

---

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК  
Том 00. Выпуск 00.

---

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-00-00-1-11

Доказательство гипотезы Римана  
о нетривиальных нулях дзета-функции<sup>1</sup>

Н. М. Мусин Пенсионер

*e-mail: nail.musin2009@yandex.ru*

**Аннотация**

В статье доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  является нетривиальным нулём, то пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных  $\sigma$  и  $t$ .

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что оно имеет единственное решение при  $t = t_0$ .

Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$  следует, что  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

*Ключевые слова:* гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

*Библиография:* 3 названия.

**Для цитирования:**

Н. М. Мусин. Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции // Чебышевский сборник, 2023, т. 00, вып. 00, с. 1–11.

---

CHEBYSHEVSKII SBORNIK  
Vol. 00. No. 00.

---

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-00-00-1-11

Proof of the Riemann hypothesis  
on nontrivial zeros of the zeta function

N. M. Musin Retiree

*e-mail: nail.musin2009@yandex.ru*

**Abstract**

In paper the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  is a nontrivial zero, then the pair  $(\sigma_0, t_0)$  is a solution to a system of two equations of two real variables  $\sigma$  and  $t$ .

Considering one of that two equations one can found that it has a unique solution at  $t = t_0$ .

As nontrivial zeros are symmetric about the line  $\sigma = \frac{1}{2}$  it follows that  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

*Keywords:* the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

*Bibliography:* 3 titles.

**For citation:**

N. M. Musin, 2023, "Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 00, no. 00, pp. 1–11.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена без какой-либо финансовой поддержки.

## 1. Введение и постановка задачи

Пусть  $s = \sigma + it$  – комплексная переменная, где  $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$ .  
Далее,  $x \in \mathbb{R}$  – действительная переменная.

Известно [1, с. 40], что при  $\sigma > 0$  дзета-функция Римана  $\zeta(s)$  может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции  $\zeta(s)$  сводится к решению уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \quad (2)$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)),$$

$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Поэтому уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно действительной оси  $\sigma$ , поэтому достаточно рассмотреть случай  $t > 0$ .

В дальнейшем изложении всегда  $0 < \sigma < 1, t > 0$ . Кроме того, некоторый нетривиальный нуль  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

## 2. О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$

$$v_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$

$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2},$$

$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

Если  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением системы (4) и, в частности, уравнения  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ ; в дальнейшем изложении фиксируем значение  $t = t_0 > 0$ . Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной  $\sigma$ ; будет показано, что графики обеих частей должны пересекаться только в одной точке с абсциссой  $\sigma_0$ , и из этого получается противоречие предположению о том, что  $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$ , поэтому изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет (выбор уравнения решался путём подбрасывания монеты (шутка); при желании доказательство можно проводить, изучая только уравнение  $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$ , схема та же самая)

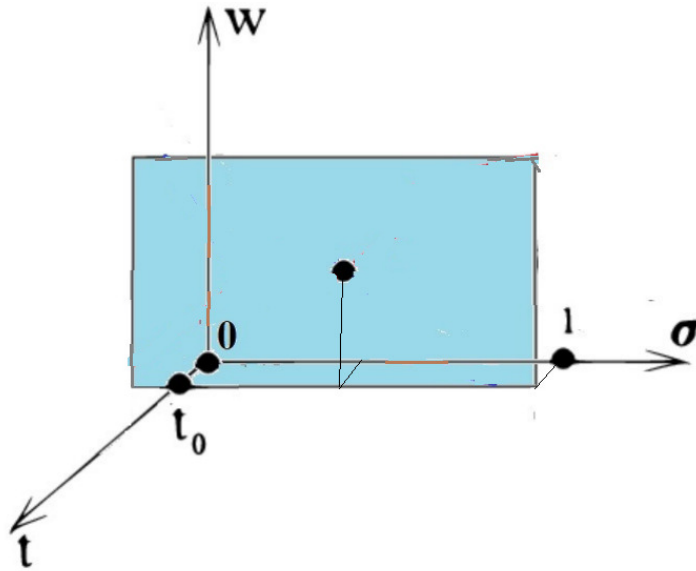


Рис. 1: Плоскость  $t = t_0$

**ЛЕММА 1.** *Функция  $w = v_2(\sigma, t_0)$  при фиксированном  $t_0 > 0$  возрастает как функция от переменной  $\sigma$ .*

