НЕМНОГО ОБ УПРАВЛЕНИИ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

И.В.Коннов

Казань, эл.почта: konn-igor@ya.ru

Построение математической модели для реальной системы представляет собой очень трудную, многостороннюю и нетривиальную задачу. Поэтому в качестве основы часто берут уже известные базовые математические задачи, которые успешно применялись для частных случаев или в близких прикладных областях. Однако такой подход не избавляет от необходимости проверки адекватности построенных подобным образом моделей. Вопреки очень распространенному в среде математиков мнению, ни применение более сложного математического аппарата, ни использование более общих предположений не сделают модель адекватной, если структура модели не соответствует структуре реальной системы в рамках предполагаемых для решения задач, связанных с этой системой. В статьях [1] и [2] обсуждаются некоторые общие принципы построения математических моделей, в том числе для наиболее сложных систем, способных менять свою реакцию, а также состояние, в зависимости от управляющих воздействий и состояния внешнего окружения. Тогда приходится корректировать надлежашим образом понятия решения и оптимального управления. Например, если система включает активные подсистемы (элементы) со своими интересами и наборами действий, то одной из приемлемых базовых математических задач могут служить задачи теории игр и использоваться ситуации равновесия. В этом случае требуется провести выбор наиболее приемлемой из таких ситуаций равновесия.

В настоящей статье на очень простых примерах разбираются некоторые конкретные трудности, возникающие при попытках построить модели таких систем. Это упрощение дано только для наглядности изложения и не значит, что приводятся действительные модели реальных систем. Тем не менее, понимание этих трудностей значительно обогатит арсенал используемых средств.

Типичной и очень распространенной ошибкой моделирования и анализа сложных систем является попытка их аппроксимации статичными (простыми) системами и использованием таких же простых моделей. Приведем элементарный пример.

Пусть имеется фирма, выпускающая два товара, для этого используется один вид ресурса. На рассматриваемый период общий объем запаса ресурса не должен превосходить двух единиц. Вектор (u_1, u_2) определяет объемы выпуска продукции. Пусть по технологии производство единицы каждого товара требует единицы ресурса. Имеем множество допустимых выпусков

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u_1 + u_2 \leq 2,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \right\}.$$

Фирма естественно стремится к максимальной стоимости проданных товаров, т.е. к максимизации выражения

$$c_1 u_1 + c_2 u_2$$

на допустимом множестве U, если заранее известны цены c_1 и c_2 на товары на этот период. Тогда наилучшие объемы выпуска $u^\star$ будут определяться формулой

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_1 > c_2 & \Longrightarrow & u^\star = (2, 0), \\ c_1 \leq c_2 & \Longrightarrow & u^\star = (0, 2). \end{array} \right.$$

В данном примере цены не меняются (т.е. реакция потребителей на выпуск не меняется). Это статичная (простая) система.

Пусть теперь цены на товары зависят от объемов их выпусков из-за реакции потребителей следующим образом:

$$c_1(u_1) = 2 - u_1,\ c_2(u_2) = 2 - u_2.$$

Иначе говоря, чем больше предложение, тем ниже цена. Таким образом, исходную систему можно считать сложной, поскольку реакция элементов зависит от значений выпусков (управлений). Если проигнорировать этот факт и выбирать оптимальные выпуски на основе текущих состояний, то при текущих ценах $c_1 < c_2$ получим оптимальные объемы $(0, 2)$, им соответствуют цены $(2, 0)$ и доход 0. Если снова выбрать оптимальные выпуски $(2, 0)$ на основе текущих цен, то снова система придет к ценам $(0, 2)$ и доходу 0. Таким образом, «оптимальное» управление по неадекватной модели швыряет систему из угла в угол и обратно, в принципе до бесконечности. При этом фирма не получает вовсе никакого дохода.

