Двойные последовательности

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

Аннотация

Двойные последовательности

Рассмотрены основные свойства двойных последовательностей, их сходимость в поточечном, равномерном и как двойной предел смыслах. Установлены соотношения между данными понятиями. Представлена теорема, могущая быть названной критерием Коши равномерной сходимости двойной последовательности, необходимая далее для анализа равномерной сходимости функциональных последовательностей. Представлены относящиеся к одновременной сходимости по обоим переменным теоремы Стокса-Зайделя и Дини.

Определение

Двойная последовательность есть функция двух натуральных переменных $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. $a(i,j)$ обозначается как $a_{i,j}$

Определения

Определение 1

Будем говорить, что двойная последовательность $a_{i,j}$ поточечно сходится к последовательности b_i при $j \to \infty$, если для любого i выполнено $\lim_{j\to 0} a_{i,j} = b_i$. Обозначение: $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$

Определение 2

Будем говорить, то двойная последовательность $a_{i,j}$ равномерно сходится к последовательности b_i при $j \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для любого $j > N$ и для любого n выполнено $|a_{i,j} - b_i| < \varepsilon$. Обозначение: $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$

Определение 3

Будем говорить, что двойная последовательность $a_{i,j}$ сходятся к действительному числу A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любых $i, j > N$ выполнено $|a_{i,j} - A| < \varepsilon$. Обозначение: $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$

I. Сходимость двойной последовательности

Теорема 1

Если $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$

Теорема 2

Пусть $i_k, j_k \to \infty$ — последовательности натуральных чисел, $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$. Тогда $\lim_{k\to\infty} a_{i_k,j_k} = A$

Теорема 3

Пусть $a_{i,j} \not\xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} \to B$, $B \neq A$.

Теорема 4

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, тогда $a_{i,j} - b_i \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$.

Теорема 5

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $a_{i,j} - b_i \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$. Тогда $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$.

II. Критерий Коши

Теорема 1

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$ такая, что выполнено $a_{k,n_k} - b_k \not\to 0$.

Теорема 2

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, n_k — последовательность натуральных чисел. Тогда найдётся последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow +\infty$, такая что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - b_k \to 0$.

Теорема 3

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $n_k, m_k \to \infty$ — последовательности натуральных чисел. Тогда выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \to 0$

Теорема 4

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$ такие, что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \not\to 0$.

III. Теорема Стокса-Зайделя

Теорема 1

Пусть b_i, c_j — последовательности, $a_{i,j}$ — двойная последовательность.
Если:

$$\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, "j\to\infty", shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "i\to\infty"'] & b_i \\
c_j &
\end{tikzcd}$$

То найдётся действительное число A такое, что:

$$\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, "j\to\infty", shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "i\to\infty"', shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, "i,j\to\infty"] & b_i \arrow[d, "i\to\infty"] \\
c_j \arrow[r, "j\to\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

Теорема 2

Пусть b_i, c_j — последовательности, $a_{i,j}$ — двойная последовательность, A — действительное число.

Если:

$$
\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, "j\to\infty"] \arrow[d, "i\to\infty"'] \arrow[dr, "i{,}j\to\infty"] & b_i \arrow[d, "i\to\infty"] \\
c_j \arrow[r, "j\to\infty"'] & A
\end{tikzcd}
$$

То:

$$
\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, Rightarrow, "j\to\infty"] \arrow[d, Rightarrow, "i\to\infty"'] \arrow[dr, "i{,}j\to\infty"] & b_i \arrow[d, "i\to\infty"] \\
c_j \arrow[r, "j\to\infty"'] & A
\end{tikzcd}
$$

IV. Теорема Дини

Теорема 1

Пусть b_i, c_j — последовательности, $a_{i,j}$ — двойная последовательность.
Если для всех i, j $a_{i,j+1} \leq a_{i,j}$, и выполнено:

$$\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, "j\to\infty"] \arrow[d, "i\to\infty"'] & b_i \arrow[d, "i\to\infty"] \\
c_j \arrow[r, "j\to\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

То:

$$\begin{tikzcd}
a_{i,j} \arrow[r, shift left, "j\to\infty"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "i\to\infty"'] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, "i,j\to\infty"] & b_i \arrow[d, "i\to\infty"] \\
c_j \arrow[r, "j\to\infty"'] & A
\end{tikzcd}$$

Доказательства теорем I

Утверждение 1

Если $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$

Доказательство.