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.$$

□

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Из леммы 1 следует, что все значения функции  $w = v_2(\sigma, t_0)$  при  $\sigma \in (0; 1)$  принадлежат интервалу  $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Прямоугольник  $\left\{(\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U\right\}$  будем называть критическим прямоугольником.*

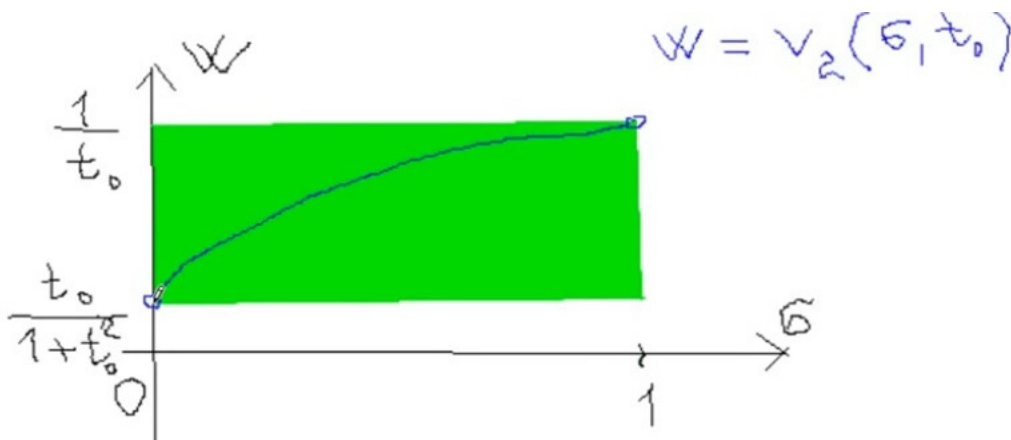


Рис. 2: Критический прямоугольник

Далее нас интересует часть графика функции  $v_1(\sigma, t_0)$ , лежащая в этом прямоугольнике.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Значение переменной  $\sigma$ , при котором соответствующая точка  $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$  графика функции  $v_1(\sigma, t_0)$  находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение  $\sigma_0$  является критическим значением переменной  $\sigma$ , т.к. точка  $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$  находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций  $v_1(\sigma, t_0)$  и  $v_2(\sigma, t_0)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна  $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1+t_0^2} = \frac{1}{(1+t_0^2)t_0}$ . Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью  $t_0 = 14.134725141\dots$  получается ширина  $0.0003523461812\dots$

Если  $\sigma$  - критическое значение, то, согласно определению,  $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$ ; в частности,  $v_1(\sigma, t_0) > 0$ .

Обозначим  $\mathfrak{R}[a, b]$  множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ .

Нам будет полезно следствие из следующей теоремы [3, с. 347]:

**ТЕОРЕМА** (первая теорема о среднем для интеграла). Пусть  $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Если функция  $g$  неотрицательна (или неположительна) на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m, M].$$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Пусть условия теоремы о среднем выполняются для любого

$b \in [a, +\infty)$  и существует такое действительное  $B$ , что  $\int_a^b g(x)dx > 0$  при всех  $b > B$ , пусть

существуют несобственные интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ , тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} g(x)dx, \text{ где } \alpha \in [m, M].$$

*Доказательство.* Согласно теореме о среднем

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu(b) \text{ при } b > B, \text{ где } \mu(b) \in [m, M].$$

Так как несобственные интегралы существуют, то при  $b \rightarrow +\infty$  существует предел левой части, а значит, существует и  $\alpha = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mu(b)$ . Так как  $\mu(b) \in [m, M]$ , то и  $\alpha \in [m, M]$ .  $\square$