В правильной модели необходимо учитывать будущую реакцию системы на управление, т.е. данная система должна считаться сложной и решать задачу равновесия. Задача тогда эквивалентна вариационному неравенству: найти точку $u^* \in U$, такую что она максимизирует выражение

$$c_1(u_1^*)u_1 + c_2(u_2^*)u_2$$

на допустимом множестве U. Эта задача имеет единственное решение $u^* = (1, 1)$, поскольку в этом случае устанавливаются цены $c = (1, 1)$, и те же объемы являются для них оптимальными с доходом 2.

Другая трудность связана с неустойчивостью оптимальных для системы состояний к возмущениям из-за действий отдельных элементов.

Пусть имеется фирма, выпускающая всего один товар, который продается на рынке, причем цена на него p также зависит от объема предложения t из-за реакции потребителей, т.е. $p = p(t)$. Если для упрощения исключить издержки производства и ограничить сверху выпуски величиной 1, то наилучший объем t^* будет максимизировать функцию дохода

$$\varphi(t) = tp(t)$$

на отрезке $[0, 1]$. Если при этом $t^* < 1$, то можно взять $t^e = 1 > t^*$, и тогда

$$t^e p(t^*) = p(t^*) > \varphi(t^*).$$

Иначе говоря, если система достаточно инерционна, то фирма может увеличить выпуск и получить еще больший доход. С другой стороны,

$$\varphi(t^e) = t^e p(t^e) \le t^* p(t^*) = \varphi(t^*),$$

но при этом отклонение от выпуска $t^e = 1$ невыгодно, поскольку

$$tp(t^e) \le t^e p(t^e) = \varphi(t^e)$$

для любого t из $[0, 1]$. Поэтому состояние t^e более устойчиво, чем t^*, хотя и может давать меньший доход. Например, если функция цены $p(t) = 3 - 2t$, то $t^* = 3/4 < 1$, а $t^e = 1$, тогда

$$t^* p(t^*) = 9/8 > t^e p(t^e) = 1.$$

Эта модель выглядит нереалистично и слишком просто, фирма может явно вычислить выпуск с наибольшим доходом и фиксировать его, но вопрос в том, как хорошо руководство фирмы оценивает реакцию потребителей.

Пусть теперь тот же товар выпускают n фирм, товар продается на рынке, цена на него p также зависит от объема предложения, т.е. $p = p(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Если для упрощения также исключить издержки производства и ограничить сверху выпуск t_i каждой i-й фирмы величиной $1/n$, то общий объем выпуска будет ограничен сверху величиной 1. Каждая фирма будет стремиться максимизировать свою функцию дохода

$$\varphi_i(t) = t_i p(t)$$

на отрезке $[0, 1/n]$, где $p(t) = \tilde{p}(\tau)$, общий выпуск

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

При этом вектор наилучших объемов $t^* = (t_1^*, \ldots, t_n^*)$ можно найти как решение одномерной задачи максимизизации общей функции дохода

$$\varphi(\tau) = \tau \tilde{p}(\tau)$$

на отрезке $[0, 1]$. Если ее решение τ^*, тогда, очевидно, $t_i^* = \tau^*/n$ для любого i. Например, если как выше взять функцию цены $\tilde{p}(\tau) = 3 - 2\tau$, то $\tau^* = 3/4 < 1$, и $t_i^* = 3/(4n)$ для любого $i = \overline{1,n}$. Если при этом взять $t_i = 1/n > t_i^*$, то

$$\tau\tilde{p}(\tau^*) = \tilde{p}(\tau^*) = 3/2 > 9/8 = \tau^*\tilde{p}(\tau^*).$$

Иначе говоря, фирмы могут отклониться от выпусков t_i^* и получить еще больший доход. Но отклонение всех фирм будет замечено потребителями, а отклонение одной фирмы может пройти незамеченным ими. Тогда только эта фирма получит больший доход, поскольку

$$t_i\tilde{p}(\tau^*) = 3/(2n) > 9/(8n) = t_i^*\tilde{p}(\tau^*).$$

В итоге состояние t^* будет неустойчивым. Для устойчивости к таким отклонениям надо определить состояние $t^e = (t_1^e, \ldots, t_n^e)$, такое что

$$t_i p(t^e) \le t_i^e p(t^e)$$

для любого t_i из $[0, 1/n]$ и любого $i = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что $t_i^e = 1/n$ и любого $i = \overline{1,n}$, но

$$\tau^e p(t^e) = 1 < 9/8 = \tau^* p(t^*)$$

и

$$t_i^e p(t^e) = 1/n < 9/(8n) = t_i^* p(t^*) \text{ для любого } i = \overline{1,n}.$$

