Конструктивно-семантическое построение некоторых фундаментальных понятий математики

Рубрика Общие проблемы математической логики и основания математики

Еникеев Р.Р.

ruslan.enikeev@gmail.com

Самарский государственный технический университет

Аннотация

В работе поднимается дискуссия о символах, или знаках, в контексте элементарных языковых объектов, в том числе и объектов языка математики, заключающаяся в формальном описании двойственной природы самого понятия: с одной стороны символ – это некоторый материальный объект, имеющий физическое выражение в той или иной форме, с другой – носитель смысла, идеи, для выражения чего он, собственно, и предназначен. Мы указываем, что материальная составляющая понятия символа, заключающаяся в его естественных свойствах дискретности и темпоральной упорядоченности, закладывает правила обращения с идейной составляющей, которую символ вообще реализует, что должно учитываться в логике конструктивного построения. Формальное изложение предложенной концепции мы основываем на дополненной форме порождающей грамматики. В краткой форме дается интерпретация изложения некоторых фундаментальных концепций, включая логику первого порядка, построения натуральных чисел, геделевской нумерации, теоретико-множественного подхода и континуума.

Ключевые слова

конструктивная математика, формальные грамматики, семантическая формализация, счетность континуума

Введение

В данной работе мы хотим начать очередную дискуссию о проблемах основания математики. Данное направление исследований принято называть метаматематикой, однако мы также склоняемся к отступлению к сугубо философским рассуждениям, которые, считаем, будут крайне уместны в контексте дискуссии, о чем заранее уведомляем читателя.

На начальном этапе цель рассуждения видится крайне неясно; можно лишь интуитивно дать описание тому, что рассматривается как проблема – это логическое обоснование самого понятия несчетного множества, выраженного посредством теории кардинальных чисел, понятия континуума, трансфинитной индукции и тому подобных связанных понятий.

Парадоксальным кажется то обстоятельство, что дискуссии о различного рода бесконечных понятий математики ведутся вполне конечным языком и за конечное число символов. Как к аксиоматическим, неопределяемым, объектам некоторой формальной системы к такого рода понятиям не может быть каких-либо претензий. Однако мы задаемся вопросом: нужны ли они вообще, когда есть вполне естественно принимаемые объекты, основанные на конечных понятиях? Не является ли изучение кардинальных чисел сродни изучению биологии драконов? – то есть тем, что заведомо не может быть отнесено к описанию реальности.

Главным инструментом исследования мы будем считать теорию алгоритмов, а более точно, теорию формальных грамматик, предложенную Хомским и являющейся формой задания Марковского процесса [Chom]. Данный раздел отражает так называемый конструктивный подход; оправданность принятых математических методов также будет входить в анализ, что и называется, по сути, метаматематикой, которая осуществляется посредством естественного, или коммутативного, языка.

Зададимся начальным вопросом дискуссии. Имеются различные формальные результаты о свойствах формальных систем, понимаемые через термины непротиворечивость и полнота в интерпретации теорем Геделя, причем эти же теоремы могут быть выражены иными средствами, например, средствами рекурсивной арифметики, конструктивным подходом, или теории алгоритмов, например, используются взаимосвязанные термины «разрешимость», «доказуемость», «истинность», «рекурсивная перечислимость», «определимость», «эффективная вычислимость» и т.п. Этот вопрос поднимается во всех книгах, посвященных вопросам основания математики; особо хотим отметить критическую дискуссию в контексте одной из центральных концепций современной математики – теории множеств – в работе Френкеля и Бар-Хилела [FrBar]. Речь идет об одной и той же сущности, только в разной терминологии. Мы задаемся вопросом, может ли эта самая сущность быть выражена более доступно, средствами коммутативного языка? Можно ли сформулировать таким образом условия, скажем, для создания произвольного языка, чтобы он наперед удовлетворял этим фундаментальным свойствам? Каким правилам необходимо следовать при разработке непротиворечивого языка или системы? Подобные рода рассуждения принято называть неформальными, однако мы будем стараться придерживаться достаточной строгости изложения, в первую очередь, преследуя следующие правила: логическая корректность и элементарность, как присущие известному принципу. Сразу отметим, что развиваемые концепции есть результат осмысления и изучения взаимосвязанной литературы по фундаментальной работе Карри [Curr], также базируясь на логическом подходе теории алгоритмов, формальных грамматик Хомского, в частности; вместе с тем отметим влияние философских идей Гегеля и Ч. Пирса, как концептуальных источников для формальных логических построений.

О подходе к формальному семантическому анализу языка

Мы начнем с того, что определим явно следующий факт, что для анализа языковых систем непременно необходима концептуальная связь с тем, что подразумевается под значением, или смысловым содержанием. Если вдруг возникнет возражение, что существуют языки, не имеющие очевидную связь с семантикой, будь то машинные коды, языки-протоколы, используемые вычислительными машинами для обмена информации друг с другом, мы сразу заметим, что такое суждение ошибочно. Различные машинные языки целенаправленно создавались для передачи информации, тем самым создавая смысл, как правило, качественно полезный, выражаемый средствами естественного языка. Различные математические символьные системы, пусть даже не имеющие какого-то отождествления с реальными вещами, максимально абстрактные; и те в конечном итоге можно связать со значениями, заключающимся в выражении мыслей и идей, донесении их до читателя. Наша позиция такова: любой язык содержит смысловое содержание, явно или неявно, а следовательно, связан с каким-то значением. Примечательна здесь идея Гудстейна [Goods] ассоциировать объекты математики с шахматными фигурами; они определяются не своим внешним видом, а их действиями по отношению к другим фигурам. Здесь усматривается способ осмысления языковых объектов – по взаимодействию их с другими языковыми объектами. Все наши последующие рассуждения могут быть охарактеризованы именно этой мыслью. Объяснение необходимости семантической связи с объектами математики можно также почерпнуть из очерка Тарского [Tar].

По предмету семантики, как формальному предмету, выделим работу Карнапа [CarnMean], как значимую для самого определения предмета исследования; упоминаемую во многих обзорных работах, посвященных проблеме основания математики. Однако используемый аппарат, в частности концепций «интенсионала» и «экстенсионала» заимствовать не будим, а лишь заимствуем базовые концепции, вроде языка-объекта, метаязыка ставшие основными понятиями математики. На наш взгляд, здесь развиваемые Карнапом концепции изначально слишком сложны, чтобы быть инструментами анализа некой сложной сущности, как язык; что делает изложение теории, как принято говорить, туманным. Если обратиться к работе по логическому синтаксису [CarnLogSyn], то излагаемый подход к анализу формальных языков концептуально схож в данной работе, в том смысле, что осуществляется формальное разделение связанных языков, по примеру язык-объект и язык-синтаксис; однако мы будем строить все рассуждения, базируясь на концепции формальных грамматик, являющейся основой современного развития теории формальных языков.

Существует такая концепция: U-язык – это единственный язык в рамках какого-то контекста. Попросту говоря, все, что мы сказали или еще скажем – все на U-языке. Если мы его сейчас начнем исследовать языковыми средствами, то объектом изучения, так и способом, т.е. метаязыком, будет выступать U-язык. Уже на интуитивном уровне можно понять, что самоприменимость – это не самое лучшее качество для анализа чего-либо; ровно как мы не используем молоток применительно к самому себе.

Использование идей конструктивного метода прежде базируется на анализе. Язык U никто не создавал и не проектировал – он есть с самого начала; единственное, что с ним можно сделать, это произвести анализ, иначе говоря, выделить обособленные части. Если мы будем использовать конструктивные методы для построения синтетических языков, – это может быть и не явно сразу, – они будут основаны на результатах анализа U-языка, поскольку они вторичны и разрабатываются средствами U-языка. Может показаться, что можно вывести заключение о главенстве анализа над синтезом; но можно выразиться и так: в случае анализа мы создаем некие объекты, которые полагаем, составляют анализируемый объект, в противном случае мы создаем некие объекты, которые полагаем, помогут создать конструируемый объект. Скажем иначе, синтез и анализ – пути осмысления одной креативной деятельности. Метафорически говоря, если мы проанализировали некое здание состоит из элементов-кирпичей, мы также должны иметь возможность из этих элементов построить точно такое же здание. Иначе необходимо прийти к мысли, что анализ был некорректным, ошибочным.

Выделим язык-объект L_0. Пусть он будет достаточно простым для анализа; в нем будет всего два абстрактных слова: $L_0 = \{a, b\}$. (Язык с одним словом был бы чрезмерно простым.) Зададимся вопросом: какие значения мы приписываем словам a и b? Поскольку мы имеем желание изучать обособленный объект, то и значения языка будем локализовать исключительно внутри языка объекта, иначе говоря, слово «a» будет значить ровно само себя, как и «b», что бы мы под этим не подразумевали в контексте метаязыка. Это дает нам возможность сразу решить известные семантические дилеммы, например, как понимать слово «Джон»: как рыжеволосого парня, носящего костюм, или как слово из 4 букв (пример взят у Карри [Curr]). Возможность приписать словам языка L_0 дополнительных иных значений, как следствие пользования неограниченного по выразительным средствам метаязыка, исключено, поскольку использование терминов языка L_0 в метаязыке ограничено контекстом.

Попробуем ответить на вопрос: что если на данном этапе рассуждений можно предположить, что слова L_0 однозначны, или семантически связаны одним и тем же значением? – Такое суждение необходимо отбросить, как ложное. Поскольку мы для разных слов используем различные инскрипции – конкретные способы их написания – мы это чувственно воспринимаем, и соответственно, так же должны и различать семантически – различно. Если бы мы захотели изначально связать некие объекты единым смыслом, мы бы для них использовали единую инскрипцию, или тот же символ; использование различных слов, или символов, обретает смысл, только если мы хотим подчеркнуть их семантическое различие. А вот их отождествление будет уже высказыванием в метаязыке, как и их разотождествление: высказывание о том, что «a» не равно или не эквивалентно «b» имеет смысл в том случае, если язык допускает возможность семантического тождества или эквивалентности упомянутых слов.

Выделим очередной язык L_1, который будет являться метаязыком по отношению к L_0, но, естественно, объектом в U. Это можно выразить через символьную запись $L_1 \supset L_0$, которую в данном параграфе мы будем интерпретировать, как L_1 является метаязыком в отношении L_0. Пусть в язык L_1 помимо слов L_0 дополнительно входит всего одно слово, т.е. алфавит языка L_1 будет состоять из трех элементов; $A(L_1) = \{a, b, r\}$. Мы полагаем, что в такой формулировке все, о чем может сообщать язык L_1, – это о взаимоотношении значений слов языка L_0. Высказывания в метаязыке будут минимально возможные цепочки, включающие слова обоих языков. Если мы образуем цепочки из двух символов, вроде br, ar, ra, rb – они не будут связывать слова a и b между собой, т.е. не будут выражать взаимный смысл этих слов. Если мы комбинаторно выделим всякие трехбуквенные комбинации из a, b и r, то формальный факт существования наделит их всех значением; что не даст нам возможность отделить то, что имеет значение, от того, что значение не имеет. Следовательно, для слов языка L_1 мы выделим ограниченный набор высказываний из возможных высказываний. Пусть $L_1 = \{ara, brb\}$. Также мы можем полагать весь комбинаторный набор, соответствующий неупорядоченному множеству: $L_1 = \{\{a, r, a\}, \{b, r, b\}\}$. Будем считать эти подходы идентичными. В общем, мы предполагаем для языка понятной концепцию «well-formed formula», или правильно построенной формулы; в различных источниках можно встретить такое обозначение, как «wef», или «веф», или «ппф».

Существование в языке именно таких слов, а не иных, автоматически наделяет их смыслом; ровно также, как в естественных языках, то, что называется «тарабарщиной» или «бессмыслицей», словами не являются, поскольку смысла не несут, однако могут быть созданы конструктивными элементами языка. Мы договорились, что изначально предполагается, что символ несет какой-то определенный смысл, и разные инскрипции этого символа или слова, будут означать ровно одно и тоже. По своей сути, мы даем интерпретацию свойства естественной, или изначальной рефлексивности символа. Воспользуемся операцией, называемой в теории алгоритмов алфавитным отображением. Мы заменим один символ на другой по следующей схеме: $r \rightarrow =$. В результате получим $a = a$ и $b = b$, что, как будто, наделило язык смыслом. На деле же, внутри метаязыка L_1 этот смысл уже имелся, благодаря самой символьной записи; слово «r» не использовалось в словах, содержащих a и b одновременно, хотя это допускалось формой. По поводу симметричности записи – это лишь условная форма; также как можно заменять различные записи со скобками бесскобочными записями по системе Лукасевича, т.е. можно было бы и принять форму raa и т.п. Для наглядности введем алфавит языка L_1 еще одно слово – s и образуем слова: $L_1 = \{ara, brb, asb, bsa\}$. Мы подводим к мысли, что по уже символьному контексту можно догадаться, что можно предложить следующую объясняющую замену: $s \rightarrow \neq$. Мы подытоживаем, что, ограничив возможные выражения метаязыка, мы наделили собственные слова метаязыка L_1 значением, посредством обращения к значениям языка-объекта, какими бы они не представлялись. Можно также сказать, что мы вводим семантическое понятия равенства через слово «r» языка L_1.

Введем новое понятие – дополнение языка L_1, будем его обозначать как $\overline{L}_1$. Смысл его таков: в него входят все возможные слова, которые можно образовать исходя из принятых ограничений, но которые не вошли в основной язык, т.е. $\overline{L}_1 = \{arb, bra, asa, bsb\}$. Остальных слов, договоримся, конструктивно не существует, они не являются вефами. В этом языке получается все семантически наоборот: $r \rightarrow \neq$ и $s \rightarrow =$. Полный язык можно охарактеризовать, как объединение этих языков: $L_1 \cup \overline{L}_1$. Языки L_1 и $\overline{L}_1$ можно охарактеризовать, как противоречивые друг другу, поскольку задают для одних и тех же слов различные понятия.

Мы провели вывод для самых примитивных языков, но это принцип мы можем распространить на более сложные языки, вплоть до естественных, индуктивно. Мы получаем, что любой полный язык не может вывести какое-либо семантическое значение; для того, чтобы язык определял значения для своих объектов, он должен не допускать некоторые конструкции, иначе говоря, быть неполным.

Продолжим мысль. Допустим, мы хотим выразить понятие, что некоторые слова языка $L_1 \cup \overline{L}_1$ допустимы, а некоторые – нет. Это мы можем сделать, но уже в рамках очередного метаязыка L_2, который будет связывать слова языка $L_1 \cup \overline{L}_1$ со словами-понятиями внутри L_2, обозначающими допустимость или недопустимость. Но здесь имеется противоречие: поскольку язык $L_1 \cup \overline{L}_1$ не может определить понятия тождества, то и однозначно связать со словами в L_2 не удастся, их значение также не будет определено однозначно.

Для стройности изложения примем, что метаязык также использует слова другого завершенного двусложного языка-объекта $L_0' = \{p, s\}$. Теперь мы попробуем описать свойства слов языка L_1. Внутри самого языка это сделать невозможно, поскольку приведет к самоприменимости. Если мы начнем создавать новые цепочки, относящиеся к языку L_1, внутри языка, это повлияет на уже образованные понятия, переопределит их. Поэтому мы создаем новый метаязык L_2, языком-объектом которого станет L_1, но при этом мы будем использовать алфавит языка L_1, тем самым замыкая его. Связи алфавитов и языков выразим следующим образом: $A(L_1) = L_0 \cup L'_0$, $A(L_2) = L_1 \cup L_0 \cup L'_0$. Пока, без объяснений, договоримся выделять слова отдельных языков в составе метаязыка круглыми скобками. Определим следующие значащие слова внутри $L_2 = \{(ara)ra, (brb)ra, (asb)ra, (bsa)ra\}$. Представленная схема концептуально реализует так называемое исчисление равенств.

Мы использовали абстрактную буквенную схему целенаправленно, чтобы отвлечься от понятий, семантически ассоциированных с определенными математическими символами. Теперь мы проведем замену через упомянутое алфавитное отображение для раскрытия смысла: $r \to =$, $s \to \neq$, $a \to T$, $b \to F$. Рассмотрим получаемые слова в L_2. $(ara)ra$ или $(T = T) = T$,будет означать, что слово $(T = T)$ в L_1 семантически соответствует T в L_0, причем значение символа в L_2 «=» уже конечно определено в L_1.Соответственно, получаем $(brb)ra$ равняется $(F = F) = T$, $(asb)ra$ это $(T \neq F) = T$ и $(bsa)ra$ это $(F \neq T) = T$. Концептуально L_2 выражает выводимость, или замену. Иначе говоря, слово $(F = F)$ может быть заменено на слово T на том основании, что эти слова выражают единое семантическое значение.