1. Зафиксируем натуральное число j_0, а также $\varepsilon > 0$
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то существует N такое, что для всех $j > N$ выполнено $a_{i_0,j} \in O_\varepsilon(b_{i_0})$. Выберем такое N.
3. Предъявим N и расфиксируем $\varepsilon > 0$. Таким образом, $a_{i_0,j} \to b_{i_0}$. Расфиксируем i_0. Таким образом, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$.

Теорема I.1 доказана

Утверждение 2

Пусть $i_k, j_k \to \infty$ — последовательности натуральных чисел, $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$. Тогда $\lim_{k\to\infty} a_{i_k,j_k} = A$

Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, то существует N такое, что для всех $i, j > N$ выполнено $a_{i,j} \in O_\varepsilon(A)$. Выберем такое N.
2. Так как $i_k, j_k \to \infty$, то существуют K_1, K_2 такие, что для всех $k > K_1$ выполнено $i_k > N$, а для всех $k > K_2$ выполнено $j_k > K_2$. Выберем такие K_1, K_2, и положим $K = max(K_1, K_2)$. Тогда при всех $k > K$ выполнено $i_k, j_k > N$.
3. И, следовательно, при всех $k > K$ выполнено $a_{i_k,j_k} \in O_\varepsilon(A)$. Предъявим K, и расфиксируем $\varepsilon > 0$. Таким образом, $a_{i_k,j_k} \to A$.

Теорема I.2 доказана.

Утверждение 3

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} \!\!\!\!\!\!\!\not\quad\;\; A$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \to +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} \not\to A$

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} \!\!\!\!\!\!\!\not\quad\;\; A$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого k существуют $i, j > k$ такие, что $a_{i,j} \notin O_\varepsilon(A)$. Выберем такое $\varepsilon > 0$.
2. Соответственно, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k > k$ такие, что для всех k выполнено $|a_{i_k,j_k} - A| > \varepsilon$. Также, так как $i_k, j_k > k$, то $i_k, j_k \to \infty$.
3. И, следовательно, $a_{i_k,j_k} \not\to A$.

Утверждение 4

Пусть $a_{i,j} \underset{i,j\to\infty}{\not\longrightarrow} A$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} \to B$, $B \neq A$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{i,j\to\infty}{\not\longrightarrow} A$, то, в соответствии с утверждением 3, существуют последовательности натуральных чисел n_s, m_s такие, что $a_{n_s,m_s} \not\to A$. Положим $x_s = a_{n_s,m_s}$.
2. Так как $x_s \not\to A$, то существует последовательность натуральных чисел $s_t \uparrow\uparrow +\infty$, такая что $x_{s_t} \to B$, $B \neq A$. Положим $y_t = x_{s_t} = a_{n_{s_t},m_{s_t}}$
3. Так как $n_s, m_s \to +\infty$, $s_t \to +\infty$, то также $n_{s_t}, m_{s_t} \to +\infty$. И, следовательно, существует последовательность натуральных чисел $t_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что $n_{s_{t_k}}, m_{s_{t_k}} \uparrow\uparrow +\infty$.
4. Положим $i_k = n_{s_{t_k}}, j_k = m_{s_{t_k}}$. Тогда $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$, $a_{i_k,j_k} = a_{n_{s_{t_k}},m_{s_{t_k}}} = y_{t_k} \to B$.

Теорема I.3 доказана.

Доказательства теорем I

Утверждение 5

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, j_k, i_k — последовательность натуральных чисел такие, что $j_k \to +\infty$, i_k — ограничена. Тогда выполнено $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$.

Доказательство.

1. i_k — ограничена, т.е. найдется натуральное m такое, что для всех k выполнено $i_k \leq m$. Выберем такое m.
2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
3. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то для каждого i найдётся N_i такое, что для всех $j > N_i$ выполнено $|a_{i,j} - b_i| < \varepsilon$. Выберем такие N_i.
4. Положим $N = max(N_1, \dots, N_m)$. Тогда при всех $j > N$ и при всех $i \leq m$ выполнено $|a_{i,j} - b_i| < \varepsilon$.
5. Так как $j_k \to \infty$, то существует K такое, что при всех $k > K$ выполнено $j_k > N$. Выберем такое K.
6. Таким образом, при всех $k > K$ выполнено $j_k > N$, $i_k < m$, и, следовательно, выполнено $|a_{i_k,j_k} - b_{i_k}| < \varepsilon$.
7. Предъявим K и расфиксируем $\varepsilon > 0$. Таким образом, $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$

Доказательства теорем I

Утверждение 6

Пусть i_k, j_k — последовательности натуральных чисел, $j_k \to +\infty$, $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$.

