

Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

© Н. М. Мусин

13.07.2023

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то пара (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t .

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что оно имеет единственное решение при $t = t_0$.

Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана; дзета-функция; нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then the pair (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t .

Considering one of that two equations one can found that it has a unique solution at $t = t_0$.

As nontrivial zeros are symmetric about the line $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis; zeta function; nontrivial zeros.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.
 $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел.

Известно [1], что при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \quad (2)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси σ , поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1, t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

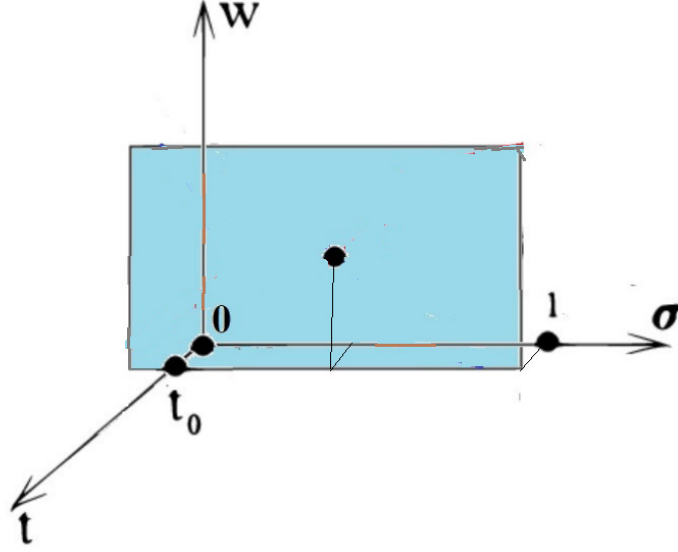


Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$

$$v_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$

$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2},$$

$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}.$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0, t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной σ . Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция переменной σ .*

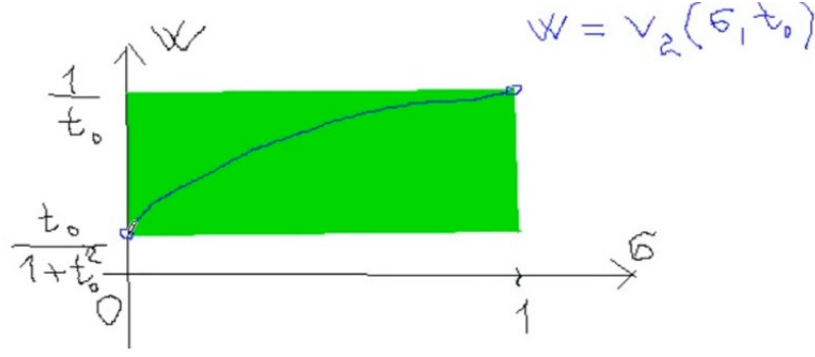


Рис. 2: Критический прямоугольник

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.$$

□

Следствие. Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Определение 1. Прямоугольник $\{(\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U\}$ будем называть критическим прямоугольником.

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если σ - критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2. Функция $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ убывает по σ на интервале $(0; 1)$.

Доказательство. Справедливость леммы следует из равенства

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}. \quad (5)$$

□

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что графики функций

$$w = v_2(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma - 1)^2 + t_0^2} \text{ и } w = \hat{v}_1(\sigma, t_0) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$$

пересекаются в единственной точке с абсциссой $\sigma = \frac{1}{2}$.

Графики этих функций на плоскости (σ, w) симметричны относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, так как имеет место равенство

$$v_2(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma - 1)^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(1 - \sigma, t_0). \quad (6)$$

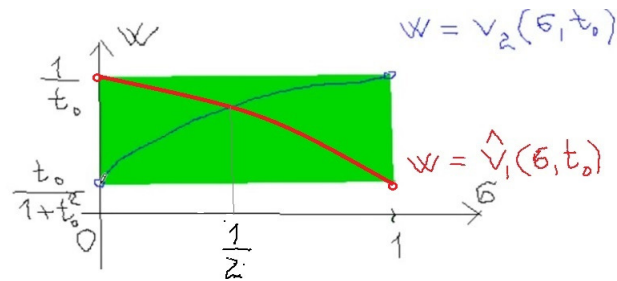


Рис. 3: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

Имеет место равенство $v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2}$.

Из равенства (6) следует, что $\hat{v}_1(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2} = v_1(\sigma_0, t_0)$.

Как известно, в комплексной плоскости (σ, t) , если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции.

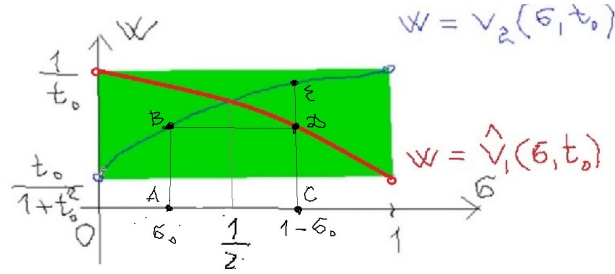


Рис. 4: Графики $\hat{v}_1$ и v_2

Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$, то есть $v_1(1 - \sigma_0, t_0) = v_2(1 - \sigma_0, t_0)$.

Но ведь $v_2(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$.

Значит, $v_1(\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(\sigma_0 - 1)^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$.

Следовательно, $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

□

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

- [1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.
- [2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.
- [3] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.