Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

06.08.2023

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то пара (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что оно имеет единственное решение при $t = t_0$.

Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\mathrm{Re}\, s = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then the pair (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t.

Considering one of that two equations one can found that it has a unique solution at $t = t_0$.

As nontrivial zeros are symmetric about the line $\mathrm{Re}\, s = \dfrac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.
$\mathbb{N}_0$ - множество неотрицательных целых чисел.

Известно [1], что при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \tag{1}$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)\right), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси σ, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

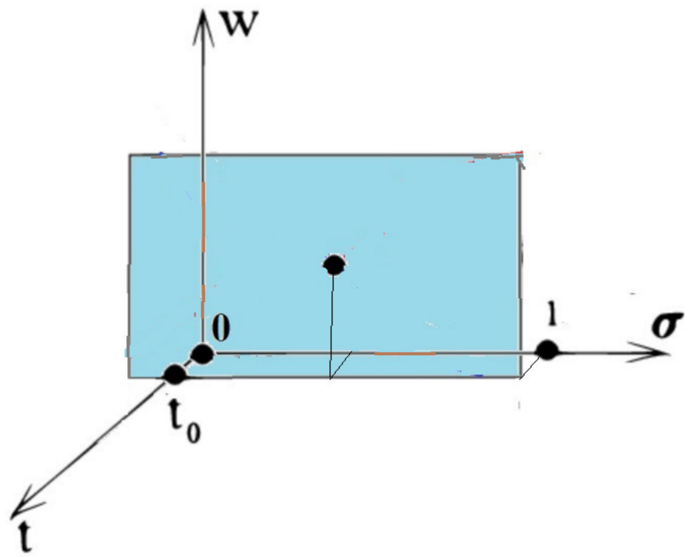

Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$
$$v_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$
$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2},$$
$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}.$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0, t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной σ. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

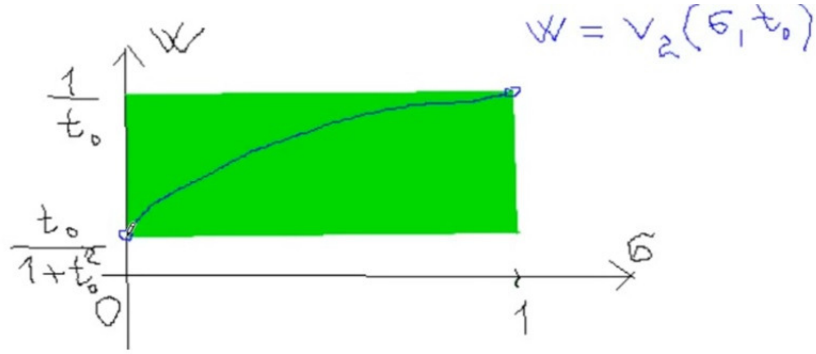

Рис. 2: Критический прямоугольник

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{((\sigma-1)^2+t_0^2)^2} > 0.$$

□

Следствие. *Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0;1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$.*

Определение 1. *Прямоугольник $\left\{(\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0;1), w \in U\right\}$ будем называть критическим прямоугольником.*

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если σ - критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим $\Re[a,b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$.

Нам будет полезна [3, с. 347]

Теорема (первая теорема о среднем для интеграла)**.** *Пусть $f, g \in \Re[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если функция g неотрицательна (или неположительна) на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m, M].$$

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2. *Функция $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ убывает по σ на интервале (0; 1).*

Доказательство. Справедливость леммы следует из равенства

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}. \tag{5}$$

□

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Как известно, в комплексной плоскости (σ, t), если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1-\sigma_0+it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции.

То есть, если пара (σ_0, t_0) является решением уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже будет решением этого же уравнения.

При этом точка $A(\sigma_0, v_2(\sigma_0, t_0))$ имеет ординату $v_2(\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(1-\sigma_0)^2 + t_0^2}$, а точка $B(1 - \sigma_0, v_2(1 - \sigma_0, t_0))$ имеет ординату $v_2(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$

Допустим, что $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$. Полагаем для определённости, что $\sigma_0 < \frac{1}{2}$. Тогда точка A лежит ниже графика функции $\hat{v}_1(\sigma_0, t_0)$, а точка B - выше.