Тогда $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$
Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то существует N такое, что для всех $j > N$ и для всех i выполнено $|a_{i,j} - b_i| < \varepsilon$. Выберем такое N.
3. Так как $j_k \uparrow\uparrow +\infty$, то существует K такое, что для всех $k > K$ выполнено $j_k > N$. Выберем такое K.
4. Следовательно, при всех $k > K$ выполнено $|a_{i_k,j_k} - b_{i_k}| < \varepsilon$. Предъявим K, и расфиксируем $\varepsilon > 0$. Таким образом, $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$.

Утверждение 7

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел i_k, j_k такие, что $j_k \to \infty$, и выполнено $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для всех s существуют n, m такие, что $m > s$, и выполнено $|a_{n,m} - b_n| \geq \varepsilon$. Выберем такое $\varepsilon > 0$.
2. Соответственно, существуют последовательности натуральных чисел n_k, m_k такие, что для всех k выполнено $m_k > k$ и $|a_{n_k,m_k} - b_{n_k}| \geq \varepsilon$. Так как $m_s > s$, то $m_s \to +\infty$.
3. И, следовательно, $a_{n_s,m_s} - b_{n_s} \not\to 0$. Положим $x_s = a_{n_s,m_s} - b_{n_s}$.
4. Так как $x_s \not\to 0$, то существует последовательность натуральных чисел $s_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что $x_{s_k} = a_{n_{s_k},m_{s_k}} - b_{n_{s_k}} \to A$, $A \neq 0$.
5. Положим $i_k = n_{s_k}$, $j_k = m_{s_k}$. Так как $m_s \to +\infty$, $s_k \uparrow\uparrow +\infty$, то также $j_k \to +\infty$.
6. И, таким образом, $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$.

Утверждение 8

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, тогда $a_{i,j} - b_i \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда, в соответствии с утверждением 4, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$.
2. Так как $i_k, j_k \to \infty$, $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то, в соответствии с утверждением 6, выполнено $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$, что противоречит предположению.

Теорема I.4 доказана.

Утверждение 9

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $a_{i,j} - b_i \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$. Тогда $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$.

Доказательство.

1. Предположим обратное, т.е. $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$. Тогда, в соответствии с утверждением 7, существуют последовательности натуральных чисел i_k, j_k такие, что выполнено $j_k \to \infty$ и $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$. Положим $x_k = a_{i_k,j_k} - b_{i_k}$.
2. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $j_k \to \infty$ и $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \not\to 0$, то, в соответствии с утверждением 5, i_k — неограниченная последовательность.
3. Так как последовательность i_k неограничена, то существует последовательность натуральных чисел $k_s \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что $i_{k_s} \to +\infty$. Также, так как $j_k \to +\infty$, то и $j_{k_s} \to +\infty$.
4. Также выполнено $x_{k_s} = a_{i_{k_s},j_{k_s}} - b_{i_{k_s}} \to A$.
5. С другой стороны, так как $a_{i,j} - b_i \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$, то, в соответствии с утверждением 2, выполнено $a_{i_{k_s},j_{k_s}} - b_{i_{k_s}} \to 0$. Противоречие.

Теорема I.5 доказана.

Утверждение 10

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в соответствии с утверждением 9, выполнено $a_{i,j} - b_i \not\xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$.
2. Так как $a_{i,j} - b_i \not\xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$, то, в соответствии с утверждением 4, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$

Доказательства теорем II

Утверждение 11

Пусть $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ — последовательности натуральных чисел. Тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$, такая что выполнено $n_{i_k} = j_k$.

Доказательство.

1. При $1 \leq k \leq i_1$, положим $n_k = j_1$, при $i_{s-1} < k \leq i_s$ положим $n_k = j_s$. (для всех $s \geq 2$).
2. Тогда $n_{i_k} = j_k$. Также $n_k \uparrow +\infty$, так как $i_k \uparrow +\infty$ (по построению).