Обратим внимание, что использование скобок условно, они не являются частью языка; тогда мы должны проверить получаемые формулы со скобками на ассоциативность, исследуем ассоциативно иные слова $L_2 = \{ar(ara), br(bra), as(bra), bs(ara)\}$. Получаем: $T = (T = T)$, $F = (F = T)$, $T \neq (F = T)$, $F \neq (T = T)$. Такое прочтение также нас вполне устроит; получено полноценное объяснение для всех слов в каждом языке, тем самым замкнули язык. Можно говорить о языке $L_0 \cup L_1 \cup L_2$ средствами только этого языка, поскольку внутри этого замкнутого языка находятся все необходимые языки-объекты и соответствующие метаязыки.

Считаем важным обратить внимание, что такой подход к построению L_2 ведет к двусмысленности. Одно и то же слово можно прочитать по-разному, в зависимости от ассоциации, например, $(T \neq F) = T$ и $T \neq (F = T)$. Для того, чтобы избежать двусмысленности, необходимо было создавать L_2 без замыкания на L_0, т.е. можно было использовать средства нового языка. Однако у нас в таком случае возникла бы дилемма; в языке были бы неописываемые сущности внутри самого этого языка, как следствие незамкнутости. Отсюда индуктивно возникает заключение, что если язык однозначный, то в нем должны присутствовать неопределяемые внутри этого языка понятия; неоднозначный язык позволяет определить все понятия средствами себя самого.

Для удобочитаемости мы можем включить в состав образованного языка еще один, обеспечивающий выполнение следующего однозначного соответствия: $\neq = (= \neg)$. Но обратим внимание, что это делается на семантическом определении равенства в L_1. Понятно также, что если возникнет потребность расширить язык включением логических операций, можно последовать аналогичным образом, задавая тождественные формулы через введенное определение тождества. Однако, сущности понятия переменной мы пока не касаемся.

Отметим любопытную деталь, что за счет ассоциации, или двусмысленности, как следствие, получена возможность описания слов $\bar{L}_1$ внутри L_2. Но это не значит, что L_2 построен на L_1 и на $\bar{L}_1$ – он семантически построен на L_1 или на $\bar{L}_1$. При конструировании мы договорились семантически связать слова L_1 только с одним словом L_0; при этом получилась, можно сказать, автоматическая связь значений $\overline{L}_1$ с другим словом L_0; но при этом, сама связь эта семантически обеспечена исключительно L_1. Иначе мы бы получили в L_2 существование слов вида $(T = F) = T$, что можно расценивать, как противоречие; поскольку именно L_2 задает уже свойства слов языка L_0.

Значение настоящего параграфа заключается в семантическом выводе понятия равенства, или тождества, через свойства символов, как и следствие логической выводимости, а также логическое обоснование способов этого самого вывода максимально формальным путем. Очевидно, что концепция тождества является центральной в любой логической системе, по сути, конструирует не только формальный язык, но и любой коммутативный. Ведь именно через концепцию тождества с помощью языка, письменно, вербально или каким-либо иным чувственно воспринимаемым способом, подменяется некий объект реальности или абстрактный семантический объект, связанный с реальностью, словом, значение которого, причем необязательно однозначно, формируется контекстом других слов или иных сопутствующих обстоятельств.

Здесь мы рассматриваем понятие тождества не как некоторое отношение, определенное формальным образом через свойства, но как первичное семантическое понятие, оно взаимосвязано со своими свойствами. Поясним, понятие тождества задается через свойство рефлективности для произвольного объекта-символа, а уже свойство транзитивности для различных объектов определяется с помощью семантически определенного отношения тождества, задавая одинаковые семантические значения двум различным объектам-символам.

Может возникнуть возражение, что слова произвольного языка не обязательно должны иметь непосредственную или опосредованную связь с реальными объектами; а в качестве примера выступать художественные описания в жанре фантастики или, еще лучше, фэнтези, различные метафизические теории (в ненаучном смысле). Любые слова, отражающие явно фантастические объекты, будут в всяком случае истолковываться через уже определенные слова, либо через слова, имеющие непосредственное отражение через чувственно воспринимаемые объекты. Явное определение новых терминов может и отсутствовать, но по имеющемуся контексту позволять связывать новые слова со словами, явно имеющими связь с реальностью, по аналогии. Этот прием можно ассоциировать с более формальными методами, такими как алфавитное отображение, кодировка, морфизмы, симметрия и т.п., выражающими, или реализующими семантическую тождественность объектов языка друг с другом; но мы также полагаем аналогичную связь с произвольными объектами чувственно воспринимаемой реальности. Этим объектом вполне может выступать и сам письменный символ, или конкретная инскрипция.

О семантической интерпретации посредством теории формальных грамматик

Полагаем, что представленная концепция согласуется с формальной теорией, или, по крайней мере, не противоречит ей. Пусть то, что мы называли язык-объект L_0 является нетерминальным словарем; с помощью него производится семантическое описание языка L_0', представляющего терминальный словарь. Правила грамматики можно интерпретировать, как метаязык L_1, который задает семантику для L_0' в терминах L_0, а целью грамматики будет L_2; поскольку этот язык неполный, он обеспечивает семантическую непротиворечивость. Таким образом, для построения грамматики по формальной теории для $G = (V_T, V_N, R, S)$ получаем: $V_T = \{=, \neq\}$, $V_N = \{T, F\}$, $R = \{T \rightarrow T = T, T \rightarrow F = F, F \rightarrow T = F, F \rightarrow F = T, T \rightarrow T \neq F, T \rightarrow F \neq T, F \rightarrow F \neq F, F \rightarrow T \neq T\}$, $S = \{T\}$. В данной формулировки становится очевидным, что непротиворечивость порождаемого грамматикой G языка декларируется самой грамматикой, посредством цели, или аксиомы, S.

Назовем грамматику с противоположной целью G_F, определение которой будет такое же, как и у предыдущей, кроме цели: $S = \{F\}$. Соответственно, первую будем называть G_T. Языки, порождаемые этими грамматиками, мы конструктивно объединим и получим общий язык: $L(G_T \cup G_F) = L(G_T) \cup L(G_F)$. Очевидно, что по любой фразе этого общего языка с помощью некоторого алгоритма, основанного на едином для обеих правиле R, можно однозначно отнести к языку $L(G_T)$ либо $L(G_F)$; что может быть также расценено в семантическом коммутативном языке, как истинность или ложность конкретного высказывания языка $L(G_T \cup G_F)$, что бы под этим не подразумевалось.

Мы предполагаем, что правила грамматик построены согласно некоторой общей концепции, т.е. являются вефами. Однако, комбинаторно еще существуют варианты для построения новых правил, назовем их $\bar{R}$. Семантически, они будут противоположны R и определяться следующим образом: $\bar{R} = \{F \rightarrow T = T, F \rightarrow F = F, T \rightarrow T = F, \dots, T \rightarrow T \neq T\}$. На основании этих правил мы построим грамматики $\bar{G}_T$ и $\bar{G}_F$ во всем остальном идентичные G_T и G_F, соответственно.

Получаем ожидаемый результат: $L(G_T \cup G_F) = L(\bar{G}_T \cup \bar{G}_F)$. Семантически это может означать, что дискуссии в рамках конкретного языка о противоположных понятиях сводится к различению этих самых понятий, не более того. Такие понятия, как «истинность» и «ложность» не являются самоидентифицируемыми, мы подчеркиваем, в самом языке; поскольку тот же самый язык может быть построен на представлениях, кардинально противоположных. У читателя может возникнуть идея, что более насыщенные языковые системы потенциально могут обойти этот результат, полученный для примитивнейшей бинарной языковой системы. Заметим здесь, что в сердце языка, как инструмента когнитивной системы, находится понятие тождества, или равенства, и соответствующее понятие неравенства, являющиеся бинарными противоположными элементами концепции. В случае непринятия данного постулата, мы предлагаем читателю привести произвольный опровергающий пример; так вот, эта мысль об опровергающем примере, как и сам пример семантически, вместе с их языковой реализацией равны сами себе, а более того, мы полагаем, не равны, например, апельсину семантически и в языковом выражении.

Обогатим используемый терминальный словарь добавлением новых слов: ¬, ∨, ∧, ⊃, (,). Правила их использования в рамках грамматики очевидны: $R = \{T \rightarrow \neg F, F \rightarrow \neg T, \dots, T \rightarrow (T \vee T), T \rightarrow (T \vee F), \dots, T \rightarrow (T \wedge T), F \rightarrow (T \wedge F), \dots\}$. Отдельно распишем правила, определяющие семантику логического следования, или импликации: $R_{\supset} = \{T \rightarrow T \supset T, F \rightarrow T \supset F, T \rightarrow F \supset F, T \rightarrow F \supset T\}$. Здесь мы еще раз обратим внимание, что правила внутри грамматики – это отдельный метаязык; предлагаем его рассматривать, как язык, наделяющий слова нетерминального словаря смыслом через контекст слов терминального словаря. Символ замены «→» мы ассоциируем с семантическим тождеством в контексте правил грамматики; слова слева от символа стрелки можно заменить на слова слева, поскольку у них один и тот же смысл, получается также, что и наоборот. За формальную основу взята концепция порождающей грамматики; очевидно, что ее можно рассматривать и как распознающую к языку, порожденному ею, и притом однозначно. Таким образом, мы интерпретируем вывод цепочки, как множество цепочек, объединенных одним значением, что само по себе не должно вызывать логического дискомфорта. Символ, обозначающий семантическое неравенство «$\neq$» мы заменили на ассиметричную цепочку «$= \neg$», что привело к возникновению новых записей, соответствующим понятиям «не истина» и «не ложь», соответственно, $\neg T$ и $\neg F$.

Для полноценного построения логического исчисления необходима концепция переменной, в простейшем случае – это так называемая пропозициональная переменная, семантически отождествленная с произвольным высказыванием. Мы считаем это понятие настолько важным в математике, что в контексте метаматематического дискурса просто недопустимо вульгарное определение, вроде возможности принимать те или иные, пусть и оговоренные, значения, хотя, по своей сути, к этому все и сводится.

О переменных и функциях

Конструирование такого понятия, как переменная, за счет очевидно сложного характера, т.е. значения, составленного из нескольких элементарных, может таить в себе так называемые подводные камни. Пусть p – то, что мы подразумеваем под понятием, выраженным термином пропозициональная, или высказательная, переменная. Чему равно ее значение? Можно ли высказаться, что $p = T$? Или, быть может, $p = F$? Ответ очевиден – и да, и нет.

Опишем поведение переменной, присоединением к полученной грамматике дополнительных правил и термов, описывающих суть переменной; $V_N = \{T, F, p\}$. Целью грамматики примем $S_p = \{p\}$. Правила для переменной будут следующими: $R_p = \{T \to p = p, F \to p = \neg p, p \to p \vee F, p \to p \wedge T, p \to p \supset T, p \to F \supset p, p \to p \vee p, p \to p \wedge p, \dots\}$; для более краткого изложения мы опускаем скобки, законы коммутативности и дистрибутивности и т.п.; по сути, правила грамматики описывают язык применяемой алгебры логики.

Для обозначения вывода мы заимствуем стандартное обозначение в виде однонаправленной стрелки, указывать применяемое правило замены не будем, чтобы не загромождать изложение; полагаем, что используемое правило замены будет очевидным из контекста вывода. Получим некоторые очевидные свойства отрицания, применительно к переменной: $T \Rightarrow \neg F \Rightarrow \neg(p = \neg p)$. Закон двойного отрицания, обратим внимание, – выводится – по схеме: $T \Rightarrow \neg F \Rightarrow \neg\neg T \Rightarrow \neg\neg(p = p) \Rightarrow \neg(p = \neg p) \Rightarrow (p = \neg\neg p)$.

Касаемо закона исключенного третьего можно сделать предварительный вывод: $T \Rightarrow p = (p \vee p) \Rightarrow p = (p \vee \neg\neg p) \Rightarrow (\neg p \vee \neg p) = (p \vee \neg\neg p)$. Мы получили некоторые свойства дизъюнкции, исходя из аксиоматически принятых правил. Аналогично, получаем: $T \Rightarrow \neg p = \neg p \Rightarrow \neg p = \neg(p \vee p) \Rightarrow \neg p = (p \vee \neg p)$, – из чего можно сделать вывод, что выражение $p \vee \neg p$ семантически не тождественно понятию переменной p, ну или $p \neq (p \vee \neg p)$. В рамках заданной грамматики истинность $p \vee \neg p$ не выводима, но это лишь следствие недосказанности, – мы не ввели в язык свойство переменной принимать определенные значения. Именно это свойство подтвердит необходимость $p \vee \neg p$ принимать значение T, а не F, в свою очередь, для закона противоречия ситуация противоположная.

Особо отметим, что вывод базируется исключительно на семантическом значении символа тождества, закрепленного правилами R, но не $\bar{R}$. Все последующие рассуждения, в том числе, о переменных, обретают смысл только в контексте определенных правил, пусть и произвольно выбранных. Далее, если не указано специально, все построения подразумеваются в контексте правил R.

Зададим еще одну переменную – q. Это переменная, но притом, – другая по отношению к p. Поскольку под q мы понимаем ту же семантику, как и для переменной p, для нее будут наследоваться правила R_p, только вместо p будет везде фигурировать символ q. Очевидно, осталось только описать порядок взаимодействия переменных друг с другом; для этого определим правила $R_{p,q} = \{p \to q \supset p, q \to p \supset q, \neg p \to \neg q \supset p, \neg q \to \neg p \supset q\}$; описание коммутативности конъюнкции и дизъюнкции опущены. Добавление очередной переменной в язык аналогично, по индукции. Правила MP и MT, а по сути, закон силлогизма, выводятся средствами грамматики языка, соответственно: $T \Rightarrow p = p \Rightarrow p = q \supset p$, $T \Rightarrow \neg q = \neg q \Rightarrow \neg q = \neg p \supset q$. Некоторые связанные логические законы, вроде закона контрапозиции, законов де Моргана, не выводимы из данных правил, однако, они являются логическим следствием из представления о том, что переменная принимает оговоренные значения.

Попробуем в полной мере раскрыть понятие переменной посредством формальной грамматики; необходимо добавить свойство, что переменная может принимать некоторые значения. Сам механизм задания этого свойства, полагаем, поможет критически оценить применяемый подход.

Зададим слово нетерминального словаря, обозначающего функцию от переменной, допустим p, — $\mathbf{F}p$. Функция по смыслу тождественна любой цепочки языка, образованного заданной грамматикой, цепочка непременно должна включать слово, обозначающее переменную; формально выразим следующим образом: $\mathbf{F}p = \omega$; $\omega \in L(G)$; $p \in \omega$; $\{=, \neq\} \notin \omega$. Внутри грамматики это отражается добавлением правила $\mathbf{F}p \to \omega$. Это правило позволяет производить преобразования этой функции, сравнивать ее с другими определенными аналогичным образом функциями через контекст символа равенства.

Сам же символ $\mathbf{F}$ нам остается добавить в терминальный словарь. Напротив, если бы мы добавили $\mathbf{F}$ в нетерминальный словарь, нам бы потребовалось разъяснить его значение добавлением правил формы $\mathbf{F} \to \cdots$, но это, в свою очередь, исказило бы создаваемое понятие «функция от переменной». Этот же символ можно рассматривать, как обозначение отношения; поскольку мы основываем все рассуждения на отношении тождества, то можно его задать и посредством свойств рефлективности и транзитивности. Интерпретация правила $\mathbf{F}p \to \omega$ должна быть следующая: цепочка «$\mathbf{F}p$» имеет то же самое семантическое значение, что и цепочка «ω», значит, $\mathbf{F}p$ может быть заменена на ω, и наоборот. При этом никак не должно подразумеваться, что значение p тождественно ω; в данном случае $\mathbf{F}$ может рассматриваться, как объектный предикат, он не отделим от объектной переменной.

По существу, такая конструкция не создает очевидных противоречий; можно однозначно сравнивать различные функции между собой или выводить тождественные функции. Например, $\mathbf{F}p \to p \wedge p$ позволит доказать смысловое равенство с нетерминальным словом T по следующей цепочке: $\mathbf{F}p \Rightarrow \mathbf{F}p = \mathbf{F}p \Rightarrow \mathbf{F}p = p \wedge p \Rightarrow \mathbf{F}p = T$. Очевидно, вывод можно было начать с T, как цели. Сравнение функций аналогично: пусть $\mathbf{F_1}p \to p \vee T$, $\mathbf{F_2}q \to \neg(q \wedge \neg q)$ (вместо чисел для индексации можно использовать разные буквы, предполагаем, на данном этапе рассуждения это не вызывает возмущений). Выведем: $T \Rightarrow T = T \Rightarrow p \vee T = \neg(q \wedge \neg q) \Rightarrow \mathbf{F_1}p = \mathbf{F_2}q$.

