_N(x)| \leq M_N$.
4. И, следовательно, для всех $x \in E$ и для всех натуральных n выполнено $|f_n(x)| \leq max(M, M_1, \ldots, M_n)$
5. Таким образом, последовательность функций f_n равномерно ограничена, что противоречит условию.

Вспомогательное утверждение 2

Утверждение

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций, не являющаяся равномерно ограниченной. Тогда существуют последовательность x_k (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что для всех k выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$.

Построение x_1, n_1

Применяем вспомогательное утверждение 1 для $N = 1$, $M = 1$.

Построение x_{k+1}, n_{k+1} при построенных $x_1, \dots, x_k$, $n_1, \dots, n_k$

Применяем вспомогательное утверждение 1 для $N = n_k$, $M = k$.

Свойство

По построению $n_k \uparrow\uparrow +\infty$

Вспомогательное утверждение 3

Утверждение

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций. Если существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел n_k такие, что последовательность $f_{n_k}(x_k)$ является неограниченной. Тогда a является точкой неограниченности Гейне.

Доказательство

1. В соответствии с леммой о надпоследовательности, построим последовательность $y_n \to a$ такую, что все $y_n \in E$, $y_{n_k} = x_k$
2. Положим $a_n = f_n(y_n)$.
3. Тогда $a_{n_k} = f_{n_k}(y_{n_k}) = f_{n_k}(x_k)$ — неограниченная последовательность, являющаяся подпоследовательностью a_n
4. Следовательно, $a_n = f_n(y_n)$ также является неограниченной последовательностью.
5. Так как $y_n \to a$, все $y_n \in E$, последовательность $f_n(y_n)$ неограничена, то a является точкой неограниченности Гейне.

Вспомогательное утверждение 4

Утверждение

Пусть $f_n : E \to R$ — последовательность ограниченных функций, a — точка неограниченности Коши. Тогда существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что для всех k выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$

Построение x_1, n_1

Так как a — точка неограниченности Коши, то последовательность функций f_n не является равномерно ограниченной на множестве $E \cap O_1(a)$. Используя вспомогательное утверждение 1, построим $x_1 \in O_1(a) \cap E$ и натуральное число n_1 такие, что выполнено $|f_{n_1}(x_1)| > 1$

Построение x_{k+1}, n_{k+1} при построенных $x_1, \ldots, x_k$, $n_1, \ldots, n_k$

Так как a — точка неограниченности Коши, то последовательность функций f_n не является равномерно ограниченной на множестве $E \cap O_{\frac{1}{k+1}}(a)$. Используя вспомогательное утверждение 1, построим $x_{k+1} \in O_{\frac{1}{k+1}}(a) \cap E$ и натуральное число n_{k+1} такие, что выполнено $n_{k+1} > n_k$ и $|f_{n_{k+1}}(x_{k+1})| > k + 1$.

Свойство

По построению $n_k \uparrow\uparrow +\infty$, $x_k \in O_{\frac{1}{k}}(a)$, откуда следует $x_k \to a$.

Теорема 1

Утверждение

Если последовательность функций f_n равномерно ограничена, то каждая из функций f_n ограничена.

Доказательство

Действительно, для каждого n и для каждого n выполнено $|f_n(x)| \leq M$, т.е. все функции f_n ограничены числом M.

Теорема 2. Гейне => Коши

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Если точка a является точкой неограниченности Гейне, то она является точкой неограниченности Коши.

Доказательство

1. Предположим обратное: a является точкой ограниченности Коши
2. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что последовательность функций f_n является равномерно ограниченной на множестве $E \cap O_\varepsilon(a)$, т.е существует M такое, что для всех натуральных n и для всех $x \in E \cap O_\varepsilon(a)$ выполнено $|f_n(x)| \leq M$
3. Так как a является точкой ограниченности Гейне, то существует последовательность $x_n \to a$ такая, что все $x_n \in E$, и последовательность $f_n(x_n)$ неограничена.
4. Так как $x_n \to a$, то существует натуральное число N такое, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in O_\varepsilon(a)$.
5. И, следовательно, для всех $n > N$ также выполнено $|f_n(x_n)| \leq M$.
6. Положим $M' = max(M, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$. Тогда для всех натуральных n выполнено $|f_n(x_n)| \leq M'$, т.е. последовательность $f_n(x_n)$ ограничена. Противоречие.

Теорема 2. Коши => Гейне

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, $a \in \overline{E} \subset \overline{R}$. Если точка a является точкой неограниченности Коши, то она является точкой неограниченности Гейне.

Доказательство

1. В соответствии со вспомогательным утверждением 4, существуют последовательность $x_k \to a$ (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел n_k такие, что выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$.
2. Следовательно, последовательность $f_{n_k}(x_k)$ является неограниченной.
3. Так как $x_k \to a$, все $x_k \in E$, последовательность $f_{n_k}(x_k)$ неограниченна, то, в соответствии со вспомогательным утверждением 3, точка a является точкой неограниченности Гейне.

Теорема 3. Доказательство необходимости

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, не являющаяся равномерно ограниченной. Тогда имеется точка неограниченности Гейне.

Доказательство

1. В соответствии со вспомогательным утверждением 2, существуют последовательность x_k (все $x_k \in E$) и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $|f_{n_k}(x_k)| > k$
2. Выделим из последовательности x_k сходящуюся подпоследовательность $x_{k_s} \to a$.
3. Положим $m_s = n_{k_s}$, $y_s = x_{k_s}$. Выполнено $y_s \to a$, все $y_s \in E$.
4. Тогда $|f_{m_s}(y_s)| = |f_{n_{k_s}}(x_{k_s})| > k_s$. Последовательность $f_{m_s}(y_s)$ является неограниченной.
5. Так как $y_s \to a$, все $y_s \in E$ и последовательность $f_{m_s}(y_s)$ является неограниченной, то, в соответствии со вспомогательным утверждением 3, a является точкой неограниченности Гейне.

Теорема 3. Доказательство достаточности

Утверждение

Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}$ — последовательность ограниченных функций, точка a — точка неограниченности Гейне. Тогда последовательность функций f_n не является равномерно ограниченной.

Доказательство

1. Предположим обратное. Тогда существует M такое, что для всех $x \in E$ и для всех натуральных n выполнено $|f_n(x)| \leq M$.
2. Так как точка a является точкой неограниченности Гейне, то существует последовательность $x_n \to a$ (все $x_n \in E$) такая, что $f_n(x_n)$ является неограниченной последовательностью.
3. Однако, для всех n выполнено $|f_n(x_n)| \leq M$, т.е. последовательность $f_n(x_n)$ ограниченна. Противоречие.