Здесь

$$\tau^e = \sum_{i=1}^{n} t_i^e.$$

Поэтому состояние t^e более устойчиво, чем t^*, хотя и может давать меньший доход.

Кроме того, фирмы сами могут учитывать отклонения друг друга. В качестве модели системы тогда можно взять бескоалиционную игру n лиц, в которой каждый i-й игрок имеет множество стратегий $[0, 1/n]$ и функцию выигрыша φ_i. В этих условиях устойчивые состояния определяются как равновесия по Нэшу; см., например, [3]. Обозначим для краткости $(t_{-i}, s_i) = (t_1, \ldots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ – набор t, в котором компонента t_i заменена на s_i. Для такого состояния $t^a = (t_1^a, \ldots, t_n^a)$ имеем

$$\varphi_i(t^a) \geq \varphi_i(t^a_{-i}, t_i), \quad \forall t_i \in [0, 1/n], \quad i = \overline{1,n}.$$

В состоянии равновесия ни одной из фирм по отдельности невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии, если другие придерживаются своих стратегий. С другой стороны, при выгодности отдельная фирма отклонится от своей текущей стратегии.

Если пренебречь ограничениями, то при вогнутости функции φ_i по t_i условия равновесия можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{\partial \varphi_i(t')}{\partial t_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Если как выше взять функцию цены $\tilde{p}(\tau) = 3 - 2\tau$, то

$$\varphi_i(t) = t_i \left(3 - 2\sum_{j=1}^{n} t_j\right),$$

свойство вогнутости выполняется. Получаем систему

$$\sum_{j=1}^{n} t'_j + 2t'_i = 3/2, \quad i = \overline{1,n},$$

с решением $t'_i = 3/(2(n+2))$, $i = \overline{1,n}$. Считая $n > 4$, получим $t'_i > 1/n$, поэтому $t_i^a = 1/n$, $i = \overline{1,n}$. В самом деле, $\varphi_i(t^a) = 1/n$, но

$$\varphi_i(t^a_{-i}, t_i) = t_i \left(1 + 2(1/n - t_i)\right) \leq 1/n \quad \forall t_i \in [0, 1/n].$$

Здесь векторы t^e и t^a совпадают, но в общем случае могут различаться. Состояние t^a более устойчиво и в этом смысле, чем t^*, но может давать меньший доход.

Отсюда также можно сделать вывод, что координация действий участников, как правило, приводит к лучшим результатам, чем в случае их децентрализованных или независимых действий. В примере выше это значит, что

$$\varphi(\tau^*) = \sum_{i=1}^{n} t_i^* \varphi_i(t^*) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i^e \varphi_i(t^e)$$

и
$$\sum_{i=1}^{n} t_i^* \varphi_i(t^*) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i' \varphi_i(t'),$$
как правило, неравенства строгие. Но координация действий возможна либо по требованию центра системы, либо по специальному соглашению. Саму разницу между левой и правой частью неравенства можно назвать дефектом децентрализации или дефектом рынка для экономики. Поскольку такое название бросает тень на свободный рынок, который является краеугольным камнем многих современных экономических теорий, вместо него обычно используют странный, но идеологически выдержанный термин: цена анархии.