Мы не можем доказать равенство или неравенство отдельных определенных переменных, если мы непосредственно не задали равенство или неравенство через правила. Если мы захотим выводить равенство или неравенство переменных, необходимо непосредственно включить их семантическое отношение в правила по схеме $p \to q$ или $p \to \neg q$. Можно также семантически связывать одни переменные с другими посредством произвольных формул, например, $k \to p \wedge q$, однако это будет уже специальное определение, в отличие от связи через материальную импликацию, применяемую ко всем переменным.

Вернемся к понятию функции переменной. Мы непременно хотим определить такое свойство переменной внутри функции, что она может принимать некоторые значения. По-видимому, альтернативных вариантов нет, кроме как расширить форму определения формальной грамматики. Мы решим это следующим образом: к определению грамматики $G = (V_T, V_N, R, S)$ добавим дополнительный словарь подстановок P_S (proposition), зависящий от цели грамматики. В отличие от R который задает семантическое тождество между отдельно взятыми терминальным и нетерминальным словарями, словарь P_S, как самостоятельный метаязык, делает совершенно обратное – он связывает семантически неравные объекты, иными словами, подменяет одни семантические сущности другими, в то время как R задает различные наименования для одной и той же сущности. При этом словарь подстановок будет зависеть от цели грамматики, т.е. для разных целей он свой, различный.

Зададим область значения переменной для ранее определенной логической функции: $P_{\mathbf{F}p} = \{p \to T, p \to F\}$. Условием возможности применения заданной подстановки является задание этой функции в качестве цели грамматики, $S = \{\mathbf{F}p\}$. В этом случае мы будем говорить, что язык грамматики ставит целью отыскание значения функции. Добавление иных логических функций аналогично. Форма грамматики со словарем подстановки имеет вид $G = \left(V_T, V_N, R, S, P_{\mathbf{F}p}\right)$.

Покажем, как это, предполагается, работает на примере. Пусть определена некая функция $\mathbf{F}p = \neg p \supset T \supset \mathrm{p} \vee F \wedge p$, что делается добавлением соответствующего правила к грамматике, $\mathbf{F}p \to \neg p \supset T \supset \mathrm{p} \vee F \wedge p$ и нетерминального слова $\mathbf{F}p$. Пусть целью грамматики мы ставим $\mathbf{F}p$, тогда, применяя подстановки для $\mathbf{F}p$, можем получить цепочки: $\mathbf{F}T = \neg T \supset T \supset \mathrm{T} \vee F \wedge T$ и $\mathbf{F}F = \neg F \supset T \supset \mathrm{F} \vee F \wedge F$, имеющие значения F и T, соответственно. Эти цепочки также могут быть интерпретированы, как добавление новых слов к нетерминальному словарю: $\mathbf{F}T$ и $\mathbf{F}F$. Поскольку мы уже знаем, какие значения принимают эти слова, можно внести соответствующие правила в R: $\mathbf{F}T \to F$ и $\mathbf{F}F \to T$. Очевидно, что эта функция тождественна $\mathbf{F}p = \neg p$. Когда известны значения новых нетерминальных слов, необходимость в правилах подстановки отпадает, и можно снова вернуться к рассмотрению стандартной формы грамматики. Отсутствует также необходимость в области определения переменной, поскольку она непосредственно содержится в добавленных термах.

Какую интерпретацию можно дать полученной языковой конструкции? – Полученный язык, выраженный через стандартную форму грамматики $G = (V_T, V_N, R, S)$ без включения $P_{\mathbf{F}p}$ содержит в себе правила, дающие тождественно истинностную интерпретацию, которые не могут быть получены без $P_{\mathbf{F}p}$. Включение непосредственно в правила языка подстановок $P_{\mathbf{F}p}$ невозможно по причине возникновения противоречия внутри языковой системы.

Попробуем по аналогии построить высказательную функцию $\mathbf{P}$ (propositional function) над одной или несколькими предметными переменными, скажем, x и y. Предметные постоянные, термы, не определяются явным образом посредством языка, поэтому мы их отнесем к терминальному словарю: $V_T = \{a, b, c, d\}$, – мы не будем переписывать весь словарь, формирующий логику, а лишь называть то, что мы к нему добавляем. Соответственно, нетерминальный словарь пополнится $V_N = \{\mathbf{P}xy, x, y\}$. К целям грамматики мы добавим нахождение значения высказательной функции $S = \{\mathbf{P}xy\}$ с соответствующими правилами подстановки, положим, $P_{\mathbf{P}xy} = \{x \to a, x \to b, x \to c, y \to c, y \to d\}$. Этим самым мы пополняем нетерминальный словарь новыми словами: $\mathbf{P}ac$, $\mathbf{P}ad$, $\mathbf{P}bc$, $\mathbf{P}bd$, $\mathbf{P}cc$, $\mathbf{P}cd$. Значения высказательных функций с подставленными объектными переменными возможно найти из правил, которые мы пополняем соответствующими связками: $R = \{\mathbf{P}ac \to T, \mathbf{P}ad \to T, \mathbf{P}bc \to F, \mathbf{P}bd \to T, \mathbf{P}cc \to F, \mathbf{P}cd \to T\}$, – предполагается, что эти связки отражают некие семантически ассоциированные высказывания.

Введем понятие квантора – это функция, определенная по следующей схеме: $R = \{\forall x \forall y \mathbf{P}xy \to \mathbf{P}ac \wedge \mathbf{P}ad \wedge \mathbf{P}bc \wedge \mathbf{P}bd \wedge \mathbf{P}cc \wedge \mathbf{P}cd, \exists x \exists y \mathbf{P}xy \to \mathbf{P}ac \vee \mathbf{P}ad \vee \mathbf{P}bc \vee \mathbf{P}bd \vee \mathbf{P}cc \vee \mathbf{P}cd, \forall x \exists y \mathbf{P}xy \to (\mathbf{P}ac \vee \mathbf{P}ad) \wedge (\mathbf{P}bc \vee \mathbf{P}bd) \wedge (\mathbf{P}cc \vee \mathbf{P}cd), \forall y \exists x \mathbf{P}xy \to (\mathbf{P}ac \vee \mathbf{P}bc \vee \mathbf{P}cc) \wedge (\mathbf{P}ad \vee \mathbf{P}bd \vee \mathbf{P}cd), \exists y \forall x \mathbf{P}xy \to (\mathbf{P}ac \wedge \mathbf{P}bc \wedge \mathbf{P}cc) \vee (\mathbf{P}ad \wedge \mathbf{P}bd \wedge \mathbf{P}cd), \exists x \forall y \mathbf{P}xy \to (\mathbf{P}ac \wedge \mathbf{P}ad) \vee (\mathbf{P}bc \wedge \mathbf{P}bd) \vee (\mathbf{P}cc \wedge \mathbf{P}cd)\}$. Исследуя значения функции при подстановки предметных констант, можно добавить новые правила, более лаконично описывающее поведение самой высказательной функции. Полагается, что представленный пример позволяет создавать грамматику, порождающую язык логики первого порядка требуемой сложности.

Особо отметим, что представленные грамматические концепции предназначены для описания исключительно конечного языка, в том понимании, что грамматика в представленной форме, соответственно, и порожденный ею язык, не могут создавать бесконечно элементы своих словарей; вывод по индукции также не определен. Для возможности порождать бесконечное количество слов словаря и иметь возможность описания бесконечного количества различных семантических значений необходимо решить задачу построения ряда натуральных чисел в рамках предлагаемой парадигмы.

Задачей этого параграфа назовем демонстрацию возможности предлагаемой семантической интерпретации применения формальной грамматики для построения концепции логики первого порядка. Мы допускаем, что многие аспекты были пропущены и рассуждение похоже больше на эскиз, чем на подробное формальное изложение. Полагаем, этого будет достаточно для раскрытия самого принципа, вместе с тем существуют классические изложения формальной логики для возможности составить полноценную форму грамматики по предложенной схеме, если таковая необходимость возникнет.

О семантической интерпретации предиката отрицания

Понятию отрицания Карри посвящает целую главу [Curr]. В предварительном анализе полагается, что отрицание некоего суждения есть вещь вторичная по отношению к первоначальному суждению, это утверждение, говорящее, что первое утверждение ложно. Суждение о природе отрицания сводится к обсуждению недоказуемости и опровержимости, как внутренние отрицания в системе, не связанные с ее интерпретациями.

Мы не разделяем подобную точку зрения. Главным образом, по причине того, что не дается понимание, что же такое утверждение с формальной точки зрения. Если утверждение – это то, что может быть истинным или ложным, то отрицание уже рождается вместе с принятием двойственности, оно не последовательно по отношению к понятию утверждения.

Проблема толкования отрицания, как нам видится, исходит из излишне свободного отношения к символу «$=$», как будто его значение само собой разумеющееся и кроется непосредственно в самом символе, и никак иначе. Мы этот вопрос уже поднимали, но, считаем, будет не лишним обсудить детали. Вот пример некоторого произвольного так называемого утверждения: $a = b$. Как можно классифицировать данное утверждение; значит ли, что если мы его допустили, то оно автоматически обладает неким свойством? А как насчет следующих утверждений: $a = b$, $a = c$? Очевидно, что выражения обретают значение посредством некоторого метаязыка, а более того, значение символа равенства понимается однозначно, и тоже, это понимание заложено в метаязыке и никак не отражается самими утверждениями.

Без закрепленной семантической интерпретации символа равенства, или тождества, построение логической системы вряд ли возможно. Мы также развиваем идею, что концепция тождества заложена в основании самого языка; объекты языка семантически тождественны неким сущностям, которые они отображают. Почему нельзя построить язык на обратной концепции – нетождества? – Считаем данный вопрос непраздным.

Итак, сначала мы задаем семантическое свойство символу «$=$» на основании повторения записи слева от равенства, число символов в цепочке будет нечетным. Для записи нетождества число символов может быть как четным, так и нечетным – простое наблюдение. Теперь, когда значение символа равенства задано через свойство рефлективности, все остальные высказывания с символом равенства будут рассматриваться как гипотезы, где правая и левая часть от равенства должны иметь одно и то же значение.

Свойство рефлективности использовано явно, через повторения одной записи – тем самым задав смысл знаку тождества. Затем этот, уже заданный смысл, транзитивно переносится на другие, нерефлексивные записи. Здесь мы указываем на неразрывность свойств рефлективности и транзитивности в образовании понятия символьного равенства.

Запись неравенства, такая как $T = \neg F$, можно и нужно рассматривать, как тождество T и $\neg F$, только в том случае, когда значение символа равенства семантически закреплено посредством этих символов. В бинарной логике самостоятельное слово $\neg F$ однозначно интерпретируется через семантическую связь, как T, поскольку других доступных семантических значений, кроме T и F не задано. Совершенно иначе обстоят дела, когда в язык вносятся новые сущности, например, переменная или иной предметный терм.

Любопытна неочевидная семантическая грань; сравним, $p = \neg q$ и $p \neq q$. В первом случае все очевидно через добавление правила $p \to \neg q$, получаем соответственно: $T \Rightarrow p = p \Rightarrow p = \neg q$. Ну а второй случай больше ассоциируется с отсутствием правила $p \to q$ в R. Очевидно, что это семантически не одно и то же значение. Для первого случая возможно такое явление, как опровержимость. Оно может быть реализовано следующим образом: попробуем ввести в систему правил определения функций $R = \{\mathbf{F}p \to \mathbf{F}q, \mathbf{F}p \to \neg p, \mathbf{F}q \to \neg q\}$, – что приведет к противоречию, поскольку станет выводимо, p и $\neg p$ или q и $\neg q$ из T, и как следствие, тождество T и F, что наделяет язык свойством противоречивости. При этом мы не будем заявлять, что какое-то определение ложное, просто скажем, что они несовместимы в непротиворечивой системе. Во втором случае мы не будет объявлять отношение между p и q в грамматике, что предоставит невыводимую формулу, причем не одну. Рассмотрим эти невыводимые выражения в метаязыке: $p = q$ либо $p = \neg q$, поскольку третьего не дано – это про высказывания. Какая-то из этих формул должна быть истинной; но, а поскольку мы не наделили грамматику правилом, связывающим эти переменные, эти формулы не опровержимы, хотя и верифицируемы средствами языка грамматики. Определение понятия переменной наделяет само это понятие неоднозначностью, что и порождает подобный эффект. Может показаться, что мы задаем значения переменной явным образом, связывая с объектами нетерминального словаря. Однако эта связь осуществляется через правила подстановки P, изменяющие семантическое содержание подменяемых слов, в отличие от R.

Таким образом, мы интерпретируем проверку гипотез следующим образом: гипотеза есть некоторое правило семантической эквивалентности, для нее существуют две возможности; либо она выводима из T или F и мы заявляем, что гипотеза доказана и является теоремой в первом случае или опровержима во-втором, либо это правило не подтверждаемо и не опровержимо средствами языка, и его можно как отбросить, так и добавить к правилам грамматики, тем самым расширив язык по типу добавления новой, непротиворечивой для существующей системы, аксиомы.

О самоприменимости

При анализе языка мы сразу определились, что хотим избежать самоприменимости. Рассмотрим этот аспект в деталях. Очевидный пример, иллюстрирующий нежданно возникающее противоречие связан с так называемой наивной теорией множеств; на этапе возникновения новая теория сулила многообещающие возможности касательно логического построения всех известных на тот момент разделов математики, – но дала не менее важный результат, выраженный через антиномию Рассела. Этот парадокс больше известен в форме вопроса о содержании множества всех множеств самого себя в качестве элемента; в более формальном виде он описан в виде существования для высказательной функции Φ множества, состоящего только из тех элементов, которые удовлетворяют этой функции, $\Phi(x) = (x \text{ есть множество}) \wedge (x \notin x)$ [KurMost]. Эта антиномия тесно связана с антиномией Кантора, открытой еще ранее [FrBar].

Здесь же, в рассуждении о самоприменимости, мы считаем необходимым упомянуть один из древнейших парадоксов – парадокс лжеца. Детальный разбор примера можно посмотреть в упомянутой работе Тарского [Tar].

Мы хотим рассмотреть еще более простой пример, поскольку полагаем, что простые понятия ярче иллюстрируют всю концепцию. Пусть символ $\mathbb{W}$ обозначает, или семантически тождествен, слову «$\mathbb{W}ord$», запишем $\mathbb{W} = \mathbb{W}ord$. Это, на первый взгляд, может быть удобным: вместо какого-либо длинного слова, мы подставляем часть его, имеющую тот же смысл. Однако, это приведет к следующей рекурсивной цепочке: $\mathbb{W} = \mathbb{W}ord = \mathbb{W}ordord = \mathbb{W}ordordord = \cdots$.

Причину избегать подобных саморекурсивных конструкций мы видим в семантическом противоречии, которое сейчас попытаемся раскрыть. Наделяя как минимум два слова $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}ord$ одним семантическим значением, мы неявным образом, безучастно, можно сказать, обеспечиваем подслово «ord» отсутствием значения, поскольку оно все заключается в символе «$\mathbb{W}$». Значит, раз оно не имеет смысла, оно должно быть именно таковым; однако, скорее всего, это свойство не предусматривалось в этой конструкции. А вот наоборот предположить не получится; нельзя связать «$\mathbb{W}$» с отсутствием значения, в то время как за другой частью его усматривать.

В связи с этим вопросом считаем необходимым упомянуть математический объект, обладающий описанным свойством, а именно саморекурсивностью, или самоприменимостью, – это ноль. В самом элементарном контексте арифметики это свойство очевидно: $0 = 0 + 0$. Ноль же наделяет этим свойством, но уже в контексте операций сложения и вычитания, любые другие объекты по идемпотентной схеме $x = x \pm 0$. Усмотрев эту ключевую особенность для нуля, полагаем, что подход к этому семантическому объекту должен быть особенно щепетильным. Другой подобный объект, отображаемый символом «∞», ведет себя схожим образом, сравним: $1 = 1 + 0$ и $\infty = \infty + n$, где n – произвольное число.

В результате, мы получаем рецепт для различных форм антиномий, которые заключаются в содержании самоприменимости для парадоксального объекта. Суть его такова: мы берем некоторое новое понятие, терм, и определяем его таким образом, что внутри определения имеется слово, обозначающее этот терм. Иными словами, антиномию задает тавтологическое определение по схеме: «x это такой x, что …». Эта концепция, очевидно, будет работать для произвольных языков, поскольку связана именно с семантической структурой.

Для последующего изложения нам потребуется концепция исключающего или; дадим ей определение посредством грамматики. $V_T = \{\overline{\vee}\}$, $V_N = \{\mathbf{Fxor}xy, x, y\}$, $R = \{\mathbf{Fxor}xy \to x \,\overline{\vee}\, y, T \,\overline{\vee}\, x \to x = F, F \,\overline{\vee}\, x \to x = T, \dots\}$, $P_{\mathbf{Fxor}xy} = \{x \to T, y \to T, x \to F, y \to F\}$; – опять же, мы опускаем правила, выражающие свойство коммутативности, не расписываем свойства переменных.