Доказательства теорем II

Утверждение 12

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$ такая, что выполнено $a_{k,n_k} - b_k \not\to 0$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в соответствии с утверждением 10, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to A$, $A \neq 0$.
2. Так как $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$, то, в соответствии с утверждением 11, существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow +\infty$, такая что выполнено $n_{i_k} = j_k$.
3. Положим $x_k = a_{i_k,j_k} - b_{i_k}$, $y_k = a_{k,n_k} - b_k$
4. Тогда $y_{i_k} = a_{i_k,n_{i_k}} - b_{i_k} = a_{i_k,j_k} - b_{i_k} = x_k$.
5. И, следовательно, так как $x_k \not\to 0$, то также и $y_k \not\to 0$.
6. Таким образом, $a_{k,n_k} - b_k \not\to 0$

Теорема II.1 доказана.

Доказательства теорем II

Утверждение 13

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существует последовательность натуральных чисел p_k такая, что для всех k и для всех $i > p_k$ выполнено $|a_{k,i} - b_k| < \frac{1}{k}$.

Доказательство.

1. Зафиксируем натуральное k.
2. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в частности, выполнено $\lim_{j\to\infty} a_{k,j} = b_k$
3. Так как $\lim_{j\to\infty} a_{k,j} = b_k$, то существует натуральное p такое, что для всех $i > p$ выполнено $|a_{k,i} - b_k| < \frac{1}{k}$.
4. Расфиксируем натуральное k. Для любого натурального k существует натуральное p такое, что для всех $i > p$ выполнено $|a_{k,i} - b_k| < \frac{1}{k}$.
5. Таким образом, существует последовательность натуральных чисел p_k такая, что для всех k и для всех $i > p_k$ выполнено $|a_{k,i} - b_k| < \frac{1}{k}$.

Доказательства теорем II

Утверждение 14

Пусть n_k, p_k — произвольные последовательности натуральных чисел. Тогда существует последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что для всех k выполнено $m_k > n_k$ и $m_k > p_k$.

Доказательство.

1. Положим $m_1 = max(n_1, p_1) + 1$
2. По индукции определим $m_{k+1} = max(n_k, p_k, m_k) + 1$
3. По построению $m_k \uparrow\uparrow +\infty$, $m_k > p_k$, $m_k > n_k$.

Доказательства теорем II

Утверждение 15

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, n_k — последовательность натуральных чисел. Тогда найдётся последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow +\infty$, такая что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - b_k \to 0$.

1. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в соответствии с утверждением 13, существует последовательность p_k такая, что для всех k и для всех $i > p_k$ выполнено $|a_{k,i} - b_k| < \frac{1}{k}$
2. В соответствии с утверждением 14, существует последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая что для всех k выполнено $m_k > n_k$ и $m_k > p_k$.
3. Зафиксируем натуральное k. Так как $m_k > p_k$, то $|a_{k,m_k} - b_k| < \frac{1}{k}$.
4. Расфиксируем k. Для всех k выполнено $|a_{k,m_k} - b_k| < \frac{1}{k}$. Следовательно, $a_{k,m_k} - b_k \to 0$

Теорема II.2 доказана.

Утверждение 16

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $n_k, m_k \to \infty$ — последовательности натуральных чисел. Тогда выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \to 0$

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то, в соответствии с утверждением 6, выполнено $a_{k,n_k} - b_k \to 0$.
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то, в соответствии с утверждением 6, выполнено $a_{k,m_k} - b_k \to 0$.
3. Следовательно, $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} = (a_{k,m_k} - b_k) - (a_{k,n_k} - b_k) \to 0$

Теорема II.3 доказана.

Утверждение 17

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$ такие, что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \not\to 0$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в соответствии с утверждением 12, существует последовательность $n_k \uparrow +\infty$ такая, что выполнено $a_{k,n_k} - b_k \not\to 0$.
2. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то, в соответствии с утверждением 15, существует последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow +\infty$ такая, что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - b_k \to 0$.
3. Следовательно, $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} = (a_{k,m_k} - b_k) - (a_{k,n_k} - b_k) \not\to 0$

Теорема II.4 доказана.

Утверждение 18

Пусть число A является частичным пределом последовательности x_k, n_k — произвольная последовательность натуральных чисел. Тогда существует последовательность $m_k \uparrow\uparrow +\infty$ такая, что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $x_{m_k} \to A$.