В свою очередь, применение централизованной схемы управления может столкнуться с другими проблемами, которые должны быть приняты во внимание. Например, возьмем двухуровневую систему, состоящую из центра и n подсистем (предприятий), которые получают от центра общий ресурс и производят различные продукты, получая при этом доход. Задача центра состоит в распределении b единиц общего ресурса, так чтобы максимизировать общую прибыль
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$$
при ограничениях
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n},$$
где $\varphi_i(x_i)$ – прибыль i-й подсистемы после получения ресурса x_i. Проблема может состоять в том, что подсистемы могут сообщать центру неверные данные о функциях φ_i из-за различия интересов с центром, чтобы увеличить долю своего ресурса за счет других. Пусть для упрощения
$$\varphi_i(x_i) = \sigma_i + \tau_i x_i - 0.5 x_i^2,\ \sigma_i \geq 0,\ \tau_i > 0,\ i = \overline{1,n}.$$
Тогда наилучший объем ресурса только i-й подсистемы $\bar{x}_i$ можно найти из условия
$$\varphi_i'(\bar{x}_i) = \tau_i - \bar{x}_i = 0,$$

т.е. $\bar{x}_i = \tau_i$. Считая, что $\tau_i \ll b$, получим, что $\bar{x}_i$ есть решение задачи максимизации функции прибыли i-й подсистемы $\varphi_i(x_i)$ на отрезке $[0, b]$. Для решения задачи центра системы можно снять ограничения $x_i \geq 0$ и записать условия оптимальности:

$$\varphi_i'(\tilde{x}_i) = \tau_i - \tilde{x}_i = \lambda,\ i = \overline{1, n},\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = b.$$

Отсюда имеем

$$\lambda = \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_j - b \right) / n$$

и

$$\tilde{x}_i = \bar{x}_i - \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j - b \right) / n,\ i = \overline{1, n}.$$

Если теперь $\tilde{x}_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, то получено решение задачи центра системы.

Отметим, что в нетривиальном случае здесь $\lambda > 0$, так что $\tilde{x}_i < \bar{x}_i$ и подсистемы будут стремиться увеличить долю своего ресурса от $\tilde{x}_i$. Предположим, что k-я подсистема сообщит центру значение коэффициента $\tau_k' = \tau_k + \delta$, $\delta > 0$, вместо τ_k, т.е. укажет лучшую функцию прибыли. Тогда k-я подсистема получит вместо $\tilde{x}_k$ долю

$$x_k' = \tau_k + \delta - \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_j - b \right) / n - \delta / n = \tilde{x}_k + (1 - 1/n)\, \delta > \tilde{x}_k,$$

что приведет к увеличению ее прибыли, за счет снижения общесистемной. В итоге потребуются дополнительные затраты системы на проведение проверок предприятий. Еще одной проблемой централизованной схемы управления является необходимость обработки и учета больших объемов данных. В описанной выше двухуровневой системе это конкретные особенности технологии работы отдельных предприятий. Кроме того, эти данные надо постоянно передавать между центром и предприятиями, что потребует дополнительных затрат. Для сокращения объемов используемой информации обычно применяются методы декомпозиции; см., например, [4]. Однако при этом проверки корректности используемых предприятиями данных станут еще сложнее.

Кроме того, по стандартному подходу теории принятия решений считается, что всегда можно сделать наилучший выбор управления системой в условиях неопределенности, если построить достаточно сложную модель. В то же время текущих знаний о системе может быть недостаточно для того, чтобы найти полное наилучшее решение, соответствующее переводу системы в наилучшее состояние по какому-то выбранному критерию. В том случае, когда только некоторые ограниченные наборы достоверной информации о цели и ограничениях могут быть известны в каждом состоянии системы, решения будут сами зависеть от текущего состояния системы. Соответствующая модификация понятия решения была предложена в [5].

Для упрощения рассмотрим задачу нахождения оптимального состояния системы для случая, когда представление цели зависит от текущего состояния. При текущем состоянии x можно оценить значение целевой функции в состоянии y как $f(x, y)$. Можно предположить, что $f(x, x)$ дает довольно точную оценку, но значение $f(x, y)$ может отличаться от $f(y, y)$, т.е. оценки состояния y в состоянии y. Кроме того, значение $f(y, y)$ неизвестно в состоянии x. По этой причине выбор состояния по максимальному значению функции f на заданном допустимом множестве D здесь не кажется подходящим. Вместо этого можно применить равновесный принцип выбора состояния на основе задачи относительной оптимизации: найти точку $x^* \in D$ такую, что

$$f(x^*, x^*) \geq f(x^*, y) \quad \forall y \in D.$$

Это означает, что допустимое состояние x^* дает максимальное значение функции цели по сравнению со всеми другими возможными состояниями, оцениваемыми в текущем состоянии x^*.