Убедимся в актуальности предложенной формы, рассмотрев известнейший парадокс; только мы его не будем объяснить, или анализировать, а наоборот, как бы сконструируем. Дадим определение терму: «житель деревни» – объект «бритый собою» или «бритый брадобреем» (обозначаем предикат Sd от «shaved»), $x: Sd\,(x) \,\overline{\vee}\, Sd\,(y)$ (это общезначимая формула). Парадоксальность возникает, когда мы усматриваем, что терм «житель деревни» может быть подменен на другой терм – «брадобрей» (y), хотя это и не одно и тоже; семантически, брадобрей – это также житель деревни. Получаем: «брадобрей» – объект «бритый собою» или «бритый брадобреем», $y: Sd(y) \,\overline{\vee}\, Sd(y)$ (эта формула также общезначимая), но эта формула уже ложная, поскольку применяется строгая дизъюнкция; сделаем для брадобрея нестрогое условие, $y: Sd(y) \vee Sd(y) = Sd(y)$. Последняя формула отражает возможный факт, что брадобрей, в общем-то подразумевается, бреется сам.

Парадоксальность возникает, из предположения, что понятие «житель деревни» может принимать значение «брадобрей», иначе говоря, $\exists x: x = y$. Здесь под понятием «житель деревни» скрывается сущность переменной, которая может принимать значение «брадобрей». Но такое логически недопустимо, поскольку становится выводима формула $Sd(y) \,\overline{\vee}\, Sd(y) = Sd(y)$; что противоречит определенному понятию строгой дизъюнкции. В нашей интерпретации это кратко может быть сформулировано следующим образом: $R = \{T \to \mathbf{Sd}x \,\overline{\vee}\, \mathbf{Sd}y\}$, $P_{\mathbf{Sd}x} = \{x \to a, x \to b, \dots, x \to y\}$, – где допустимость последней подстановки $x \to y$ и вызывает логическое противоречие.

Конечно, рассматривая, или конструируя, структуру самоприменимости в естественном языке получается не все очевидно; налицо семантическая изобретательность, присутствие контекста и прочие обстоятельства, обеспечиваемые безграничными выразительными средствами естественного языка; но этот принцип, который описывается, как самоприменимость, лежит в основе.

Хотим предложить интерпретацию парадокса лжеца, выражающемся в следующем высказывании: «Это высказывание ложно». Может показаться, что здесь имеется простая функция отрицания; и высказывание ложно, если оно истинно, и наоборот. Однако, поскольку имеется указание на само себя, вывод ложности высказывания требует его переоценку, и происходит логическое замыкание в *circulus in definiendo*. В нашей же интерпретации посредством формальных грамматик получается следующее: мы добавляем к системе правил следующую замену: $R = \{p \to \neg p\}$, где p – логическая переменная, а $\mathbf{F}p$ будет произвольной функцией от этой переменной. Тогда мы получим $\mathbf{F}p = \mathbf{F}\neg p$, что при замене дает $\mathbf{F}T = \mathbf{F}F$. Вот последнее равенство и сигнализирует о противоречии языку логики, поскольку противоречит значению символа равенства, определенное посредством символов T и F, как симметричное отношение. Внесение данного выражения в язык сделает его полным, в то же время, семантически бесполезным. Этим самым примером мы хотим показать, что язык логики при должном обращении самостоятельно отторгает так называемые антиномии.

Под предложенную концепцию, полагаем, попадают многие парадоксы; мы не будем их разбирать детально, однако уже в их формулировке заметно замыкание какого-либо определения на самом себе. Формальная логика, как часть языка, неотрывно обслуживает семантические объекты, иначе она получается бессмысленной, что противоречиво.

Тем не менее, ожидаем, что избежать самоприменимости при конструировании некоторых фундаментальных объектов математики просто не удастся. Это предмет также обсуждается в работе Френкеля и Бар-Хилела вместе с анализом эффекта самоприменимости и предоставлением ссылок на обширную литературу, посвященную популярной на то время проблеме антиномий [FrBar]. Понимая логические проблемы, связанные с этой концепцией, будем подходить к анализу подобных конструкций с особой осторожностью.

Об элементарности символа

Здесь мы подошли к этапу уточнения, какую смысловую нагрузку мы возлагаем на термин «символ». Использование терминологии и соответствующих понятий формальных языков считаем недостаточно определенной. В качестве элемента, или составной части слова, подразумевается мельчайшая грамматически занимаемая его часть – определение термина «морфема». Однако может подразумеваться составление морфемы как из одного, так и из нескольких символов, иначе говоря, понятие морфемы не подразумевает понятие символа. Хотя в контексте грамматики морфема – есть мельчайшая значимая часть, что-то вроде символа грамматики, но морфемы могут использовать одни и те же символы; значит, понятие символа не заменяется и внутри грамматики. Считаем данное понятие проблематичным в логическом плане и не будем его заимствовать для последующих рассуждений. Выстраивать логическую систему, полагаем, удобнее на более очевидной концепции – символа, или буквы.

Мы пытаемся перенять некоторые идеи Ч. Пирса; мы их полностью и всецело разделяем. В частности, что мышление осуществляется посредством знаков, а логика может рассматриваться, как наука об общих законах знаков; люди и слова взаимообучают друг друга; логика занимается отсылкой символов к объектам и т.п. [Peir] – все так. Символ можно понимать как дискретно различимый умственный акт или идею, индуцированную другой идеей. Любое чувственное восприятие: звук, зрительная форма, тактильные ощущения и т.п. – это сама идея, которая индуцирует другую идею; и этот процесс, в свою очередь, может быть подменен символьной записью.

Для того, чтобы использовать понятие символа, или буквы, в формальном дискурсе мы явно и однозначно, на основе гегелевского метода, отделим понятие символа от другого понятия, символом не являющимся – слова, подразумеваемого, как цепочки, состоящей более, чем из одной буквы.

Дадим определение в контексте дискуссии; символ, или буква, – однозначно определяемый объект языка, имеющий физическую форму и определяемый по этой форме всеми субъектами, или пользователями, языка и не имеющий какой-либо определенной связи с конкретным значением. Здесь мы абстрагируем общее понятие символа и отгораживаемся от символов, имеющих явную ассоциацию с каким-либо понятием. Также, вроде бы не примечательная по отношению к другим буквам греческого алфавита, буква «π», имеет жесткую семантическую ассоциацию с отношением периметра окружности к диаметру. Так, под понятием символ, или буква, мы будем понимать некий произвольный символ, не имеющий какой-либо уже заранее определенной семантической ассоциации, значение которого определяется исключительно посредством прочтения в контексте других символов.

В связи с изложенным представлением дадим первоначальное понятие символу «$\in$», используемом в теоретико-множественном подходе; в классической теории ZF изложении означающим «быть элементом множества». Мы будем понимать фразу $x \in X$, как «символ x содержится в цепочке X», причем сочетание «$\in x$», где x – символ, будем считать бессмыслицей, т.е. не являющейся частью языка; иначе говоря, не допускаем высказываний об элементе какого-либо символа, ровно, как и самоприменимость высказываний об элементе.

Попробуем определить вышесказанное более формальными методами, с помощью грамматики. Будем считать очевидным, что предыдущие значения логических символов, а главное, символа равенства, уже задано. Получаем: $V_T = \{\in\}$, $V_N = \{T, F, a, b, A, B, C, D\}$, $R = \{A \to aa, B \to ab, C \to ba, D \to bb, T \to a \in A, T \to a \in B, T \to$

$a \in C, F \to a \in D, F \to b \in A, T \to b \in B, T \to b \in C, T \to b \in D\}$, где целями грамматики ставятся отыскание истинных или ложных значений.

Заметим, что в рассуждениях может усматриваться аналогия с рекурсивно перечислимым множеством, задаваемого канонической системой Поста. Это естественно, поскольку система разрабатывалась на основании конструктивных представлениях о математике. В текущим дискурсе мы не будем перенимать терминологию, поскольку определяемые понятия отличаются. Оправданность данного подхода, считаем, может быть обоснована полученными результатами.

Рассмотрим операцию алфавитного отображения исключительно в контексте кодирования одного языка в другой, причем, подразумевается взаимооднозначное, функциональное, отображение, или биекция. Для этих целей подойдет форма грамматики автоматного типа, которая в качестве цели использует произвольную цепочку символов языка, скажем, L_1 с алфавитом $A(L_1) = \{a_1, \dots, a_n\}$, соответствующую нетерминальному словарю грамматики, в качестве цели. В качестве языка-кода будет выступать язык L_2 с алфавитом $A(L_2) = \{b_1, \dots, b_m\}$, в свою очередь соответствующий терминальному словарю грамматики. Правила грамматики имеют вид: $R = \{a_i \to \omega\}$, где ω – цепочка символов алфавита L_2. Как и прежде, мы предполагаем, что с использованием правил грамматики за счет организации взаимооднозначного соответствия мы сохраняем семантическое значение, только имеем возможность выражать его посредством различных языков.

Эта простая грамматическая конструкция семантически позволяет анализировать атомы какого-либо языка, т.е. его символы, и синтезировать новые атомарные объекты. При этом мы понимаем, что отношение «быть элементом» семантически ограничено исключительно конкретным языком. Например, $a_1 \in a_2 a_1 a_2 a_3$ языка L_1; переведем последнюю цепочку в L_2 с помощью правил грамматики G, $R = \{a_1 \to b_3 b_4, a_2 \to b_1 b_3 b_1, a_3 \to b_2\}$; для корректности правил главным условием является однозначное обратное преобразование. Применением грамматики переводим цепочку из L_1 в L_2 следующим образом: $a_2 a_1 a_2 a_3 \overset{G}{\Rightarrow} b_1 b_3 b_1 b_3 b_4 b_1 b_3 b_1 b_2$. Здесь очевидно, что мы уже не можем позволить сказать $b_3 b_4 \in \cdots$, хотя $b_3 b_4$ предполагается имеет тот же смысл, что и a_1; с другой стороны, $b_3 b_4$ можно интерпретировать, как подслово, т.е. $b_3 b_4 \subset b_1 b_3 b_1 b_3 b_4 b_1 b_3 b_1 b_2$. Отсюда можно ввести правила: что всякий элемент есть подслово, но не всякое подслово есть элемент, либо, что подслово элементом не является. Данные формулировки должны быть проверены на состоятельность в контексте разрабатываемого языка.

Теперь мы произведем замыкание описанных языков, инвертируя правила и словари грамматики; инвертированную грамматику назовем G^{-1}, соответственно, для нее: $G^{-1}(V_T) = G(V_N)$, $G^{-1}(V_N) = G(V_T)$, правила такие же, только слова меняются местами, $G^{-1}(R) = \{b_3 b_4 \to a_1, b_1 b_3 b_1 \to a_2, b_2 \to a_3\}$. Согласно приведенному примеру, получаем: $b_1 b_3 b_1 b_3 b_4 b_1 b_3 b_1 b_2 \overset{G^{-1}}{\Longrightarrow} a_2 a_1 a_2 a_3$. Если каждой цели грамматики G соответсвует цель грамматики G^{-1}, причем только одна, и наоборот, по сути, мы получили некую абстрактную концепцию семантического языка, который может иметь отражение, как в языке L_1, так и в L_2, вообще в любом количестве иных языков, для которых будут построена связующая автоматная грамматика. Задумка данной интерпретации состоит в том, что можно от более бедного языка, в примере это L_1, переходить к более богатому L_2, реализуя семантический анализ, при этом сохраняя тождественную связь между языками; в L_1 мы не можем раскрыть семантическую сущность a_1, поскольку это атом, символ языка, но, переходя в L_2, мы уже можем рассматривать сущность a_1 как b_3b_4, т.е., состоящую из некоторых других элементарных сущностей; при этом мы должны учитывать свойства такого перехода во избежание образования противоречий. В рамках метаязыка, осуществляющего связь L_1 и L_2, а это правила R грамматики, эти самые правила семантически выражают то, что мы подразумеваем, как определения в нашем обычном коммутативном языке. Обратное преобразование, отождествляемое с синтезом, позволяет из избыточного языка строить более простой язык и, работая внутри него, получать семантические закономерности, присущие и более сложному языку.

Главное, что мы хотим почерпнуть из представленной концепции, что биекция, или изоморфизм, указывает на единую семантическую конструкцию для разных языков; этим самым мы можем вычислять семантически однозначные вещи, но сказанные различными языками. Та или иная языковая формулировка может быть отождествлена с изменением имен семантических сущностей, которыми данная языковая система опосредованно оперирует.

О природе порядка и беспорядка

Теория множеств ZF вводит концепцию порядка посредством множественных вложений неупорядоченных элементов; упорядоченная пара определяется, как $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$; такое определение предложено Куратовским [KurMost]. Эта концепция через теорему о существовании неупорядоченных троек, четверок и т.п. основывается на теореме о существовании пары, которая доказывается через аксиомы объемности и пары; теореме о существовании суммы с основанием аксиомы суммы [KurMost]. В свою очередь, данное представление дает возможность определения отношения порядка и используется при построении натуральных чисел по схеме: $0, \{0\}, \{0, \{0\}\}$ и т.д. Мы будем оспаривать этот подход. Может возникнуть вопрос, каким образом можно оспаривать аксиоматический метод? – Если он непротиворечивый, то кажется, что остается его либо принять, либо отвергнуть по принципу *Quod gratis asseritur, gratis negatur.* Наш подход к опровержению самой концепции упорядочивания основан на естественном свойстве символов, их природе; покажем, что упорядочивание поэтому противоречит любому языку, а значит, и процессу мышления.

То, что мы, в своей сути, собираемся опровергать, это представление о конструктивном построении отношения порядка. Если принимать, согласно платонистическому воззрению, что неупорядоченные объекты просто существуют, т.е. не были сконструированы языковыми методами в рамках мыслительного процесса, – пожалуй, здесь нечего опровергать. Но вот если из этого представления исходит идея построения упорядоченных объектов, это тут же приводит к противоречию, абсурду; требуется поставить все с головы на ноги.

Начнем с элементарного примера; пусть имеется так называемый неупорядоченный набор: $\{a, b\}$. Попробуем построить из него элементарные упорядоченные наборы, только без всяких жульничеств с дополнительными символами, вроде скобок и запятых. На удивление, это не вызывает проблемы: ab, ba. Как же мы это сделали без аксиомы пары, суммы и прочего? – Естественно. Обратим также внимание, что сама запись обозначения чего-то неупорядоченного, вроде как упорядочена; у нас записано $\{a, b\}$, а ведь могли написать $\{b, a\}$, что чувственно воспринимается иначе, поскольку инскрипции различаются. Предположим возражение, что эта запись символизирует естественный объект, вроде ящика с белым и черным шарами; и никакой из этих шаров ни справа, ни слева, ни сверху, ни снизу, т.е. они находятся в беспорядке. Возразим на это аналогичным образом: при языковом, или символьном, отражении этого чувственно воспринимаемого объекта неизбежно возникнет порядок слов или символов, упорядочив эту мысленную конструкцию. Правильное описание порядка мышления следующее: сначала мы называем один объект, затем другой, только после этого говорим, что порядок указания в языке несущественен. Если возникнет возражение, что порядок чтения символов может быть, попросту, выбран произвольно, ответим, что можно это допустить, но тогда языка уже не будет.

Тот феномен, что изначально в языке имеется последовательный порядок символов, принадлежит сущности времени. Но не интуиционистскому восприятию течения времени («move of time»), сформулированном Брауэром, а посредством естественной реализации языка. Для простейших дискретно различимых элементов языка, будь то печатные символы, звуки, жесты и т.п. имеется следующее чувственно воспринимаемое свойство – они возникают. Иначе говоря, они не существуют безвременно; как в чувственно воспринимаемой реальности, так и в сознании. Они возникают посредством написания или озвучания с одной стороны и увидения или услышания – с другой. Таким образом, упорядочивание языка происходит посредством материальной среды, являющейся основой самого языка. Именно через физическое время определяется порядок прочтения символов; как правило, порядок чтения совпадает с порядком написания. Для еще более фундаментальной формы языка – основанной на звуковой символике – вопрос порядка восприятия символов не стоит вовсе. Текстовые символы связаны со временем опосредованно, поэтому позиционирование в физическом пространстве может служить инструментом устранения наведенного временем естественного порядка, так и источником заблуждения.