ЛЕММА 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \quad (5)$$

*Доказательство.* Обозначим  $F(x)$  первообразную функции  $\frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = |u = \ln x| = \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \int \sin(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \left( \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \sin(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \\ &+ \frac{t_0}{\sigma} \int e^{-\sigma u} \cos(t_0 u) du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \frac{t_0}{\sigma} \int -\frac{1}{\sigma} \cos(t_0 u) d e^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0}{\sigma^2} \left( \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \cos(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &- \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x). \end{aligned}$$

Получили равенство  $F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x)$ , следовательно,

$$F(x) + \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

$$\text{Итак, } \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

Далее,

$$\frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \Big|_1^{+\infty} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \Big|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2},$$

отсюда следует, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = F(x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если бы мы вместо равенства  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$  системы (4) выбрали равенство  $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$ , то нам пришлось бы доказывать равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \cos(t_0 \ln x) dx = \frac{\sigma}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2 означает, что

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Графики функций  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$  и  $v_2(\sigma, t_0)$  расположены целиком в критическом прямоугольнике и симметричны в нём друг другу относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ , пересекаясь в точке с абсциссой  $\frac{1}{2}$ .

В самом деле, функция  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$  убывает на  $[0; 1]$  от  $\frac{1}{t_0}$  до  $\frac{1}{1+t_0^2}$ , функция  $v_2(\sigma, t_0)$  возрастает на  $[0; 1]$  от  $\frac{1}{1+t_0^2}$  до  $\frac{1}{t_0}$ , при этом  $\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - (1 - \sigma))^2 + t_0^2} = v_2(1 - \sigma, t_0)$ . Равенство  $\hat{v}_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$  означает то же самое, что и  $\frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - \sigma)^2 + t_0^2}$ , откуда следует  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

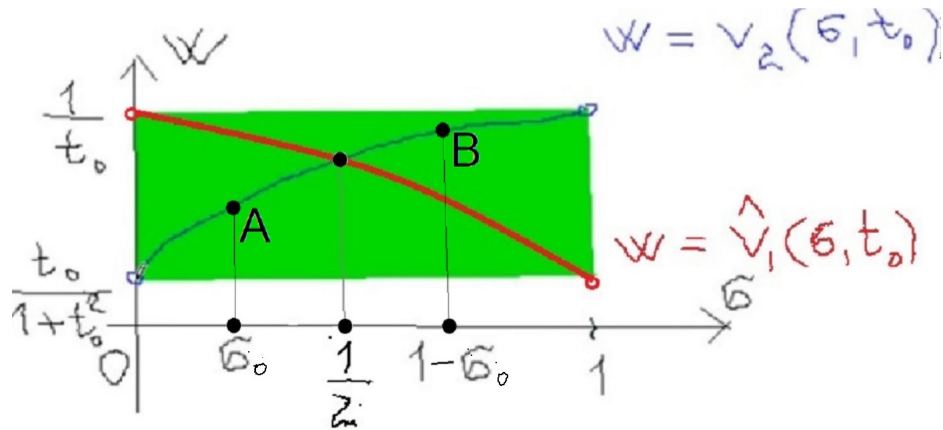


Рис. 3: Пересечение графиков  $\hat{v}_1$  и  $v_2$

## Доказательство гипотезы Римана

**ТЕОРЕМА.** Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль  $s_0 = \sigma_0 + it_0$ , где  $t_0 > 0$ , то  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Как известно, в комплексной плоскости  $(\sigma, t)$ , если точка  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка  $1 - \sigma_0 + it_0$ , то есть симметричная ей относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ , тоже является нетривиальным нулём дзета-функции.

То есть, если пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением уравнения  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ , то пара  $(1 - \sigma_0, t_0)$  тоже будет решением этого же уравнения.

При этом точка  $A(\sigma_0, v_2(\sigma_0, t_0))$  имеет ординату  $v_2(\sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}$ , а точка  $B(1 - \sigma_0, v_2(1 - \sigma_0, t_0))$  имеет ординату  $v_2(1 - \sigma_0, t_0) = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$ .