Приведем пример, показывающий необходимость применения задач относительной оптимизации. Возьмем промышленную систему, которая может использовать n технологий производства различных продуктов. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор уровней интенсивности технологий, определяющий состояние системы. Обозначим через D множество допустимых уровней интенсивности. Для оценки состояния x используются m различных факторов, которые могут включать как объемы производства продуктов, так и социальные и инфраструктурные показатели. В результате получается векторная оценка $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots \varphi_m(x))$. Требуется максимизировать вектор $\varphi(x)$ на множестве D. Обычно понятие решения в этом случае определяется на основе подходящего отношения предпочтения в пространстве критериев. Наиболее популярным является отношение предпочтения по Парето (см., например, [6]), но множество Парето-оптимальных точек может оказаться слишком широким, чтобы представлять решения. Для отбора лучшего Парето-оптимального решения часто используют свертку критериев, т.е. назначают их веса

$$\lambda_i > 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

вместо векторной задачи решают задачу максимизации с одним критерием

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$$

и допустимым множеством D. Недостатком этого подхода является трудность назначения весов λ_i, поскольку целевые функции f_i могут быть совершенно разнородными. Более того, в приведенном примере веса могут зависеть от текущего состояния, поскольку переход от одного состояния к другому может потребовать реорганизации производства, введения нового оборудования. Самое главное, за время перехода может измениться отношения к важности факторов. Поэтому вектор весов $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots \lambda_m(x))$ в состоянии x может быть неизвестен в других состояниях. Тогда следует определить бифункцию

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i(y)$$

и решать указанную выше задачу относительной оптимизации. Конечно, эта задача выглядит сложнее обычной, но зато точнее отражает свойства реальной системы.

Пусть, например, $n = 2$, $m = 5$, $D = [0, 4] \times [0, 2]$,

$$\varphi_i(x) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \beta_i,\ i = \overline{1, 5}.$$

Если взять

$$\begin{array}{rcl}
(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_1) & = & (1, -1, 2), \\
(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_2) & = & (-1, 1, 0), \\
(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \beta_3) & = & (1, 1, -1), \\
(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \beta_4) & = & (-2, 1, -1), \\
(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \beta_5) & = & (1, -2, -2);
\end{array}$$

то в состоянии $x' = (1, 1)$ при

$$\lambda(x') = (1, 2, 1, 2, 1)$$

получим

$$f(x', y) = -3y_1 + 2y_2 - 3,$$

отсюда для точки $\tilde{x} = (0, 2)$ имеем

$$f(x', x') = -4 < 1 = f(x', \tilde{x}),$$

т.е. x' – не решение задачи относительной оптимизации. Но в состоянии $x'' = (4, 0)$ при

$$\lambda(x'') = (2, 1, 2, 1, 2)$$

получим

$$f(x'', y) = 3y_1 - 2y_2 - 3.$$

Отсюда

$$f(x'', x'') = 9 \geq f(x'', y) \quad \forall y \in D,$$

т.е. x'' – решение задачи относительной оптимизации.

Список литературы

[1] Коннов И.В. Немного о моделях // Препринт от 22.06.2020. http://dx.doi.org/10.24108/preprints-3111972

[2] Коннов И.В. Немного о моделях децентрализованных систем // Препринт от 3.02.2022. https://preprints.ru/article/685

[3] Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984.

[4] Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. – М.: Наука, 1981.

[5] Konnov I.V. Equilibrium formulations of relative optimization problems // Mathematical Methods of Operations Research. - 2019. - V. 90, №1. - P.137–152.

[6] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.