Попробуем разобраться, как предлагаемая позиция согласуется с довольно популярным философским воззрением на математику – интуиционизмом. Излагаемые идеи в корне противопоставлены интуиционизму в изложении Брауэра [Brou]. Во-первых, мы уже не разделяем первого акта интуиционизма, рассматривающего математику, как изначально неотождествленную с языком активность разума. Напротив, даже полагаем, что мыслительная деятельность вовсе немыслима вне языка, это уже можно связать с гегелевским представлением [Heg]. Во-вторых, не будем допускать внеязыкового, интуитивного построения таких математических сущностей, как бесконечные последовательности, закладывающих основу для множества натуральных чисел и континуума, выраженного во втором акте. Более того, это представление о бесконечных последовательностях, которое является основой для конструирования математических сущностей, нельзя отдавать на откуп доктринальной интуиции, – оно также должно быть построено языковыми средствами.

Развиваемая идея базируется на концепции конструктивизма. В качестве изложения самой идеи мы используем изложение Мартин-Лефа [MartL]. В частности, в его работе дается, пусть и довольно кратко, представление о материальной концепции знаков, являющимися суть атомами; конструктивные объекты являются в конечном счете, существующими во времени и пространстве. Такое представление впору может затронуть значимую философскую проблему главенства идеи или материи, считаем, что в рамках данной дискуссии принятие материальной составляющей символов вполне состоятельной без дополнительных уточнений. Иначе говоря, отдельные инскрипции однозначно воспринимаются, как соответствующие определенным символам, всеми участниками дискуссии.

В дальнейшем, когда нам потребуется концепция, аналогичная неупорядоченному множеству, мы поступим следующим образом: если в качестве упорядоченного множества будем рассматривать произвольную цепочку, то неупорядоченным аналогом будет цепочка, полученная из всех возможные перестановок оригинальной цепочки. Более формальным изложением займемся впоследствии.

О натуральных числах

Хотя процесс построения натуральных чисел на интуитивном уровне на удивление прост и, казалось бы, очевиден, формальное описание же этого самого построения раскрывает подводные камни этого мыслительного акта. Вся простота процесса отражена посредством конструктивного построения, где натуральные числа отождествляются с количеством элементарных символов, приписываемых друг к другу [MartL]. Хотя в данной конструкции явно не отражено семантическое отношение чисел между собой и теми сущностями, с которыми они предполагаются могут быть связаны; тем не менее, именно естественная простота дает фундаментальную основу для последующих построений. Но с точки зрения логики сам процесс получается вне поля осмысления. Классическая аксиоматика Пеано [Pean] и Дедекинда глубже отражает сам процесс, поскольку производится анализ полученных объектов посредством сравнения друг с другом. Следует отметить, что оригинальная пеановская аксиоматика натуральных чисел построена без нуля, что подразумевает некоторое особое место этой сущности, однако в современных системах, концептуально базирующихся именно на этой аксиоматике, ноль присутствует. Наиболее ярко, в смысловом отражении, и исключительно по нашему личному восприятию, концепция построения натуральных чисел отражается средствами теории рекурсивных функций; мы будем опираться на изложение Гудстейна [Goods]. Там же представлен механизм цифрового выражения числа, к которому мы также обратимся.

Попробуем определить понятия натурального числа посредством формы грамматики, а затем проанализируем предоставленную формулировку. Зададим соответствующие словари: $V_T = \{=, +, >, \geq\}$, $V_N = \{0,1,\infty, T, F, n, m\}$, $R = \{0 \to 0 + 0, 1 \to 1 + 0, \infty \to \infty + 1, \infty \to \infty + \infty,\ \mathbf{S}n \to n + 1, T \to n + m \geq n, T \to \infty > 1, T \to 1 > 0, T \to\ n \geq m = (n > m)\ \overline{\vee}\ (n = m)\}$, $S = \{n, m, T\}$, $P_{n,T} = \{n \to 0, n \to \mathbf{S}n, n \to \infty\}$. Привила, задающие свойство коммутативности сложения, определяющие свойства числа m (идентичные с n) и т.п., для краткости изложения опустим. Отметим, что в языковых правилах не определяются понятие $1 + 1$, что предоставляет возможность нового семантического построения. Отношение порядка включено в грамматику, поскольку это семантическое свойство является неотъемлемым для понятия натурального числа, хотя формально соответствующие правила можно было не включать в язык.

Под функцией $\mathbf{S}$, или предиката, как удобнее воспринимать эту приписку, мы семантически понимаем каноническое понятие «последователь числа». Проверим работоспособность представленной языковой конструкции. Получим определение последователя нуля: $\mathbf{S}0 = 0 + 1$; сравнивая с правилом для единицы $(1 \to 1 + 0)$, выводим, что языковые выражения «единица» и «последователь нуля» отражают одно и то же семантическое значение. Вывод опустим за очевидностью.

Получим следующее за единицей число, при этом, цель грамматики остается все та же: из $\mathbf{S}n \to n+1$ подстановкой $n \to \mathbf{S}n$ получим $\mathbf{SS}n \to \mathbf{S}n+1$. Подставим ноль, далее получим: $\mathbf{SS}0 \to \mathbf{S}0+1$. Поскольку у нас уже есть точное определение для $\mathbf{S}0$ – это единица, мы можем получить следующее отношение: $\mathbf{SS}0 = \mathbf{S}1 = 1+1$. При этом, нетерминальный словарь не содержал $\mathbf{SS}0$ или $\mathbf{S}1$, что тоже самое, а теперь это слово можно туда внести. По поводу его значения: у нас не найдется иного слова в нетерминальном словаре, позволяющем вывести $1+1$, таким образом, мы получили некоторое новое семантическое значение.

Грамматика, порождающая натуральные числа без нуля и бесконечности, получается гораздо проще, приведем ее: $V_T = \{=,+,>,<\}$, $V_N = \{1, T, F, n, m\}$, $R = \{\mathbf{S}n \to n+1, T \to n+m > n, \neg(n>m) \to (n<m)\,\overline{\vee}\,(n=m)\}$, $S = \{n, m, T\}$, $P_{n,T} = \{n \to 1, n \to \mathbf{S}n\}$. Для этой грамматики зададимся целью отыскания истинности отношения большинства. При этом правила подстановки те же, что и для отыскания функции последователя. Обратим внимание, что вывод из T для оценки неравенств невозможен, поскольку само понятие числа предполагает использование правил подстановки P, приводящие к семантическому изменению слова, при этом, как и сколько применяются эти правила, не оговаривается, но обратное возможно; сконструированные понятия мы уже однозначно можем проверить на непротиворечивость правилам R. Высказывание $\boldsymbol{SSSSS}1 > \boldsymbol{SS}1 \Rightarrow \boldsymbol{SS}1+1+1+1 > \boldsymbol{SS}1 \Rightarrow \boldsymbol{SS}1 + \boldsymbol{SSS}1 > \boldsymbol{SS}1$ – не противоречит правилу $T \to n+m > n$, следовательно, может быть интерпретировано как теорема и присоединено к правилам R.

В общем, рассматриваемая конструкция имеет очевидную аналогию с представлением в рекурсивной теории чисел. Однако мы допускаем в словарь знак бесконечности, и более того даем правило замены $n \to \infty$, объясняющее свойство бесконечности. Считаем, данный подход необходим для раскрытия понятия натурального числа вполне. Мы полагаем, что в отношении понятий ноль и бесконечность в современном аксиоматическом подходе присутствует некоторая недосказанность. Ноль принято считать натуральным числом, а в отношении бесконечности – ее рассматривают, как некий знак, числом не являющимся. Но бесконечность используется для описания свойств натуральных чисел. Может показаться, что ноль необходим для конструирования ряда чисел, однако это не так, вот пример – оригинальная пеановская аксиоматика. Признание того, что единица является последователем нуля совсем не означает ее конструктивное создание из нуля; это явно отражается нетерминальным языком грамматики. В свою очередь, ноль, как и бесконечность, не являются последователями какого-либо другого числа (в представленной грамматике бесконечность является последовательностью бесконечности). Очевидна аналогия идемпотентного свойства нуля и бесконечности относительно сложения: $0 \to 0+0, \infty \to \infty + \infty$, – последнее свойство имеет ассоциацию, как в теории множеств через мощностную интерпретацию, так и в теории пределов последовательностей. В связи с очевидной, в выражении посредством формальной грамматики, семантической идентичностью данных понятий, мы убеждены в математической актуальности идей Гегеля относительно природы бытия и ничто и перехода, как такового, – «движение вперед есть возвращение назад в основание, к первоначальному и истинному, от которого зависит то, с чего начинают, и которое на деле порождает начало» (в переводе) [Heg], просто выраженных в иной языковой форме. Допустим, мы дадим определение натурального числа, как некой сущности, полученной определенным образом с помощью единицы и нуля – в это определение сам ноль не подпадает. Отразив, что счет имеет начало в виде нуля, не отразив, что он заканчивается бесконечностью – непоследовательно; в то же время, начав с единицы, вполне уместно остановиться на любом натуральном числе, что и показано в грамматике без ноля и бесконечности. Семантически очевидно, всякая конечная сущность должна иметь как начало, так и окончание; для чего-то бесконечного мы, тем не менее, допускаем существование начала. А может ли быть так, что начала не существует? С платонической позиции воззрения, по-видимому, получается, что бесконечная сущность, поскольку она уже существует, не должна иметь ни начала, ни конца, однако с конструктивной позиции любое построение, даже чего-то бесконечного, в своей идее должно с чего-то начинаться.

Решить дилемму поможет пристальное рассмотрение концепции: при написании ряда натуральных чисел порядок, или последовательность, написания и чтения совпадают; соответственно при написании и чтении имеется начало – единица, а последнего числа прочесть нельзя. Изменим порядок чтения: пусть пишется, как и раньше, только читать будем с конца написанного – ничего рационального данный подход не обещает. Но мы можем поступить очень просто: поменять семантические начало и конец местами, ведь сами эти понятия в отрыве друг от друга смысла не имеют. Теперь мы будем писать и читать символы в другом направлении, противоположному изначальному. Концептуально, это ряд отрицательных целых чисел; известно, чем этот ряд ограничен сверху – нулем, он больше любого отрицательного числа, а начало этого ряда – также бесконечность.

Мы можем построить отрицательные числа в отрыве от положительных; для этого достаточно произвести следующее очевидное алфавитное отображение: $n \to -n, \infty \to -\infty, + \to -$, – попросту дописав для каждого натурального числа знак минус. Это, в свою очередь, будет означать, что выполнено взаимно-однозначное отображение языков, по сути, ничего нового не произведено. Поэтому, интерес представляет построение отрицательных чисел в контексте существования положительных.

Следующая грамматика описывает механизм порождения отрицательных чисел: $V_T = \{+,-\}$, $V_N = \{0,1,\infty,T,F,n,m\}$, $R = \{0 \to 0-0, 0 \to 1-1, \infty \to \infty - 1, \infty \to \infty - \infty, \mathbf{S^{-1}}n \to n-1\}$, $S = \{n,m,T\}$, $P_{n,T} = \{n \to 0, n \to \mathbf{S}n, n \to \mathbf{S^{-1}}n, n \to \infty\}$, здесь мы уходим от аналогии с рекурсивной арифметикой, определенной на натуральных положительных числах. Но при формировании языка, описывающего целые числа, мы теряем свойство порядка, поскольку прежние правила, справедливые для натуральных чисел, уже не применимы. Рассмотрим правило $T \to n+m \geq n$, – оно уже несправедливо, поскольку ведет к противоречию, поскольку, если m – отрицательное число, а n – положительное, получается противоречие. Развивая мысль, получается следующее: ноль меньше любого положительного числа, но в тоже время больше любого отрицательного; что интересно, для бесконечности – все наоборот. При этом, мы не собираемся вводить новую сущность в виде «минус бесконечности», это будет все та же, единая, бесконечность. Для того, чтобы язык был непротиворечивый, необходимо принять, что бесконечность больше любого положительного числа, но в то же время меньше любого отрицательного. Может возникнуть возражение, что правило $\infty \to \infty - \infty$ логически необоснованно, требуется принять $0 \to \infty - \infty$. Но тогда: $\infty - \infty \Rightarrow \infty - \infty + 1 \Rightarrow 1$, что даст противоречие, поскольку мы различаем семантические понятия единицы и бесконечности.

Таким образом, чтобы сохранить упорядочивание, необходимо качественно различать числа положительные от чисел отрицательных. В этом случае построение отрицательных чисел будет семантически отделено от прежде построенных натуральных: $V_T = \{+, >, <\}$, $V_N = \{(-1), T, F, k, l\}$, $R = \{\mathbf{S^{-1}}n \to n + (-1), T \to k + l < k, \neg(k < l) \to (k > l) \,\overline{\vee}\, (k = l)\}$, $S = \{k, l, T\}$, $P_{k,T} = \{k \to -1, k \to \mathbf{S^{-1}}k\}$, – а по сути, повторять ту же самую языковую структуру.

Семантическое языковое объединение этих отдельных языков осуществляется посредством правил: $R = \{1 \to \mathbf{S}0, (-1) \to \mathbf{S^{-1}}0, n \to n + 1 + (-1)\}$. Таким образом, мы показываем, что, по крайней мере, отрицательные числа образованы из грамматики натурального ряда, просто по дефинитному различению с числами положительными, образованными тоже из грамматики натурального ряда. Ноль остается единой сущностью как для грамматики, строящей положительные числа, так и для той, что строит отрицательные. Сравнение, иначе говоря, упорядочивание чисел, осуществляется через ноль: ноль больше любого отрицательного числа, но меньше любого положительного. А вот для бесконечности получается, что она меньше любого отрицательного и больше любого положительного. Ноль и бесконечность противоречат друг другу при сшивке двух грамматик натуральных чисел, по-видимому, являясь некой единой сущностью. Но можно поступить иначе: не включать ноль, а производить сравнение положительных и отрицательных чисел через бесконечность. Это можно выразить следующей схемой: $1 < \cdots < n < \infty < k < \cdots < -1$. Сравнивая через бесконечность, когда ноль в языке отсутствует, мы получили, что всякое, то, что мы называем отрицательным числом, больше любого положительного. В конце концов, это не более, чем условность; сравним: $k < \cdots < -1 < 0 < 1 < \cdots < n$. Различение плюс-минус бесконечности позволяет добавить эту сущность к грамматике без создания противоречий.

Как мы показали, никакой новой языковой сущности не образовано; поскольку языковое отображение произвольное, а существование биекции указывает на семантическое единство языковых конструкций. Поскольку в сшитой грамматике целых чисел нельзя оставить бесконечность, она выражает собою грамматику натуральных чисел без нуля и бесконечности. Вот ее формулировка: $V_T = \{+, -, >, <\}$, $V_N = \{1, T, F, n, m\}$, $R = \{\mathbf{S}n \to n + 1, \mathbf{S^{-1}}n \to n - 1, n \to n + 1 - 1, T \to n + m > n, \neg(n > m) \to (n < m) \,\overline{\vee}\, (n = m)\}$, $S = \{n, m, T\}$, $P_{n,T} = \{n \to 1, n \to \mathbf{S}n, n \to \mathbf{S^{-1}}n\}$. Эта грамматика объясняет, что подразумевается под отрицательным числом, однако новых сущностей не образует; это видно по нетерминальному словарю. В качестве отрицательного числа выступает, например, следующая цепочка: $\mathbf{S^{-1}S^{-1}S^{-1}S^{-1}}1$, – представляет число минус три, а ноль, соответственно, выражается, как $\mathbf{S^{-1}}1$.

Отличие последней грамматики целых чисел от грамматики натуральных главным образом в том, что концепция нуля не требует самостоятельного выражения, а появляется, как следствие определения обратной функции последователя, так что выражение $\mathbf{S^{-1}}1$ семантически является нулем.

Понятно, какое свойство добавляет грамматике другой тип функции по отношению к понятию «последователь числа». Мы хотим разобраться, может ли данная концепция добавить чего-то нового к языку натуральных чисел. Для этого необходимо произвести ассоциацию применения подстановки для образования последователя с неким значением, таким, чтобы отличать от $\mathbf{S^{-1}}$.

Пусть с функцией последователя мы будем отождествлять саму порождающую операцию. Для грамматики натуральных чисел, независимо от того, как используется буквенное обозначение, функция взятия последователя, сам факт применения любого порождающего правила P грамматики, но при условии, что была порождена новая семантическая сущность, мы будем ассоциировать с функцией взятия последователя. Здесь можно применить индексную грамматику для более формального описания процесса, но, полагаем, это излишне загромоздит описание. Правило, завершающее формирование натурального числа, $n \to 1$, будем называть терминальным.