Доказательство.

1. Зафиксируем натуральное k
2. Так как A — частичный предел последовательности, то в множество $O_{\frac{1}{k}}(A)$ попадает бесконечное число членов последовательности.
3. В частности, найдётся номер m_k такой, что $m_k > n_k$ такой, что $x_{m_k} \in O_{\frac{1}{k}}(A)$
4. По построению, для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $x_{m_k} \to A$.

Утверждение 19

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $\lim_{j\to\infty} c_j = A$. Тогда $\lim_{i\to\infty} b_i = A$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, то, в соответствии с утверждением 13, существует последовательность натуральных чисел p_k такая, что для всех k и для всех $i > p_k$ выполнено $|a_{i,k} - c_k| < \frac{1}{k}$
2. Предположим обратное. Тогда последовательность b_i имеет частичный предел B, $B \neq A$. В соответствии с утверждением 18, существует последовательность n_k такая, что для всех k $n_k > p_k$, и выполнено $b_{n_k} \to B$.
3. И, следовательно, для всех k выполнено $|a_{n_k,k} - c_k| < \frac{1}{k}$.
4. Таким образом, $a_{n_k,k} - c_k \to 0$.
5. Так как $a_{n_k,k} - c_k \to 0$, $c_k \to A$, то выполнено $a_{n_k,k} \to A$.
6. С другой стороны, так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то, в соответствии с утверждением 6, выполнено $a_{n_k,k} - b_{n_k} \to 0$.
7. Так как $b_{n_k} \to B$, $a_{n_k,k} - b_{n_k} \to 0$, то выполнено $a_{n_k,k} \to B$.
8. $a_{n_k,k} \to A$, $a_{n_k,k} \to B$, $B \neq A$. Противоречие.

Доказательства теорем III

Утверждение 20

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $\lim_{i\to\infty} b_i = A$. Тогда $\lim_{j\to\infty} c_j = A$.

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, то, в соответствии с утверждением 15, найдётся последовательность натуральных чисел $m_k \uparrow +\infty$ такая, что выполнено $a_{m_k,k} - c_k \to 0$.
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то, в соответствии с утверждением 6, выполнено $a_{m_k,k} - b_{m_k} \to 0$.
3. Так как $m_k \uparrow +\infty$, $\lim_{i\to\infty} b_i = A$, то $b_{m_k} \to A$.
4. Так как $a_{m_k,k} - b_{m_k} \to 0$, $b_{m_k} \to A$, то $a_{m_k,k} \to A$.
5. Так как $a_{m_k,k} - c_k \to 0$, $a_{m_k,k} \to A$, то $c_k \to A$.

Утверждение 21

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$. Тогда существует действительное число A такое, что $\lim_{i\to\infty} b_i = A$.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $s_k, r_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $b_{s_k} - b_{r_k} \not\to 0$.
2. Положим $d_{k,m} = a_{s_k,m} - a_{r_k,m}$, $e_k = b_{s_k} - b_{r_k} \not\to 0$.
3. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, то для всех m выполнено $d_{k,m} = a_{s_k,m} - a_{r_k,m} \xrightarrow[k\to\infty]{} c_m - c_m = 0$. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, то для всех k выполнено $d_{k,m} = a_{s_k,m} - a_{r_k,m} \xrightarrow[m\to\infty]{} b_{s_k} - b_{r_k} = e_k$
4. Так как $d_{k,m} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $e_k \not\to 0$, то, в соответствии с утверждением 19, $d_{k,m} \underset{m\to\infty}{\not\rightrightarrows} e_k$. В соответствии с утверждением 10, существуют последовательности натуральных чисел $k_t, m_t \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $d_{k_t,m_t} - e_{k_t} \not\to 0$.
5. Однако, так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то $a_{s_{k_t},m_t} - b_{s_{k_t}} \to 0$, $a_{r_{k_t},m_t} - b_{r_{k_t}} \to 0$
6. И, следовательно, $d_{k_t,m_t} - e_{k_t} = (a_{s_{k_t},m_t} - b_{s_{k_t}}) - (a_{r_{k_t},m_t} - b_{r_{k_t}}) \to 0$. Противоречие.

