Кинематические уравнения колебаний математического маятника

© Н. М. Мусин

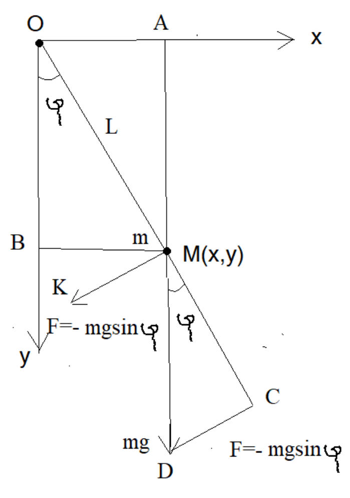
12 сентября 2023

УДК 534

Аннотация

В статье выводятся кинематические уравнения колебаний математического маятника. Показывается, что координата x изменяется по гармоническому закону независимо от угла отклонения. Координата y выражается через гармоническую зависимость.

Ключевые слова: математический маятник, гармонические колебания.



Пусть O - начало декартовой системы координат, ось абсцисс направлена слева направо ось ординат идёт сверху вниз. $M(x, y)$ -материальная точка с координатами x, y и массой m, тонкая невесомая нерастяжимая нить длины L прикреплена одним концом к точке O, другим концом - к точке M.

В описанной конструкции материальная точка M называется математическим маятником.

Проведём прямую MA перпендикулярно оси абсцисс, на ней возьмём точку D так, чтобы $MD = mg$, затем проведем перпендикуляр к прямой OM. Проведём перпендикуляр MB к оси ординат. Обозначим $\varphi = \angle BOM-$ угол отклонения нити маятника от вертикали. Пусть, для определённости, маятник отклонён вправо.

Согласно построениям, $DC = mg \sin\varphi$.

Далее в учебниках начинается непонятный танец с бубнами. Сначала угол φ определяют с помощью равенства $\varphi = \dfrac{s}{L}$ согласно определению радианной меры угла (здесь $s-$ длина дуги окружности радиусом L, лежащей внутри угла $\angle BOM$). Затем вдруг «замечают», что при малых φ имеет в место приближённое равенство $s \approx x$, затем «замечают», что при малых $\dfrac{x}{L}$ имеет место очередное равенство $\sin\dfrac{x}{L} \approx \dfrac{x}{L}$.

Наконец, отсюда «следует» $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{L}x = 0$. Но - для «малых» значений φ.

Но ведь $\sin\varphi$ можно было найти намного проще, из треугольника $\triangle OMB:\ \sin\varphi = \dfrac{x}{L}$.

Причём уравнение $\sin\varphi = \dfrac{x}{L}$ получается для любых значений угла $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ну а дальше уже идут стандартные построения. Обозначаем $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$, тогда уравнение колебания ординаты x записывается в виде $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Но решение этого уравнения $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ имеет место для любого $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Обозначая $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, можем ввести вспомогательный угол α так, чтобы $\sin\alpha = \dfrac{C_1}{A}$, $\cos\alpha = \dfrac{C_2}{A}$, тогда получаем уравнение $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$.

Итак, абсцисса точки x меняется по гармоническому закону.

Что касается ординаты, то из треугольника $\triangle OMB$ получаем, что $y(t) = OB = \sqrt{L^2 - A^2\sin^2(\omega t + \alpha)}$.

В частности, если $L = A$, то $y(t) = L\cos(\omega t + \alpha)$.

Получается, что амплитуда A вычисляется по формуле $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Когда мы отводим маятник, например, вправо, то мы сами задаём будущую амплитуду A, то есть $A = x(0) = C_1\cos(\omega 0) + C_2\sin(\omega 0) = C_1$. Пусть начальная скорость равна нулю, тогда $-C_1\omega\sin(\omega 0) + C_2\omega\cos(\omega 0) = C_2 = 0$.

Итак, $C_1 = A$, $C_2 = 0$. Но тогда вспомогательный угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Получается уравнение $x(t) = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t)$.

Окончательный вывод таков: если маятнику задать амплитуду $A = x(0)$ при нулевой начальной скорости, то абсцисса меняется по гармоническому закону $x(t) = A\cos(\omega t)$. Ордината меняется по закону $y(t) = \sqrt{L^2 - A^2\cos^2\omega t}$. При этом начальный угол $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{A}{L}\right)$ может быть любым.

Если задать амплитуду $A = L$, то ордината будет меняться по закону $y(t) = L\sin\omega t$.