В контексте геделевской нумерации, числа нужны для различения одних символьных цепочек от других, давая им свою нумерацию, при этом упорядочивание самих чисел принципиально не важно. Поскольку мы можем добавлять семантику упорядочивания отдельно, это самое упорядочивание можно осуществлять по ходу процесса порождения новых чисел, или языковых сущностей. Таким образом, мы показываем средствами теории формальных грамматик, что восприятие отрицательных чисел, как неких особых языковых сущностей неоправданно; по сути, это некоторая выделенная часть натуральных чисел, для которых произвольно было добавлено свойство «быть отрицательным числом». По такому принципу можно создавать сколько угодно различных качественных чисел с особым взаимодействием. Например, по аналогии породим язык с четырьмя различными качествами элементов (a, b, c, d), выраженных посредством неких произвольных правил, таких что элементы a и b дают c, b и c дают d, а a и d уничтожают друг друга: $V_T = \{1\}$, $V_N = \{n\}$, $R = \{\mathbf{SaSb}n \to \mathbf{Sc}n, \mathbf{SbSc}n \to \mathbf{Sd}n, \mathbf{SaSd}n \to n\}$, $S = \{n\}$, $P_n = \{n \to 1, n \to \boldsymbol{Sa}n, n \to \boldsymbol{Sb}n, n \to \mathbf{Sc}n, n \to \boldsymbol{Sd}n\}$. Вполне очевидно, что эта грамматика также порождает новые взаиморазличные семантические сущности, а то, как их использовать, или что они обозначают, уже описывается правилами R грамматики.

Подытожим результаты настоящего параграфа; мы полагаем понятие натурального числа, как языкового объекта, заключается в возможности отождествления с произвольной языковой сущностью. Возможность бесконечного создания натуральных чисел делает их основой для моделирования языка любой сложности. Такие семантические понятия, как ноль или бесконечность, вводятся отдельно от единицы, их участие в форматировании концепции натурального числа не требуется. Порождающая грамматика для натуральных чисел может быть представлена в следующем виде: $V_T = \{1\}$, $V_N = \{n\}$, $R = \{\mathbf{S}n \to 1n\}$, $S = \{n\}$, $P_n = \{n \to 1, n \to \mathbf{S}n\}$, а еще проще, без посредства представления о функции, или предиката, последователя $V_T = \{1\}$, $V_N = \{n\}$, $R = \{\}$, $S = \{n\}$, $P_n = \{n \to 1, n \to 1n\}$. Данную грамматику будем обозначать, как грамматика N. Иначе говоря, натуральное число, или геделевская нумерация есть односимвольное выражение чего-либо. Однако данная грамматика может выразить только одно единственное число, но не какую-либо последовательность. Для создания этого понятия требуется символ-разделитель.

О языковой интерпретации ряда натуральных чисел

Для того, чтобы разобраться, какие суждения о числах уместны, а какие – нет, необходимо соотнести с понятием числа соответствующее объективное языковое понятие. Ведь мы говорим о числах в рамках языка, значит и числа – это не более чем объекты языка с некоторым, пусть и неоднозначно, или не вполне осознаваемым, но все же смыслом.

В нашей интерпретации все будет очевидно: единица, как число, будет ассоциировано с семантическим атомом произвольного языка, в то время как ноль будет ассоциироваться с семантическим разделителем, это свойство обеспечивается грамматическим правилом $R = \{0 \to 00\}$ для нуля, а для единицы $P = \{1 \to 11\}$, уже обеспечивающее различение значения. Последующие за единицей натуральные числа мы будем отождествлять с понятием конструктивные, поскольку они были получены из изначального, неконструктивного понятия, представляющегося единицей. В алфавите любого языка содержится конечное число символов больше одного; соответственно, закодируем каждый символ по следующей произвольной схеме: $01\dots0$. Представленная кодировка является интерпретацией геделевской нумерации. Любая символьная цепочка произвольного алфавита может быть представлена некой уникальной числовой записью. Например, алфавит $A = \{a, b, c\}$ может быть закодирован в числовой форме как $A = \{010{,}0110{,}01110\}$, ну а произвольная цепочка этих символов, скажем «cab», приобретает числовое выражение $011100100110 \Rightarrow 0111010110$.

Для соотнесения результатов предыдущего параграфа с задачами настоящего, обеспечим следующее алфавитное отображение: $R = \{\mathbf{S}1 \to 11\}$, – что обеспечивает замену функционального выражения произвольного числа конкатенативной записью, принятой в конструктивной концепции. В качестве примера, произведем перевод записи числа, скажем, 0111110, из геделевской записи, т.е. из языка, алфавит которого состоит из двух символов $A(L_G) = \{0{,}1\}$, в язык с алфавитом из четырех символов $A(L_4) = \{0', 1', 2{,}3\}$ по очевидному алгоритму, принятому и для десятичной системы, обеспечивающий взаимно однозначное отображение, символ разделителя опустим. Для наглядности представим число в виде суммы чисел, записанных в разных языках: $0111110 + 0' \Rightarrow 011110 + 1' \Rightarrow 01110 + 2 \Rightarrow 0110 + 3 \Rightarrow 010 + 1'0' \Rightarrow 0 + 1'1'$. Заметим, что хотя мы используем одни и те же инскрипции единицы и нуля, мы отождествляем их с конкретным языком; штрихи указывают на различные свойства символов в разных языках, это семантически другие символы. Теперь произведем обратный перевод по некоторому произвольно заданному алфавитному отображению $R_{L_4 \to L_G} = \{0' \to 010, 1' \to 0110{,}2 \to 01110{,}3 \to 011110\}$; получим: $1'1' \Rightarrow 0110110$. В нашей семантической интерпретации для двух цепочек в геделевской системе мы получили одно и то же значение: $0111110 \Rightarrow 0110110$. Очевидно, что эта конструктивная схема будет работать при кодировании в любой произвольный язык, будь то машинный, или коммутативный, или еще какую произвольную символьную систему.

Цепочку символов вида $1 \dots 1$, т.е., цепочку, не содержащую в себе нули, мы будем называть символом в геделевском алфавите; любые произвольные цепочки, состоящие из таких символов и включающие нули, будем называть словами, или цепочками, наследуя терминологию теории алгоритмов. Ноль здесь несет смысл символа разделителя, так что изолированная цепочка 111 имеет то же значение, что и 01110. Мы получили в нашей интерпретации следующий результат: любому символу в геделевской нумерации семантически соответствует, как минимум, одно слово, полученное взаимооднозначным отображением для произвольного языка.

Рассмотрим язык арифметики, как известно, являющимся непротиворечивым, как метаязык языка L_G. Пусть символ в L_G соответствует понятию числа в арифметике, а произвольное высказывание о числе в арифметике будет соответствовать слову в L_G. Отсюда получаем, что каждый символ в L_G семантически связан с множеством слов L_G, потенциально вроде бы бесконечным, поскольку мы полагаем, что произвольное число можно выразить бесконечным количеством формул в арифметике. Мы подразумеваем процесс создания символа конструктивным актом, поэтому возможности для словесного выражения конкретного символа комбинаторно ограничены имеющимися в распоряжении другими символами. Иными словами, если количество символов конечно, то и описательное множество конечно, и наоборот. Арифметика обеспечивает, что для каждого символа L_G сопоставлен свой набор слов в L_G, причем не существует символов, имеющих хоть одно совпадающее словесное выражение, что и обуславливает свойство непротиворечивости. Заметим, чтобы сказанное выполнялось, ноль требуется не считать натуральным числом, или не считать символом L_G, иначе любому натуральному числу будет возможность сопоставить тривиальный ряд, содержащий помимо самого числа, сколь угодно длинную последовательность нулей.

Итак, мы предлагаем следующую интерпретацию геделевской нумерации: для произвольного языка можно осуществить его взаимно однозначное отображение в L_G, где символы, или номера, будут соответствовать всем возможным семантическим значениям, выражаемым неким рассматриваемым языком. Причем, эти же самые символы могут быть выражены некоторой комбинацией, или цепочкой, других символов. Например, для арифметики занумеруем цифры соответствующими геделевскими числами; нолю сопоставим номер десять, знак сложения пусть будет одиннадцать. В теоремах Геделя используется куда более сложная нумерация, здесь важен сам принцип, конкретная же реализация является произвольным актом. Тогда получим, что некоторое элементарное арифметическое выражение, например, $4+5$ в L_G примет форму $4 \cdot 11 \cdot 5$ (в качестве знака разделителя используем точку для краткости записи), что семантически соответствует числу 9. Здесь важна оговорка, что эта самая концепция будет актуальна для любого языка, поскольку для любого языка сам механизм перехода в L_G и обратно одинаков. Но в отличие от непротиворечивого языка арифметики для произвольного языка возможны противоречия, заключающиеся в том, что разным символам в L_G могут быть сопоставлены одинаковые цепочки средствами анализируемого языка.

Предложим грамматику, порождающую ряд натуральных чисел и рассмотрим ее свойства. Отметим, что мы не будем задавать алгоритм последовательного порождения натуральных чисел, это избыточно накладно в языковом выражении; смысл системы таков: грамматика способна к порождению произвольного ряда натуральных чисел. Поскольку упорядочивание, как некий семантический акт, выраженный правилами грамматики, мы предполагаем, можем осуществлять вторично после порождения, то и последовательность чисел не важна. Однако важно наличие повторений. Грамматика способна порождать повторяющиеся слова; но поскольку нас интересуют только уникальные слова, то мы полагаем их не создавать или отбрасывать, как договоренность по поводу цели использования грамматики.

Эта грамматика может быть представлена следующим образом: $V_T = \{1{,}0\}$, $V_N = \{n\}$, $R = \{0 \to 00\}$, $S = \{n\}$, $P_n = \{n \to 10n, n \to 1n\}$. Эта структура мало чем отличается от грамматики N для натуральных чисел; более того, это тоже выражение натуральных чисел. Только в данном случае используется двухсимвольная запись; можно рассуждать, что этот язык как бы включает язык, порожденной грамматикой N, выведенной в предыдущем параграфе. Также можно отметить, что нетерминальный символ n не удаляется правилами грамматики, и имеет другую интерпретацию. Здесь n уже нельзя интерпретировать, как переменную, поскольку правило $n \to 10n$ эту возможность исключает. Мы предлагаем заменить символ n другим, вид которого больше подходит к смысловой ассоциации для полученной структуры, сравним: $V_T = \{1,0\}$, $V_N = \{\infty\}$, $R = \{0 \to 00\}$, $S = \{\infty\}$, $P = \{\infty \to 10\infty, \infty \to 1\infty\}$. Данная грамматика – будем называть ее $N\infty$, – в отличие от грамматики N, не имеет собственного терминального правила, однако порождая метаязык языка N, имеет в нем любую совокупность слов языка N, причем в качестве терминального выражения выступает символ-разделитель. Подытоживаем: мы построили грамматику для порождения бесконечной последовательности, или цепочки, натуральных чисел. Полагаем, что данная грамматика, вместе с грамматикой N в достаточной мере раскрывает такие понятия, как единица, ноль, бесконечность, натуральное число, последовательность чисел. Произвольная конечная цепочка получается из любой цепочки $N\infty$ путем отбрасывания символа ∞, что символично. Также цепочку $N\infty$ можно ассоциировать с языком в контексте теории формальных языков; только здесь под языком уже понимается не множество всех цепочек, образованных грамматикой языка – под это понятие подходит язык грамматики N, – а цепочка языка, такая что содержит в себе любую конечную цепочку языка $L(N)$.

Несколько видоизменим грамматику $N\infty$, так, чтобы она порождала терминальный язык. Грамматику, порождающую произвольный ряд терминальных цепочек, можно задать следующим образом: $V_T = \{1\}$, $V_N = \{0, \infty\}$, $R = \{0 \to 00, \infty \to 0\}$, $S = \{0\}$, $P = \{\infty \to 10\infty, \infty \to 1\infty\}$. Последняя грамматика ($N0\infty$) выражает семантическую тождественность знаков нуля и бесконечности, причем, по-прежнему способна порождать цепочки, имеющие семантическое различие за счет интерпретации правил P.

Введем язык $L(0)$ с алфавитом из одного символа, его грамматика: $V_T = \{\}$, $V_N = \{0\}$, $R = \{0 \to 00\}$, $S = \{0\}$. Тогда язык грамматики $N0\infty$ является итерацией произведения языка грамматики N и языка $L(0)$: $L(N0\infty) = \big(L(0)L(N)L(0)\big)^*$. Здесь под итерацией понимается формальное понятие теории алгоритмов.

Данная конструкция позволяет нам обосновать следующую элементарную, или концептуальную, модель языка. Языком объектом будет являться односимвольный язык L_{G1}, по сути, являющийся механизмом геделевской нумерации для произвольно взятых семантических сущностей, данный язык представляет собой натуральное число, сопоставленное, или закодированное, некоему сложному символьному выражению в другом языке; метаязыком в отношении L_{G1} мы предлагаем двухсимвольный язык L_{G2}, содержащий в себе, помимо слов L_{G1}, несущих какие-то семантические значения, слова-разделители, которые никакого самостоятельного значения не несут (это свойство выражено грамматикой $N\infty$, описанной выше); языком-замыканием, или метаязыком в отношении L_{G2}, будем считать двухсимвольный язык L_G, ставящий в соответствие каждой цепочке языка L_{G1} цепочку языка L_{G2}, обеспечивающий гомоморфное отображение, причем, предполагается, что отображение основывается на семантическом тождестве.

При таком подходе получается, что любое выражение в предлагаемом L_G языке можно интерпретировать, как определение. Некая семантическая сущность, представленная натуральным числом, выражается, или закодирована, через конечную цепочку других натуральных чисел. Попробуем разобраться, является ли данная концепция универсальной; то есть, можно ли свести все функции какого-либо языка, как набора определений.

Заниматься анализом лингвистических формулировках относительно функций языка считаем неуместным в контексте формальной дискуссии. Определим единственной функцией языка, причем любого, как знаковой системы, синтез и передачу некоего значения, или смысла. Употребление термина «информация» не уточнит понятие, поскольку сам этот термин в контексте теории информации ассоциирован с формальным представлением о «количестве информации» и «информационной энтропии», что специализирует сам термин. Поясним: различные варианты записи одного и того же звукового сообщения различными средствами, или с помощью различных инструментов, в информационном представлении могут, и скорее всего будут, различаться, однако в семантической ассоциации будут идентичными. Эта семантическая связь одних информационных сообщений с другими была произведена вне языка-носителя информации. Это однозначное отображение, или кодирование, обусловлено значением.

Для коммуникативных и машинных языков предоставленное выражение функции языка считаем вполне приемлемым без дополнительных пояснений. Для произвольной знаковой системы, например, языка музыки определение также сохраняется. Допустим, некоему музыкальному произведению мы ставим в соответствие некий смысл, или значение, которое оно передает. Это ведет к тому, что мы сопоставляем с этим значением уникальное натуральное число. Но поскольку мы анализируем данное музыкальное произведение, как последовательность музыкальных звуков и интервалов, которым тоже можно сопоставить значения в виде натуральных чисел, данное значение обретает двойственное выражение в виде отдельного числа и в виде цепочки чисел.

Таким образом, мы предлагаем произвольную знаковую систему сводить к описанному языку натуральных чисел, причем, для любой знаковой системы данный язык будет единственным. С позиции теории алгоритмов и рекурсивных функций это видение, в общем-то, тривиально – рассматривается язык типа 0. Однако мы планируем рассматривать с этой позиции произвольную языковую систему, но не только в контексте действия алфавитных операторов, а учитывая семантические ассоциации.

Об исключении языковой двойственности

Сама идея интерпретации геделевской нумерации путем связки с определенным символом цепочки символов концептуально очень проста. В то же время, настоящие символьные системы так не строятся, или строятся не так: они имеют ограниченное число символов, выраженных через концепцию алфавита символьной системы, по определению являющейся конечной совокупностью объектов.

Для кодирования произвольного текста в L_{G2} можно использовать произвольный код, ставящий каждому символу исходного текста некоторое натуральное число. Поскольку алфавит языка представляет собой конечное множество символов, символы кодируемого языка заменяются на цепочки одинаковых символов – носителей значения в L_{G2}, разделенных символом-разделителем.

Даже при поверхностном рассмотрении предложенный подход приводит к дилемме. Попробуем ее выразить следующим образом. Предположим, мы рассматриваем некий простейший язык арифметики, на концептуальном уровне, не вдаваясь в избыточный формализм. Пусть символам L_G произвольно закодированы используемые символы арифметики, в том числе и цифры для записи числа в привычной десятичной системе. Тогда получается, что каждому натуральному числу языка арифметики должно семантически соответствовать слово L_{G1}, но в свою очередь L_{G1} использовалось для кодирования таких символов арифметики, как $+$, $-$, $\div$, $=$, x и т.п., которые не несут значения числа; это может быть символ операции, переменной, отношения, логического значения и т.п. Предположение того, что натуральное число может нести множественное значение, т.е. нести значение помимо своего собственного еще какое-либо, приведет к противоречию. В свою очередь, можно построить цепочки L_{G2}, которые выражают то, что принято называть, например, отрицательные, дробные, мнимые и т.п. числа, а также цепочки, не выражающие смыслового содержания в арифметике, то, что обычно называют белибердой, а в логике – выражения, не являющиеся правильно построенными формулами. Всему этому возможному набору цепочек в L_{G2} мы также должны, исходя из предложенной логики, поставить в соответствие цепочку L_{G1}. Получается, что для синтезируемых значений в L_{G2} у нас не получается сопоставить единственное значение в L_{G1}, поскольку помимо значений для натуральных чисел имеется множество отличных значений, для которых языковых средств L_{G1} не остается после сопоставления значений натуральных чисел.