Утверждение 22

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $b_i \to A$. Тогда $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда, в соответствии с утверждением 4, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $a_{i_k,j_k} \not\to A$.
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, то выполнено $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$.
3. Так как $b_i \to A$, то $b_{i_k} \to A$.
4. Так как $a_{i_k,j_k} - b_{i_k} \to 0$, $b_{i_k} \to A$, то $a_{i_k,j_k} \to A$. Противоречие.

Утверждение 23

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $c_j \to A$, где A — действительное число. Тогда $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$.

Доказательство.

1. Предположим обратное, т.е. $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\not\rightrightarrows} c_j$
2. Так как $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\not\rightrightarrows} c_j$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, то, в соответствии с утверждением 10, существуют последовательности натуральных чисел $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что выполнено $a_{i_k,j_k} - c_{j_k} \not\to 0$.
3. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, то, в соответствии с утверждением 2, выполнено $a_{i_k,j_k} \to A$
4. Так как $c_j \to A$, то $c_{j_k} \to A$.
5. Так как $a_{i_k,j_k} \to A$, $c_{j_k} \to A$, то $a_{i_k,j_k} - c_{j_k} \to 0$. Противоречие.

Доказательство теорем III

Утверждение 24

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$. Тогда существует действительное число A такое, что выполнено:

1) $\lim_{i\to\infty} b_i = A$
2) $\lim_{j\to\infty} c_j = A$
3) $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$
4) $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, то, в соответствии с утверждением 21, существует действительное число A такое, что $b_i \to A$. Пункт 1) доказан.
2. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $b_i \to A$, то, в соответствии с утверждением 20, выполнено $c_j \to A$. Пункт 2) доказан.
3. Так как $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $b_i \to A$, то, в соответствии с утверждением 22, выполнено $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$. Пункт 3) доказан.
4. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $c_j \to A$, то, в соответствии с утверждением 23, выполнено $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$. Пункт 4) доказан.

Теорема III.1 доказана

Утверждение 25

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $\lim_{i\to\infty} b_i = A$, $\lim_{j\to\infty} c_j = A$, $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, где A — действительное число. Тогда:
1) $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$
2) $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$

Доказательство.

1. Так как $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $c_j \to A$, то, в соответствии с утверждением 23, выполнено $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$. Пункт 2) доказан.
2. Пункт 1) следует в соответствии с утверждением 24, примененным к двойной последовательности $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Теорема III.2 доказана.

Доказательства теорем IV

Утверждение 26

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $\lim_{i\to\infty} b_i = A$, $\lim_{j\to\infty} c_j = A$, где A — действительное число, и для всех i, j выполнено $a_{i,j+1} \leq a_{i,j}$.
Тогда $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$.

Доказательство.

1. Отдельно отметим, что так как для каждого i $\lim_{j\to\infty} a_{i,j} = b_i$, и $a_{i,j} \downarrow$, то для всех i, j выполнено $b_i \leq a_{i,j}$.
2. Предположим обратное, т.е. $a_{i,j} \not\xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$. Тогда, в соответствии с утверждением 4, существуют последовательности $i_k, j_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $a_{i_k,j_k} \to B$, $B \neq A$.
3. Зафиксируем натуральное число m.
4. Так как $j_k \to \infty$, то существует N такое, что для всех $k > N$ выполнено $j_k > m$. Выберем такое N.
5. Тогда при всех $k > N$ выполнено $b_{i_k} \leq a_{i_k,j_k} \leq a_{i_k,m}$. Так как при $k \to \infty$ $b_{i_k} \to A$, $a_{i_k,j_k} \to B$, $a_{i_k,m} \to c_m$, то отсюда следует, что выполнено $A \leq B \leq c_m$
6. Расфиксируем m. При всех m выполнено $A \leq B \leq c_m$. Так как при $m \to \infty$ $c_m \to A$, то выполнено $A = B$. Противоречие.

Утверждение 27

Пусть $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[i\to\infty]{} c_j$, $\lim_{i\to\infty} b_i = A$, $\lim_{j\to\infty} c_j = A$, где A — действительное число, и для всех i, j выполнено $a_{i,j+1} \le a_{i,j}$.
Тогда:
1) $a_{i,j} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} A$.
2) $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$
3) $a_{i,j} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} c_j$
Доказательство.

1. Пункт 1) следует в соответствии с утверждением 26.
2. Пункты 2), 3) следуют в соответствии с утверждением 25.

Теорема IV.1 доказана.