Допустим, что  $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$ . Полагаем для определённости, что  $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ . Тогда точка  $A$  лежит ниже графика функции  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ , а точка  $B$  - выше.

Таким образом, график функции  $v_1$ , согласно нашему предположению о том, что  $\sigma_0$  является решением уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ , проходит через точку  $A$ , и теперь предстоит выяснить, пройдёт ли он и через точку  $B$ .

Согласно следствию из первой теоремы о среднем для интеграла, для каждого  $\sigma > 0$  и, тем более, для каждого  $\sigma \in (0; 1)$  найдутся такие  $\alpha(\sigma), \beta(\sigma) \in [0; 1]$ , что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx &= \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &= \alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx. \tag{7}$$

Приравнявая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx,$$

отсюда получаем

$$\int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0). \tag{8}$$

Рассмотрим сначала три случая, когда функция  $\alpha - \beta$  переменной  $\sigma$  сохраняет знак или нулевое значение на  $(0; 1)$ .

1.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$  на  $(0; 1)$ .

Из равенства (8) следует, что  $v_1(\sigma, t_0) < \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$  при всех  $\alpha \in (0; 1)$ .

2.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) = 0$  на  $(0; 1)$ .

Из равенства (8) следует, что  $v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$  при всех  $\sigma \in (0; 1)$ . При  $\alpha(\sigma) < 1$  точка  $v_1(\sigma, t_0)$  лежит ниже точки  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ . При  $\alpha(\sigma) = 1$  должно выполняться и равенство  $\beta(\sigma) = 1$ . Но ведь тогда из равенства  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx$  получается равенство  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx$ , которое не выполняется. Значит, равенство  $\alpha(\sigma) = 1$  не достигается, поэтому  $\alpha(\sigma) < 1$ .

В случаях 1 и 2 график функции  $v_1$  лежит ниже графика функции  $\hat{v}_1$ , но тогда и точки  $A$  и  $B$  лежали бы ниже графика функции  $\hat{v}_1$ , но, как было указано ранее, они должны лежать по разные стороны от этого графика.

Следовательно, если график функции  $v_1$  проходит через точку  $A$ , то через точку  $B$  уже не пройдёт, и её абсцисса  $\sigma_0$  не может быть решением уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ .

3.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$  на  $(0; 1)$ .

В этом случае  $v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma))\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) < \alpha(\sigma)\frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma)\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \hat{v}_1(\sigma, t_0) \right)$ . Значит, график функции  $v_1$  лежит ниже графика функции  $\gamma = \alpha(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right)$ .

В то же время для каждого  $\sigma$  можно подобрать такое число  $\mu(\sigma)$ , что выполняется равенство  $\mu(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}$ . Из определения следует, что  $0 < \mu(\sigma) < 1$ .

Но тогда  $\gamma = \alpha(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right) = \frac{\alpha(\sigma)}{\mu(\sigma)} \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} < \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(\sigma, t_0)$ .

Итак, график  $v_1$  лежит ниже графика  $\gamma$ , который, в свою очередь, лежит ниже графика  $\hat{v}_1$ .

Следовательно, график  $v_1$  лежит ниже графика  $\hat{v}_1$ . Но точки  $A$  и  $B$  в таком случае оказываются ниже графика  $\hat{v}_1$ , что недопустимо.

Прежде чем перейти к случаю 4, сделаем следующее

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В рассмотренных трёх случаях вместо интервала  $(0; 1)$  можно было изначально брать произвольный интервал  $(p, q) \subseteq (0; 1)$ .

4.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$  - знакопеременная функция на  $(0; 1)$ .

Рассмотрим функцию  $\varphi(\sigma) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеем неравенство  $\int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$ , поэтому функциональный ряд для функции  $\varphi(\sigma)$  мажорируется рядом  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}}$  на отрезке  $[\varepsilon, 1]$  для произвольного  $\varepsilon \in (0; 1)$ , следовательно, он по признаку Вейерштрасса на этом отрезке сходится равномерно. Так как все слагаемые функционального ряда для функции  $\varphi(\sigma)$  непрерывны как интегралы от непрерывных функций, то функция  $\varphi(\sigma)$  непрерывна. В силу произвольности  $\varepsilon$  функция  $\varphi(\sigma)$  непрерывна на  $(0, 1]$  и, значит, и на  $(0, 1)$ .

