

Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

© Н. М. Мусин

09 августа 2023

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то пара (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t .

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что оно имеет единственное решение при $t = t_0$.

Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then the pair (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t .

Considering one of that two equations one can found that it has a unique solution at $t = t_0$.

As nontrivial zeros are symmetric about the line $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, $x \in \mathbb{R}$ – действительная переменная.
 $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел.

Известно [1], что при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \quad (2)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси σ , поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1, t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

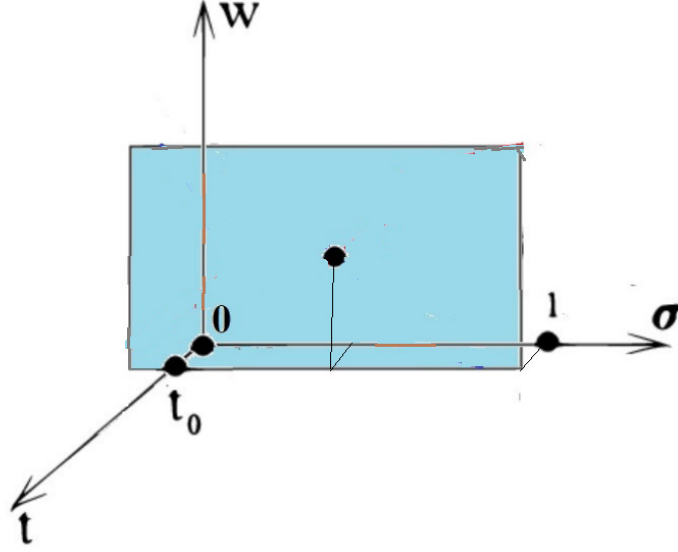


Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$\begin{aligned}
 u_1(\sigma, t) &= \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx, \\
 v_1(\sigma, t) &= \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx, \\
 u_2(\sigma, t) &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, \\
 v_2(\sigma, t) &= \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара (σ_0, t_0) является решением системы (4) и, в частности, уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной σ . Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ .*

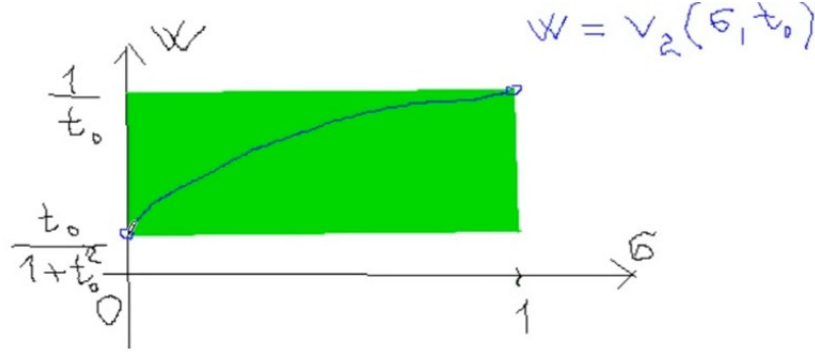


Рис. 2: Критический прямоугольник

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.$$

□

Следствие. Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Определение 1. Прямоугольник $\{(\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U\}$ будем называть критическим прямоугольником.

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. Значение переменной σ , при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ , т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Если σ - критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим $\mathfrak{R}[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$.

Нам будет полезно следствие из следующей теоремы [3, с. 347]:

Теорема (первая теорема о среднем для интеграла). Пусть $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Если функция g неотрицательна (или неположительна) на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m, M].$$

Следствие. Пусть условия теоремы о среднем выполняются для любого

$b \in [a, +\infty)$, существует такое вещественное B , что $\int_a^b g(x)dx > 0$ при всех $b > B$,

существуют несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} g(x)dx, \text{ где } \alpha \in [m, M].$$

Доказательство. Согласно теореме о среднем

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu(b) \text{ при } b > B, \text{ где } \mu(b) \in [m, M].$$

