Совершенный Кубоид – это не более, чем миф

В математике *совершенный кубоид* - это прямоугольный кубоид, ребра которого, лицевые диагонали и телесная диагональ имеют целые длины: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick

Совершенный кубоид должен удовлетворять следующей системе диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2=d^2 \\ a^2+c^2=e^2 \\ b^2+c^2=f^2 \\ a^2+b^2+c^2=g^2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

где: a,b,c - рёбра, d,e,f - лицевые диагонали и g - телесная диагональ.

До сих пор не было найдено ни одного численного примера совершенного кубоида, но и не было доказано, что такой кубоид не может существовать, так что это оставалось проблемой в течение нескольких столетий. Однако я покажу причину, по которой идеальный кубоид невозможен.

Лемма.

Если совершенный кубоид существует, то квадраты трёх его лицевых диагоналей должны образовывать треугольник Герона.

Доказательство.

Из несложных преобразований (I) имеем:

$$\begin{cases} g^2=\dfrac{d^2+e^2+f^2}{2} \\ a^2=\dfrac{d^2+e^2+f^2}{2}-f^2 \\ b^2=\dfrac{d^2+e^2+f^2}{2}-e^2 \\ c^2=\dfrac{d^2+e^2+f^2}{2}-d^2 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Посредством подстановки из (IV) и (VI) вытекает:

$$a^2b^2c^2g^2=\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-f^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-e^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-d^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2}\right) \qquad \text{(III)}$$

$$abcg=\frac{1}{4}\sqrt{\left(-d^2+e^2+f^2\right)\left(d^2-e^2+f^2\right)\left(d^2+e^2-f^2\right)\left(d^2+e^2+f^2\right)} \qquad \text{(IV)}$$

Поскольку $abcg\in\mathbb{N}$, то квадраты лицевых диагоналей d^2,e^2,f^2 являются рёбрами геронового треугольника площадью $abcg$ (https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle). Что и требовалось.

Параметризуем указанный геронов треугольник посредством общего параметрического решения Леонарда Эйлера (https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle#Euler's_parametric_equation):

$$\begin{cases} d^2 = mn(p^2+q^2) \\ e^2 = pq(m^2+n^2) \\ f^2 = (mq+np)(mp-nq) \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

$$m,n,p,q \in \mathbb{N}, \quad mp > nq$$

Выразим остальные параметры совершенного кубоида:

$$\begin{cases} a^2 = nq(mq+np) \\ b^2 = np(mp-nq) \\ c^2 = mq(mp-nq) \\ g^2 = mp(mq+np) \end{cases} \qquad \text{(VI)}$$

Из (V) и (VI) следует:

$$\begin{aligned} &b^2 f^2 g^2 = mnp^2(mp-nq)^2(mq+np)^2 \Rightarrow mn = \square \\ &c^2 f^2 g^2 = pqm^2(mp-nq)^2(mq+np)^2 \Rightarrow pq = \square \quad \Rightarrow m^2+n^2 = \square \end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

Пусть: $m = ut^2, \quad n = us^2$, тогда:

$$mn = u^2 s^2 t^2 = \square$$

$m^2+n^2 = u^2(s^4+t^4) \neq \square$, что противоречит (VII).

Вывод: предположение о существовании совершенного кубоида нереализуемо.

Захар Пехтерев,

28 апреля 2023г.