Функция  $\beta$  является непрерывной функцией на  $(0; 1)$ , так как, согласно определению,  $\beta(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx}$ , это отношение двух непрерывных функций, причём  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{1}{\sigma} > 0$ .

Запишем равенство (6) в виде  $\frac{1}{\sigma} + v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right)$ ; выражая из него  $\alpha(\sigma)$ , устанавливаем её непрерывность, поскольку выражение в скобках непрерывно и не равно нигде нулю на  $(0; 1)$ , а функция  $v_1(\sigma, t_0)$  непрерывна как действительная часть аналитической функции  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$ , в соответствии с равенством (1).

Итак, функция  $\alpha - \beta$  непрерывна на интервале  $(0; 1)$ , следовательно, она либо вообще не имеет нулей (тогда она знакопостоянна и подпадает под случаи 1 и 3, но не под случай 4), либо интервал  $(0; 1)$  будет объединением двух множеств: множества нулей, замкнутого как прообраз одноточечного (и потому замкнутого) множества  $\{0\}$ , и открытого множества, которое получается удалением из интервала  $(0; 1)$  указанного замкнутого множества.

Приведём полезную теорему 21 из книги [4, с. 135]:

**ТЕОРЕМА.** *Всякое открытое множество  $\Gamma$  на числовой прямой  $\mathbb{R}$  есть сумма конечного или счётного множества дизъюнктивных интервалов, концы которых принадлежат дополнению к  $\Gamma$  замкнутому множеству  $\Phi = \mathbb{R} \setminus \Gamma$ ; среди этих интервалов могут оказаться один или два бесконечных интервала вида  $(-\infty; a)$  или  $(a; +\infty)$ .*

Итак, согласно этой теореме, интервал  $(0; 1)$  является объединением замкнутого множества нулей функции  $\alpha - \beta$  и конечного или счётного множества дизъюнктивных интервалов вида  $(p, q)$  с концами в замкнутом множестве нулей функции  $\alpha - \beta$ , кроме двух интервалов: один с левым концом 0 и правым концом в множестве нулей, и другой - с правым концом 1 и левым концом в множестве нулей. На каждом таком интервале функция  $\alpha - \beta$  знакопостоянна.

Ранее мы установили, что нулям функции  $\alpha - \beta$  соответствуют точки графика функции  $v_1$ , лежащие ниже графика функции  $\hat{v}_1$ , а интервалам, где функция  $\alpha - \beta$  отрицательна, соответствуют дуги графика функции  $v_1$ , также лежащие ниже графика функции  $\hat{v}_1$ ; на интервалах, где функция  $\alpha - \beta$  положительна, функция  $v_1$  убывает.

Таким образом, если график функции  $v_1$  проходит через точку  $A$ , то он никак не сможет пройти через точку  $B$ .

Следовательно, предположение  $\sigma_0 < \frac{1}{2}$  оказывается неверным.

Случай, когда абсцисса  $\sigma_1$  нетривиального нуля дзета-функции больше  $\frac{1}{2}$ , сводится к рассмотренному случаю: просто полагаем  $\sigma_0 = 1 - \sigma_1$ .

Гипотеза Римана доказана. □

### 3. Заключение

В общем случае функция  $v_1$  ведёт себя совершенно непредсказуемо, хотя, как мы установили, она и является линейной комбинацией двух гладких функций, но вычислить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , от которых зависит её поведение, так, чтобы график функции  $v_1$  прошёл через точку с абсциссой  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$  нетривиального нуля, не представляется возможным.

Но, тем не менее, об этих коэффициентах можно кое-что сказать. Например, следующее: их можно, ради интереса, приближённо вычислить, уже зная положительную мнимую часть

$t_0$  нетривиального нуля.

Обозначим  $\alpha(\sigma_0)$  и  $\beta(\sigma_0)$  символами  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  соответственно.