Решение дилеммы мы видим в признании того, что язык, выражающий натуральные числа, когда он является языком-объектом, например, в составе языка арифметики, является неполным, поскольку он является лишь частью, или подмножеством цепочек языка натуральных чисел L_G.

Таким образом, мы предлагаем рассматривать произвольные языки исключительно в отношении единственного языка натуральных чисел, как единственного языка, обладающего свойством бесконечности, как синоним семантической полноте. Получается, если рассматривается язык натуральных чисел, как язык объект, то это предполагает существование метаязыка, включающего язык-объект, но и, помимо его, имеющего иные от привносимых языком-объектом семантических значений. Таким образом, сам язык натуральных чисел, семантически будучи языком-объектом, превращается в часть языка натуральных чисел L_G. А язык натуральных чисел L_G, поскольку содержит язык, выражающий семантические понятия, иные, чем натуральные числа, но закодированные как натуральные числа, не может семантически выразить свои цепочки, которые кодируют не-числа в языке-объекте.

Именно такой формальный подход считаем уместным при анализе в том числе и математических понятий. Может сразу возникнуть возражение, что некоторые понятия, например, отождествленные с символьными записями π, или $\sqrt{2}$, или e могут быть однозначно связаны с натуральными числами крайне сомнительным образом. Здесь укажем, что именно символьный анализ, отстраненный от семантической составляющей, навязанной сложным языком, должен выявить истинное значение этих языковых объектов через их выражение. Точно также, как мы не определяли, что же такое бесконечное повторение, или отсутствие чего-либо, вроде пустой строки, символы ∞ и 0 проявили нужные семантические свойства в грамматике $N\infty$ исключительно в контексте сохранения или изменения семантического значения при действии алфавитного оператора, при этом самим символам, очевидно, можно сопоставить некоторые натуральные числа в контексте некоторого произвольного кодирующего отображения.

Язык L_{G1} будем считать, как множество цепочек, порождаемых грамматикой N; а язык L_{G2}, как единственная цепочка, порождаемая грамматикой $N0\infty$. Грамматики этих языков по форме идентичны, что дает нам возможность рассматривать эти языки, как различные символьные выражения одного языка. В нашей интерпретации язык L_G, как семантически объединяющий L_{G1} и L_{G2}, является формой U-языка. С позиции теории формальных грамматик эти две грамматики на являются эквивалентными, поскольку не порождают один и тот же язык в явном виде.

Данный подход считаем оправданным, поскольку мы полагаем произвольное кодирование в натуральное число, а поэтому, говоря о языке L_G в общем, не можем заявлять, что конкретно означает то или иное слово этого языка. Более формальное обоснование данной идеи мы изложим в следующем параграфе.

Ключевое отличие предлагаемой интерпретации заключается в изменении самого понятия языка. В классическом изложении, говоря кратко, это множество цепочек; таким образом понятие множества, или набора, заимствуется из другой теории, либо принимается на интуитивном уровне. Мы же хотим получить результат обратный; используя понятие языка, вывести, или конструктивно получить, то, что мы будем подразумевать под понятием множества и его элемента.

Об интерпретации языка натуральных чисел через теоретико-множественную концепцию

Поскольку мы свели любой язык к единому языку, было бы разумным вывести некоторые правила, или принципы организации, присущие этому самому языку. Считаем уместным выводить семантические правила символьной системы, основываясь на естественных качествах, присущих таким объектам, как символы, в конструктивном представлении.

При изучении теории формальных языков прослеживается очевидная аналогия операций над языками с операциями над множествами. Но в нашем рассуждении мы не сможем слепо наследовать постулаты и результаты этой теории, поскольку речь идет о единственном языке, причем объекты его имеют двойственную природу за счет семантических связей. В нашей интерпретации язык – это не множество некоторых цепочек, относящихся к этому языку; язык – это такая цепочка, которая включает произвольную цепочку, относящуюся к языку.

Таким образом, грамматика N не может синтезировать язык, поскольку конкатенация цепочек грамматики становится необратимой операцией; в получаемой цепочке невозможно выделить исходные цепочки, поскольку грамматика не содержит символ-разделитель. Грамматикой, синтезирующей язык натуральных чисел, мы будем считать грамматику $N0\infty$, а сам язык представляет собой потенциально бесконечную, или просто бесконечную, цепочку натуральных чисел, посредством кодирования которых синтезируется и транслируется некий смысл.

Язык L_G замкнут безотносительно чему-либо еще, поскольку все выражения этого языка являются его частью. На основании произвольно выбранного кодирующего отображения, обеспечивающего свойство изоморфизма, любой произвольный язык можно перевести в двухсимвольный язык L_G, который мы будем ассоциировать с цепочкой натуральных чисел без ноля. Соответственно, высказывания в пространстве L_G будут справедливы, или также относиться, и к произвольному изоморфному языку, поскольку семантически это единый язык. Тогда можно ввести некоторые значимые высказывания о языке L_G, объекты которого мы определяем, как натуральные числа, в самом этом языке. Весь принцип организации языка сводится к семантическому сопоставлению числа и цепочки чисел.

Объектам языка L_G, полагаем, соответствуют цепочки, они же цепочки натуральных чисел, состоящих из взаиморазличимых символов, или натуральных чисел, что подразумевается, как одно и то же. Метаязык над этим языком, соответственно, будет включать больше понятий: сам язык L_G, цепочки, отдельные числа, и символ разделитель, он же ноль. Носителями значения этого языка, соответственно, будут являться натуральные числа, или цепочки-символы, и конечные цепочки чисел, что семантически сопоставлено; значение не несут символ разделитель и сам язык целиком. Напомним, что под натуральным числом мы полагаем цепочку, образованную единственным значащим символом. Свойством бесконечности может обладать только сам язык целиком; никакой его элемент данным свойством не обладает. Это обстоятельство также продиктовано естеством символьных систем; невозможно произвести бесконечную символьную цепочку, но сам язык, тем не менее, потенциально бесконечен.

Опишем принцип, присущий предлагаемой символьной системе – принцип тождества. Данный принцип заключается в исключении семантической и символьной двойственности: если утверждается, что $x = x$, это будет являться ассоциацией свойства рефлективности обозначения тождества, поскольку один и тот же объект, символ или цепочка, несет единственное значение; если утверждается, что $x = y$, то это предполагает, что конструктивно задается семантическое тождество между записью «x» и записью «y» через свойство транзитивности для значения символа «$=$», что, в свою очередь, обязывает внесение соответствующих правил, или кодирующих отображений, позволяющих из x получить y; при этом мы допускаем, что введенные правила могут привнести противоречия в языковую систему в виде нежелательного объединения значений, например, тождеству одного натурального числа с другим. Поскольку за одним натуральным числом, как элементарным объектом языка, мы закрепляем единственное значение, то правила, приводящие к объединению значений различных натуральных чисел через соответствующие кодирующие отображения, должны быть исключены из языка для обеспечения его свойства непротиворечивости. Тем не менее, с одним натуральным числом можно связывать сколь угодно много цепочек или символов сложных языков, что объединит их одним семантическим значением.

Итак, утверждение $x = X$, где x – символ языка L_G, а X – цепочка языка L_G требует внесения правила семантического тождества $R = \{x \to X\}$, причем необходимо, чтобы символ x не входил в цепочку X для исключения противоречия, обусловленного самоприменимостью. Эта необходимость также объясняется тем, что семантический ноль уже включен в знаковую систему, он обеспечивает разделение символов цепочки (см. формулировку грамматики $N0\infty$), поэтому натуральные числа языковой системы L_G не допускаются принимающими значения нуля. Система алфавитного отображения R должна быть проверена на отсутствие правил, допускающих вывод $y \to X$, где y – символ, отличный от x.

В целях описания языка L_G необходимо выделить основные его объекты – это конечные цепочки. Любая цепочка включает числа – значащие символы языка L_G – и символы-разделители – незначащие символы. Вместо понятия «пустая цепочка» будем использовать понятие незначащего символа-разделителя и использовать знак $\emptyset$, принятый в теории множеств. При конкатенации цепочек изменения символов не происходит, поскольку они остаются разделенными специальными символами. Значащие символы и символ-разделитель сами по себе цепочками не являются. Введем вполне очевидное понимание отношения включения над конечными цепочками: понятие отношения равенства цепочек очевидно; будем говорить, что цепочка X_1 включает цепочку X_2, а записывать $X_1 \supset X_2$, при этом подразумеваем, что длина цепочки X_1 больше длины X_2, $|X_1| > |X_2|$. Это также означает, что цепочку X_1 можно выразить, как $X_1 = X_3X_2X_4$, притом $\neg(X_3 = \emptyset \wedge X_4 = \emptyset)$. Цепочку X_3X_4 будем называть дополнением X_2 до X_1. В ассоциации с теорией множеств язык L_G обладает свойством универсума, т.е. $X \subset L_G$ для любой цепочки X.

Для конечных цепочек X_1 и X_2 записи $X_1 \cup X_2$, $X_1 + X_2$ и X_1X_2 будем считать семантически тождественными, т.е. формой выражения операции конкатенации. Определение разности для цепочек будет как операции, обратной сумме: $X_1 - X_2 = X_3$ означает $X_1 = X_3X_2$. Обратим внимание, что в таком виде все операции с цепочками некоммутативны. Более наглядно выражение для данных операций возможно в следующей форме: $X_1 + xX_2 = X_1x + X_2 = X_1xX_2 + \emptyset$; $X_1xX_2 - xX_2 = X_1 + X_2 = X_1 + \emptyset$, – семантически связывающей понятия цепочки, символа и символа-разделителя. Для полноты задания по рекурсии допишем свойство символа-разделителя: $X + \emptyset = X$.

Операции суммы и разницы можно выразить на цепочках-символах, т.е. односимвольном выражении натуральных чисел. В этом случае все цепочки состоят из одного и того же символа, обозначаемого единицей, тогда: $0X_10 + 01X_20 = 0X_110 + 0X_20 = 0X_11X_20 + 0 = 0X_11X_20$, где X_1, X_2 –цепочки из единиц произвольной длины. С цепочками из одного символа, т.е. с натуральными числами, операция суммирования, или конкатенации, проявляет себя коммутативно. Именно это свойство, проявляемое естественно, но уже семантически, переносится на язык арифметики. Здесь следует учесть форму языка: мы не только рассматриваем операцию над отдельными цепочками, такими как $0X_10$ и $01X_20$, – напротив, мы рассматриваем цепочку $0X_10 + 01X_20$, где символ «$+$» есть некоторая цепочка-символ, или натуральное число, скажем, X_3, а символ «$=$» также некоторое число, несущее семантическое значение тождества. В итоге мы получили следующую интерпретацию $0X_10X_301X_20 = 0X_110X_30X_20 = 0X_11X_20X_30 = 0X_11X_20$: цепочки натуральных чисел, разделенные некоторым числом, несущим значение символа тождества, имеют одно и то же семантическое значение; соответственно, некоторому множеству цепочек $0X_10X_301X_20$, $0X_110X_30X_20$ и т.д., семантически соответствует всего одна цепочка $0X_11X_20$. Здесь очевидно, что мы даем интерпретацию того, что в арифметике цепочкам символов $2 + 3$ или $4 + 1$ семантически соответствует символ 5.

Отсюда следует, что семантический язык L_G неполный, поскольку он допускает добавления к себе только семантически тождественных цепочек. Этот аспект, связанный с самим понятием тождества внутри языка, мы рассматривали ранее. Понятие тождества самоутверждает себя в языке через отношение рефлективности над символами. В контексте языка натуральных чисел, в отличие от языка логики, отношение тождества, обладая свойством транзитивности, исключает его для обратного отношения – нетождества. Сравним, для языка исчисления высказываний и арифметики: $p = T, q \neq F$ следует $p = q$; но $x = 2, y \neq 5$ не следует $y = x$. Здесь понятия «следует» и «не следует» означают, можно ли присоединить к языку выведенные выражения, притом, чтобы язык оставался непротиворечивым, т.е. семантическое значения символа тождества сохранялось.

По своей природе, цепочки – естественно упорядочены, это их свойство делает их логическую связь с понятием множества теории множеств неудобной. Считаем, интерес представляет интерпретация неупорядоченного множества посредством предлагаемой системы. О естественном свойстве порядка над символами, как объектами в том числе физической природы, мы упоминали. Пусть предоставлен упорядоченный конечный набор различных символов, представленный цепочкой X, длиною $|X|$. Существует произвольный алгоритм, позволяющий на основе данной цепочки в качестве образа получить цепочку, комбинаторно содержащую все возможные перестановки символов этой цепочки в качестве подслов, в том числе, и цепочку-образ. Полученную цепочку будем обозначать $\{X\}$. Из формы полученной цепочки, не имея явное выражение алгоритма, нельзя сказать, какая цепочка была использована в качестве образа. Однако любую цепочку $\{X\}$ можно разбить на меньшие различные цепочки одинаковой длины, которые одинаково могут быть использованы для построения $\{X\}$. Произвольную цепочку-образ X, использованную для построения цепочки $\{X\}$, мы будем называть элементом $\{X\}$, а саму цепочку $\{X\}$, перестановочно построенную из любой цепочки X, называть множеством X, по аналогии, будем говорить $X \in \{X\}$. Рассмотрим частный случай: $X = \{X\}$, – означает, что X – единичный символ, $|X| = 1$. Итак, получаем, что понятие множества можно представить, как результат конкатенации n элементов, $\{X\} = X_1 \dots X_n$; будем говорить, что $\{X\} = \{Y\}$, если $\forall i \exists! j\left(X_i = Y_j\right)$. Существование обратного алгоритма, или функции, позволяющего выделить некоторый произвольный элемент из множества, мы считаем очевидным, $\left\{\{X\}\right\}^{-1} = X_i$, так что $\{X_i\} = \{X\}$.

Особенностью данного представления также является уникальность каждого элемента множества, притом по любому элементу можно восстановить множество целиком, т.е. высказательная функция о принадлежности элемента к множеству существует, также никакое множество не может быть элементом самого себя. Эти все свойства введенное понятие множество приобрело через естественные свойства символов, которые мы учитываем при разработке формальной системы. Односимвольная цепочка дала бы результат, что множество может содержать себя в качестве элемента, только в том случае, если бы мы допустили в качестве определения для множества одноэлементную цепочку, однако мы подразумеваем для этого понятия другую сущность – символ. Это означает, что для цепочек, формирующих множество выполняется условие: $\{X\} \neq X$, т.е. цепочка состоит, как минимум, из двух символов.

Для описания цепочки, как формального объекта, обозначим некоторые произвольные алгоритмы, или функции, над произвольными цепочками. Введем алфавитную операцию, или алгоритм, над произвольной цепочкой; она заключается в удалении повторяющихся символов из цепочки: $A(X) = X_A$, где X_A – алфавит, используемый для построения цепочки X произвольной длины; очевидно, $A(X_A) = X_A$. В общем случае, $|X| \geq |A(X)|$. Иными словами, алфавит – произвольная цепочка с уникальными символами. Алфавитной цепочкой будем назвать такую X, что $|A(X)| = |X|$. Аналогичным образом определим операцию взятия произвольного символа, как $a(X) = x$, где x – произвольный символ цепочки X, $|x| = 1$. Принимая существование алгоритма взятия алфавита, мы принимаем, что алгоритм взятия произвольного символа может применяться многократно для взятия разных символов из одной и той же цепочки: $A(X) = a_1(X)a_2(X) \dots a_n(X)$, $|A(X)| = n$.

Мы уже начали применять вроде бы очевидное понятие длины цепочки. Но, в свою очередь, это понятие выражает функцию меры над цепочкой. Остановимся для подробного анализа. В качестве понятия символа мы в контексте L_G усматриваем некоторое натуральное число. Как некоторый различимый символ любое число, таким образом, приобретает единую количественную меру, равную единице: $\forall x(|x| = 1)$. А вот семантический смысл, или качество, которое этот символ выражает, не определен. В свою очередь, некое натуральное число было сконструировано, согласно грамматике N, из единственного символа 1. Мерой, или качеством, этого единственного начального символа будет он сам, т.е. $|1| = 1$. Мы получаем, что натуральное число – это качественно выраженная мера через меру единственного символа, использованного при конструктивном выражении какого-либо натурального числа, т.е. его качество определяется количеством входящих символов. Иначе говоря, простейшее арифметическое выражение $1 + 2 = 3$ отражает конкатенацию цепочки 1 и 11 с получением цепочки 111, представляющей собой один символ в L_G, т.е. имеющей количественную меру 1 и качественную меру 3. В контексте выбранной системы записи, или языка, числа имеют свое выражение, например число 210_{10} в десятичной записи имеет вид $\mathrm{D2}_{16}$ в шестнадцатеричной, т.е. количественно различную символьную меру, зато качественная мера общая, посредством общего отображения в единичной системе. Этот механизм означает, что некоторой цепочке чисел, ассоциируемое с L_{G2}, мы ставим в семантическое соответствие цепочку L_{G1}, что и формирует понятие, которое мы вкладываем в L_G. Таким образом, мы даем определение натуральному числу, как произвольной конечной цепочке, образованной единственным символом, длина которой тождественно равна семантическому качеству, выраженному через данную цепочку. Соответственно, кодирование в другие символьные системы, как интерпретация в L_{G2}, осуществляется путем отождествления семантического значения различных цепочек.