Так как несобственные интегралы существуют, то при $b \rightarrow +\infty$ существует предел левой части, а значит, существует и $\alpha = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mu(b)$. Так как $\mu(b) \in [m, M]$ при $b \in [B, +\infty]$, то и $\alpha \in [m, M]$. $\square$

Лемма 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим $F(x)$ первообразную функции $\frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\alpha \ln x} d \ln x = |u = \ln x| = \int \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} du = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \int \sin(t_0 u) de^{-\alpha u} = -\frac{1}{\sigma} \left(\sin(t_0 u) e^{-\alpha u} - \int e^{-\alpha u} d \sin(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} + \\ &+ \frac{t_0}{\sigma} \int e^{-\alpha u} \cos(t_0 u) du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} + \frac{t_0}{\sigma} \int -\frac{1}{\sigma} \cos(t_0 u) de^{-\alpha u} = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} - \\ &- \frac{t_0}{\sigma^2} \left(\cos(t_0 u) e^{-\alpha u} - \int e^{-\alpha u} d \cos(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 u) e^{-\alpha u} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 u) e^{-\alpha u} du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 \ln x) e^{-\alpha \ln x} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 \ln x) e^{-\alpha \ln x} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\alpha \ln x} d \ln x = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x). \end{aligned}$$

Получили равенство $F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x)$, следовательно,

$$F(x) + \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha}.$$

Итак, $\frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha}.$

Далее,

$$\left. \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) \right|_1^{+\infty} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\alpha} \Big|_1^{+\infty} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\alpha} \Big|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2},$$

отсюда следует, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = F(x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

□

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2 означает, что

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Как известно, в комплексной плоскости (σ, t) , если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции.

То есть, если пара (σ_0, t_0) является решением уравнения $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то пара $(1 - \sigma_0, t_0)$ тоже будет решением этого же уравнения.

При этом точка $A(\sigma_0, v_2(\sigma_0, t_0))$ имеет ординату $v_2(\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}$, а точка $B(1 - \sigma_0, v_2(1 - \sigma_0, t_0))$ имеет ординату $v_2(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$. Допустим, что $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$. Полагаем для определённости, что $\sigma_0 < \frac{1}{2}$. Тогда точка A лежит ниже графика функции $\hat{v}_1(\sigma_0, t_0)$, а точка B - выше. Согласно следствию из первой теоремы о среднем для интеграла, найдутся такие $\alpha, \beta \in [0; 1]$, что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx &= \alpha \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &= \alpha \frac{1}{\sigma} + \alpha \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

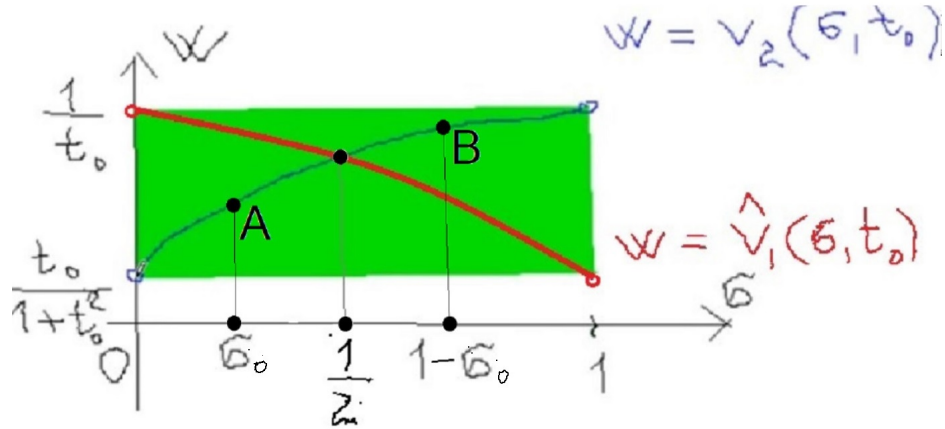


Рис. 3: Пересечение графиков $\hat{v}_1$ и v_2

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx = \beta \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \beta \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx. \quad (7)$$