Так как  $v_1(\sigma_0, t_0) \in U$ , то  $\frac{1}{t_0} > v_1(\sigma_0, t_0) = (\alpha_0 - \beta_0)\frac{1}{\sigma_0} + \alpha_0 \hat{v}_1(\sigma_0, t_0) > (\alpha_0 - \beta_0)\frac{1}{\sigma_0} = 2(\alpha_0 - \beta_0)$ , следовательно,  $\alpha_0 - \beta_0 < \frac{1}{2t_0}$ . Для нетривиальных нулей с большими положительными мнимыми частями эти коэффициенты очень мало отличаются друг от друга.

Рассмотрим случай нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью  $t_0 = 14.134725141\dots$ . Тогда  $\frac{1}{2t_0} = 0.03537387498\dots$ . При  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$  выполняется равенство  $(\alpha_0 - \beta_0)\frac{1}{\sigma_0} + \alpha_0 \hat{v}_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$ , из которого получаем  $1.035329666\dots\alpha_0 - \beta_0 = 0.03532966658\dots$

$$\text{Найдём теперь } \beta_0 \text{ в соответствии с равенством } \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = \beta_0 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx.$$

Сначала вычислим интеграл в левой части равенства.

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx &= |x=k+t| = \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \int_0^1 \frac{k+t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt - \int_0^1 \frac{k}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^\sigma} dt - k \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+t)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+t)^\sigma} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+1)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+1)^\sigma} \right) - \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot k^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{k^\sigma} \right) = \\ &= \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left( \frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left( \frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right) \right).$$

$$\text{При } \sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} \text{ получаем } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2, \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1-2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}.$$

$$\text{При } k = 1000000 \text{ получаем } \int_1^k \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 0.9170582237\dots$$

Из равенства  $0.9170582237 = \beta_0 \cdot 2$  получаем  $\beta_0 = 0.4585291118\dots$

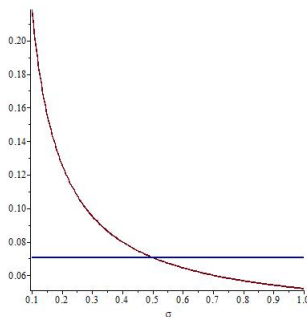
$$\text{Теперь можем найти } \alpha_0 = \frac{\beta_0 + 0.03532966658}{1.035329666} = 0.4770063050.$$

Попробуем теперь хотя бы приблизительно представить, как ведут себя левый и правый части уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ . Конечно, для этого надо бы знать значения коэффициентов  $\alpha(\sigma)$  и  $\beta(\sigma)$  при всех остальных значениях  $\sigma$ , и выражения для их вычисления приведены во второй части статьи, но они очень громоздки.

Если предположить, что  $\alpha(\sigma) \approx \alpha\left(\frac{1}{2}\right)$  и  $\beta(\sigma) \approx \beta\left(\frac{1}{2}\right)$ , то равенство (8) принимало бы приблизительно вид  $v_1(\sigma, t_0) = \frac{0.0184771932}{\sigma} + \frac{6.742353011}{\sigma^2 + 199.7904548}$ .

И это всё, что пока установлено.

В этом причина того, что автор, начиная с 2017 года, безуспешно пытался доказать, что функция  $v_1$  убывает именно в общем случае. В конце концов оказалось, что она и в самом деле убывает, но только в совершенно специфических случаях.

Рис. 4: Пересечение графиков  $v_1$  и  $v_2$ 

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.
2. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.
4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства “Наука”, 1977.

## REFERENCES

1. Galochkin A.I., Nesterenko Yu.V., Shidlovskii A.B. : Introduction to number theory (Vvedenie v teoriyu chisel). 2nd ed, Lomonosov Moscow State University, 1984.
2. Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951
3. Zorich V. A.: Mathematical Analysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004
4. Aleksandroff P.S. Vvedenie v teoriju mnozhestv i obschuju topologiju. M.: Glavnaja redaktsija fiziko-matematicheskoy literatury izdatel'stva “Nauka”, 1977.