Согласно первой теореме о среднем для интеграла, найдутся такие $\alpha, \beta \in [0; 1]$, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx = \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 + \sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx =$$
$$= \alpha \frac{1}{\sigma} + \alpha \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}. \tag{6}$$

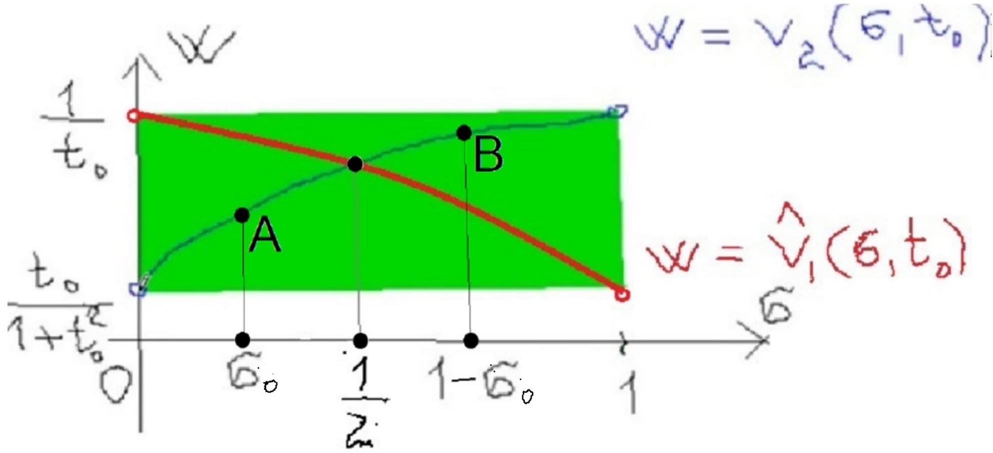

Рис. 3: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}(1+\sin(t_0\ln x))dx=\beta\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx+\int\limits_1^{+\infty}\{x\}\,\frac{\sin(t_0\ln x)}{x^{\sigma+1}}dx=\beta\frac{1}{\sigma}+\int\limits_1^{+\infty}\{x\}\,\frac{\sin(t_0\ln x)}{x^{\sigma+1}}dx. \tag{7}$$

Приравнивая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha\frac{1}{\sigma}+\alpha\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}=\beta\frac{1}{\sigma}+\int\limits_1^{+\infty}\{x\}\,\frac{\sin(t_0\ln x)}{x^{\sigma+1}}dx,$$

отсюда получаем

$$\int\limits_1^{+\infty}\{x\}\,\frac{\sin(t_0\ln x)}{x^{\sigma+1}}dx=(\alpha-\beta)\frac{1}{\sigma}+\alpha\frac{t_0}{\sigma^2+t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma,t_0)=(\alpha-\beta)\frac{1}{\sigma}+\alpha\hat{v}_1(\sigma,t_0). \tag{8}$$

1. $\alpha-\beta<0$. Так как $v_1(\sigma,t_0)>0$, из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma,t_0)<\alpha\hat{v}_1(\sigma,t_0)\leqslant\hat{v}_1(\sigma,t_0)$. Но это означает, что график функции v_1 лежит ниже графика функции $\hat{v}_1$, но тогда и точки A и B лежали бы ниже графика функции $\hat{v}_1$, но, как было указано ранее, они должны лежать по разные стороны этого графика.

2. $\alpha-\beta=0$. Так как $v_1(\sigma_0,t_0)>0$, из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma,t_0)\leqslant\alpha\hat{v}_1(\sigma,t_0)\leqslant\hat{v}_1(\sigma,t_0)$. При $\alpha<1$ ситуация такая же, как в случае 1. При $\alpha=1$ должно выполняться и равенство $\beta=1$. Но тогда выполнялось бы и равенство $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx$

3. $\alpha - \beta > 0$. В случае с точкой A получаем

$$(\alpha - \beta)\frac{1}{\sigma_0} + \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1-\sigma_0)^2 + t_0^2}, \tag{9}$$

значит, $\dfrac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} < \dfrac{t_0}{(1-\sigma_0)^2 + t_0^2}$, откуда следует, что $\sigma_0 > \dfrac{1}{2}$. Но мы рассматривали случай, когда точка A имеет изначально абсциссу $\sigma_0 < \dfrac{1}{2}$. Противоречие. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

Следствие. $v_1(\sigma, t_0) = \hat{v}_1(\sigma, t_0)$.

Доказательство. Итак, $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$. Подставляя в уравнение 9, получаем $\alpha - \beta = 0$. Значит, $v_1(\sigma, t_0) = \alpha\hat{v}_1(\sigma, t_0)$, но тогда $\alpha\hat{v}_1(\sigma_0, t_0) = v_1(\sigma_0, t_0)$, то есть $\alpha\dfrac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} = \dfrac{t_0}{(1-\sigma_0)^2 + t_0^2}$. Но ведь $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$, подставляя это значение в полученное равенство, получаем $\alpha = 1$. $\square$

Полученное следствие имеет очень важный геометрический смысл (рис. 3): график функции v_1 совпадает с графиком функции $\dfrac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$ и, значит, убывает, в то время как график функции v_2 возрастает, и они могут пересечься лишь в точке с абсциссой $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.

[2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.

[3] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.