Приравнивая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha \frac{1}{\sigma} + \alpha \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \beta \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx,$$

отсюда получаем

$$\int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = (\alpha - \beta) \frac{1}{\sigma} + \alpha \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0) = (\alpha - \beta) \frac{1}{\sigma} + \alpha \hat{v}_1(\sigma, t_0). \quad (8)$$

1. $\alpha - \beta < 0$. Так как $v_1(\sigma, t_0) > 0$, из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma, t_0) < \alpha \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$. Но это означает, что график функции v_1 лежит ниже графика функции $\hat{v}_1$, но тогда и точки A и B лежали бы ниже графика функции $\hat{v}_1$, но, как было указано ранее, они должны лежать по разные стороны этого графика.

2. $\alpha - \beta = 0$. Так как $v_1(\sigma_0, t_0) > 0$, из равенства 8 следует, что $v_1(\sigma, t_0) \leq \alpha \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$. При $\alpha < 1$ ситуация такая же, как в случае 1. При $\alpha = 1$ должно выполняться и равенство $\beta = 1$. Но тогда выполнялось бы и равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx.$$

3. $\alpha - \beta > 0$. Очень хороший случай, функция $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ убывает, функция $v_2(\sigma, t_0)$ возрастает, их графики в случае пересечения имеют только одну общую точку, при

этом её абсцисса $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, иначе общих точек было бы как минимум две в силу симметричности нулей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Гипотеза Римана тем самым уже доказана.

Но если мы рассмотрим ситуацию подробнее, то получим сюрприз (см. в конце статьи следствие из доказательства).

В случае с точкой A получаем

$$(\alpha - \beta) \frac{1}{\sigma_0} + \alpha \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}, \quad (9)$$

для точки B должно выполняться равенство

$$(\alpha - \beta) \frac{1}{1 - \sigma_0} + \alpha \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}, \quad (10)$$

Вычитая из равенства 9 равенство 10, получаем равенство

$$(\alpha - \beta) \left(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{1 - \sigma_0} \right) + \alpha \left(\frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} - \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2} \right) = \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2} - \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} \quad (11)$$

Но левая часть равенства 11 положительна, а правая часть - отрицательна.

Таким образом, предположение $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ оказывается неверным.

Случай, когда нетривиальный нуль σ_1 дзета-функции больше $\frac{1}{2}$, сводится к рассмотренному случаю: просто полагаем $\sigma_0 = 1 - \sigma_1$.

Итак, $\sigma_0 = \frac{1}{2}$. Гипотеза Римана доказана. $\square$

Следствие. $v_1(\sigma, t_0) = \hat{v}_1(\sigma, t_0)$.

Доказательство. Подставляя в уравнение 9 значение $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, получаем $\alpha - \beta = 0$.

Значит, $v_1(\sigma, t_0) = \alpha \hat{v}_1(\sigma, t_0)$, но тогда $\alpha \hat{v}_1(\sigma_0, t_0) = v_1(\sigma_0, t_0)$, то есть $\alpha \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}$. Но ведь $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, подставляя это значение в полученное равенство, получаем $\alpha = 1$. $\square$

Полученное следствие имеет очень важный геометрический смысл (рис. 3): график функции v_1 совпадает с графиком функции $\hat{v}_1 = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$ и, значит, убывает, в то время как график функции v_2 возрастает, и они могут пересечься лишь в точке с абсциссой $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Но это лишь следствие того, что пара (σ_0, t_0) является нетривиальным нулём дзета-функции. В общем случае функция v_1 ведёт себя совершенно непредсказуемо

и далеко не совпадает с функцией $\hat{v}_1$, так хотя она и является линейной комбинацией двух гладких функций, но вычислить коэффициенты α и β не представляется возможным. В этом причина того, что автор, начиная с 2017 года, безуспешно пытался доказать, что функция v_1 убывает именно в общем случае (см. сайт <https://riemann.usoz.net>). В конце концов оказалось, что убывает, но только в совершенно специфических случаях.

Список литературы

- [1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.
- [2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.
- [3] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.