Построим трехэлементное множество, для этого в качестве элемента возьмем цепочку вида $X = aab$; тогда $\{X\} = aababab aa$. Произвольное подслово, элемент, может через кодирование нести любой произвольный смысл, поэтому эта формальная запись семантически отражает произвольное трехэлементное множество. Аналогичным образом может быть построено n-элементное множество. Этот механизм мы будем рассматривать, как основной, описывающий генерацию натуральных чисел средствами разрабатываемого языка.

Предложенная схема позволяет производить псевдоупорядочивание, аналогичное упорядочиванию в классической теории множеств. В этом можно убедиться на следующем примере, в том числе, демонстрирующим абсурдность схемы формального упорядочивания теории множеств. Для простейшей алфавитной цепочки $X_2 = ab$, $|X_2| = 2$, построим цепочку $X_2\{X_2\} = ababba$. Как результат операции множества, она аналогична $X_2\{X_2\} = abbaab$, которую можно выразить, как $\{X_2\}X_2$, что дает $X_2\{X_2\} = \{X_2\}X_2$. Но, $X_2X_2\{X_2\} \neq \{X_2\}X_2X_2$ в любом выражении $\{X_2\}$. Для теоретико-множественной интерпретацией понятия последователя присоединение упорядоченных строк излишне; данное понятие может быть прямо ассоциировано с операцией взятия множества, т.е. $X' = \{X\}$; соответственно, счет цепочек-множеств простейшей, двухсимвольной, алфавитной цепочки приобретает вид: ab, $ab\ ba$, $aabb\ abba\ abab\ baab\ bbaa\ baba, \dots$. Это также может быть выражено формулой

$|\{X_k\}| = \frac{|X_k|!}{(|X_k|/k)!}k$. Можно считать, что $\{X\} \in \{\{X\}\}$ или $\{X\} \in \{X\}'$, что одно и то же; получаем как следствие для элементов и подмножеств отношения: $X_i \in \{X\}$, $X_i \subset \{X\}$, но $X_iX_j \notin \{X\}$, $X_iX_j \subseteq \{X\}$. Заметим также, что $X \notin \{\{X\}\}$, что согласуется с теорией ZF.

Для построения формулировки, аналогичной формуле упорядоченной пары по Куратовскому (на языке теории множеств ZF $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ [KurMost]) можно предложить формулировку $\langle a, b\rangle = \{a\}\{X_2\}$, хотя очевидно, что конструкция бессмысленна, поскольку основывается на естественном порядке символов в цепочке; приведена для соотнесения понятийного аппарата теории множеств и разрабатываемой системы.

Определим основные операции, ассоциированные с цепочками-множествами. Сумма множеств есть множество, полученное из конкатенации образующих цепочек: $\{X_1\} \cup \{X_2\} = \{X_1 \cup X_2\} = \{X_1X_2\}$. В рекурсивной форме определение будет иметь вид: $\{X_1\} \cup \{xX_2\} = \{X_1x\} \cup \{X_2\}$, $\{X\} \cup \{\emptyset\} = \{X\}$. В предлагаемой интерпретации очевидно тождество: $\emptyset = \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\} = \cdots$. Операцию разности на произвольных цепочках выразим следующим образом: $(\{X_1x\} - \{X_2x\} = \{X_1\} - \{X_2\}) \wedge (\{X_1\} - \{X_2y\} = \{X_1\} - \{X_2\})$, $a(X_1) \neq y$. В этом случае определение операции пересечения наследуется из теории множеств в виде: $\{X_1\} \cap \{X_2\} = \{X_1 \cap X_2\} = \{X_1\} - (\{X_1\} - \{X_2\})$; аналогично и симметричная разность: $\{X_1\} \dot{-} \{X_2\} = \{X_1 \dot{-} X_2\} = (\{X_1\} - \{X_2\}) \cup (\{X_2\} - \{X_1\})$. Также остается результат самоприменения операции вычитания, $\{X_1\} - \{X_1\} = \emptyset$, только здесь символ $\emptyset$ не ассоциируется с цепочкой, а является символом-разделителем языка L_G. Поскольку символ-разделитель не является значащим символом, или натуральным числом, в языке L_G, для него можно принять собственную меру $|0| = 0$. Ну а поскольку правило грамматики языка содержит правило $R = \{0 \to 00\}$, то эта мера будет семантически одинаковой для цепочки любой длины. Любопытным будет рассмотреть операцию суммы в контексте понятия множества множеств: $\{X_1\} \cup \{\{X_2\}\} = \{X_1X_{2i}\} \cup \{\{X_2\} - X_{2i}\} = \{X_1\{X_2\}\}$. Операции для подобных вложенных множеств, как видно, аналогичны операциям с элементарными множествами.

Одним из центральных понятий теории множеств является декартово произведение. Его можно выразить в рекурсивной форме следующим образом: $xX \times Y = xY + X \times Y$, $\emptyset \times Y = \emptyset$. Некоторые свойства, приписываемые этой операции, обретаются в абстрактном выражении цепочки-множества. Продемонстрируем приобретаемые свойства, выразив цепочку, как последовательность символов: $\{\{X\}\}^{-1} = X_i = \bigcup_j x_j = \sum_j x_j$. Аналогично и для цепочки Y, только учитывая индивидуальную длину этой цепочки, $Y_i = \sum_k x_k$. Тогда получим выражение $\{X \times Y\} = \{\sum_j(\sum_k x_j\, y_k)\}$, в полной мере воспроизводящее все аксиоматические свойства декартового произведения в классической интерпретации, в частности коммутативность, так что $\{X \times Y\} = \{Y \times X\}$.

В заключение рассмотрим отношения цепочек-множеств языка и самого языка. Язык L_G в данном случае будет выступать в роли универсума, или пространства. Сам язык мы интерпретируем не как множество цепочек, а как единственную цепочку, включающую любую конечную цепочку; порядок включения и относительное расположение относительно других цепочек не рассматривается. Это позволительно, поскольку рассматривается бесконтекстный язык. Для любой цепочки будет верно $X \subset L_G$, также аналогично с ZF: $X \cup L_G = L_G$, $X \cap L_G = X$. Механически перепишем отношения описывающие такой термин, как дополнение, $\bar{X}$, и его свойства: $\bar{X} = L_G - X$, $X \cup \bar{X} = L_G$, $X \cap \bar{X} = \emptyset$. На наш взгляд, будет немаловажным разобраться, почему операция вычитания произвольной конечной цепочки из языка порождает новую семантическую сущность, а не сохраняет язык. По аналогии с дополнением цепочки можно построить дополнение символа, $\bar{x} = L_G - x$. Мы напомним семантическую интерпретацию полученного объекта – это язык натуральных чисел без какого-то одного числа.

О двойственности построения понятия символа-цепочки

Результатом применения операции вычитания может быть значащий символ, например, когда $\{X\} - \{Xx\} = x$. В таком случае получается, что помимо цепочки-множества или символа разделителя может получиться еще одна сущность – значащий символ, который не может быть ассоциирован с односимвольной цепочкой, поскольку обладает существенным различием, а именно $\{x\} = x$. Тогда, следует признать возможной применение обратной операции, так что $\{x\}^{-1} = x$.

В данном контексте значащий символ цепочки естественно будет ассоциироваться с таким понятием теории множеств, как конституэнта. Действительно, $\{X_n\} = \{x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n\}$, и в то же время $\{x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_n\} = \emptyset$, что выражает свойство, что различные конституэнты не пересекаются. И это естественно в контексте языка; различные символы не могут иметь общих символов.

Полагаем, стоит изучить такую возможность, чтобы можно было рассматривать произвольный значащий объект только как цепочку. Для этого произведем кодирование в другой алфавит, и прежние символы станут цепочками символов в новом коде, представляющем некоторое взаимооднозначное отображение, вроде $A(X) = \{A(Y)\}$, чтобы каждая алфавитная Y_i цепочка семантически тождественная некоторому символу из X. Более того, можно использовать саму цепочку для собственного кодирования: $A(X) = \{A(X)\}$. Операцию удобнее всего рассмотреть на примере простейшей, двухсимвольной цепочки $X_2 = ab$; тогда символ a можно закодировать, как ab либо ba, аналогично для второго символа. Этот процесс мы опишем следующим образом, сначала из цепочки X_2 создается цепочка-множество $\{X_2\}$, а затем из нее выбирается некоторый элемент, который может породить эту самую цепочку-множество; тогда $X_{2i} = \left\{\{X_2\}\right\}^{-1}$, где $X_{2i} \in \{X_2\}$, $a, b \in \{X_{2i}\}$. Теперь очевидно, что многократное кодирование не меняет значения получаемой цепочки, т.е. $X_{2i} = \left\{\{X_2\}\right\}^{-1} = \left\{\{X_{2i}\}\right\}^{-1} = \left\{\left\{\left\{\{X_{2i}\}\right\}^{-1} \ldots\right\}\right\}^{-1}$. Это означает, что двухсимвольный алфавит уже является вырожденным, дальнейшее его упрощение невозможно. Напомним цель использования метода теории множеств – это инструмент, или метаязык, для описания единственного языка L_G, который также двухсимвольный. Операция кодирования, применяемая к элементам этого языка, либо переопределит их, либо оставит без изменения.

Если мы переопределим значения символов, тогда необходимо будет также переопределить грамматику. Например, пусть имеется цепочка 011011110010 и мы полагаем ее семантическое рассмотрение, как произведенную грамматикой $N0\infty$. Теперь инвертируем данную цепочку и получим 100100001101. Операцию инверсии над цепочкой двухсимвольного алфавита будем обозначать $\neg(X)$. Для сохранения семантики, необходимо также инвертировать и грамматику, обозначим ее $\neg N0\infty$: $V_T = \{0\}$, $V_N = \{1, \infty\}$, $R = \{1 \to 11, \infty \to 1\}$, $S = \{1\}$, $P = \{\infty \to 01\infty, \infty \to 0\infty\}$, смысл которой очень прост, теперь символ 0 выражает значение символа 1 в грамматике $N0\infty$, и наоборот.

Можно построить цепочку, воспринимаемую семантически одинаково как грамматикой $N0\infty$, так и $\neg N0\infty$. Эта цепочка является конкатенацией симметричных цепочек X_{01i}, построенных по правилу $X_{01i} = \{0^n 1^n,\ n \geq 1\}$. Пример такой цепочки: 0100110000111101.

Теперь мы можем назначить это свойство симметричности самому языку L_G, так что он будет одинаково семантически восприниматься как грамматикой $N0\infty$, так и инвертированной ей. Как было показано, это свойство получено конструктивно, так что его приписывание языку вполне оправдано.

Поскольку мы видим язык L_G, как язык натуральных чисел, кодирующий любую произвольную символьную систему, соответственно, символом языка, или числом, будет выступать цепочка X_{01i}, которая содержит как значащую составляющую, так и незначащую для возможности конкатенации с другими цепочками и сохранения собственного значения.

Продолжим изучение свойств двухэлементной цепочки в контексте операции цепочки-множества. Дадим определение по рекурсии для комбинаторной операции: $\{X\}^{n+1} = \{\{X\}^n\}$. В нашей интерпретации таким определением по рекурсии также можно рассматривать способ кодирования языка натуральных чисел. Каждую итерацию мы будем предполагать перестановку символов, как если бы они были различные. Символьная цепочка, получаемая в результате неограниченного применения комбинаторной операции, обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\{X\}^n$, тождественна языку, порождаемому грамматикой $N0\infty$. Справедливость данного высказывания определяется тем, что комбинаторной операцией мы можем получить такую цепочку, которая будет содержать произвольную наперед заданную цепочку; только данная символьная цепочка будет семантически неопределенной. Стоит добавить правила семантической ассоциации $R = \{0 \to 00\}$ и цепочка становится идентичной произвольной цепочке, порожденной грамматикой $N0\infty$.

Заметим, что цепочки разной длины, составленные из одного и того же символа, приобретают свойство единичного символа, поскольку для таких цепочек $X = \{X\}$. И действительно, в качестве символа данного языка мы подразумеваем некоторое натуральное число; в свою очередь натуральное число в представлении грамматики N – последовательность одинаковых символов. Таким образом, мы имеем в языке цепочек первичные объекты – символы, и конструктивные объекты – цепочки и цепочки-множества. Различные конструктивные варианты представления натуральных чисел средствами языка являются вторичными. Их можно рассматривать, как цепочки языка L_{G2}, семантически тождественно сопоставляемые цепочкам L_{G1}.

Разберем операцию модуля, или меры цепочки. Мы тождественно приняли, что $|1| = 1$ и $|0| = 0$, из чего по правилам грамматики следует, что $|1 \dots 1| = 1 \dots 1$ и $|0 \dots 0| = 0$, что также можно интерпретировать, что мерой натурального числа является само это число. В то же время, меру цепочки, состоящую из последовательности символов, или чисел, мы отождествляем с длиной этой цепочки. Попытаемся разобраться, как эти подходы соотносятся. Пусть дана цепочка $X_4 = abbc$, закодированная в натуральных числах, как $X_4 = 0101101101110 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ (далее для удобства будем выражать натуральные числа в десятичном формате, символом-разделителем будет выступать точка). Очевидно, что кодирование цепочки произвольное. Для любого количества символов в цепочке можно осуществить двухсимвольное кодирование, так что для получения трех элементов подойдет цепочка-множество $\{001\}$ и цепочка X_4 получит иное выражение $X'_4 = 001010010100$. Только в данном случае семантическая ассоциация с символами заложена в порождающей цепочке. Убрав нули, как знаки-разделители, из полученной цепочки, мы получим цепочку-число, ассоциированное с мерой цепочки. Таким образом, мы задали некоторый алгоритм-меру, позволяющей для любой символьной цепочки произвести ее отображение в односимвольную систему. Еще более удобным может показаться применение к оригинальной цепочке натуральных чисел X_4 алфавитного отображения, меняющего ее свойства, $11 \to 1$, так, что получается цепочка $X = \{(01)^n,\ n \geq 1\}$, удаление из которой символа, ассоциированного со значением разделителя, образует цепочку-натуральное число, ассоциированное с мерой цепочки-образа. Логические пути, объясняющие, или интерпретирующие эту операцию, могут быть различны, но результат ее логически однозначен.

Здесь возникает интересное свойство интерпретации операции модуля. Для цепочки, как нескольких чисел, модуль – длина цепочки, а для единичного числа – оно само. Здесь нет противоречия с логикой представления языка натуральных чисел, поскольку натуральному числу в L_{G1} семантически сопоставлена цепочка L_{G2}. Таким образом для цепочки, помимо ее модуля, как характеристики длины есть еще семантически сопоставленное натуральное число со своим модулем; о модуле этого числа мы будем говорить, как о семантическом модуле цепочки. Проиллюстрируем на примере. Пусть имеется произвольное арифметическое выражение, выраженное цепочкой символов $X = 21 + 32$, модуль, как длина, этой цепочки равен $|X| = 5$; семантически данная цепочка может быть от отождествлена с числом в десятичной записи, также являющейся цепочкой символов, а именно $X' = 53$ с модулем $|X'| = 2$. В языке L_{G1} это число имеет выражение в виде цепочки X'' из 53 единиц; модуль этой цепочки $|X''| = 53$. В контексте языка L_G цепочка X'' является символом. Будем говорить, что модуль символа некоторой цепочки символов является семантическим модулем этой цепочки.

Следует разделить символьные объекты языка и чисто семантические, не имеющие явного выражения. К примеру, произвольная цепочка – X – явный символьный объект языка, как и отдельный символ; $\{X\}$ имеет некоторое промежуточное свойство, известна длина и составляющие цепочки, однако их порядку следования не придается значение; а вот $X_i = \big\{\{X\}\big\}^{-1}$ –абстракция, означающая произвольный элемент цепочки $\{X\}$, которая реализуется в явном виде только в выражениях вроде $\{X\} = \bigcup_i X_i$. Понятия, вроде пустых цепочек, множеств, и тому подобных сущностей, могут быть ассоциированы с семантическими. А вот понятие числа, поскольку оно имеет в предлагаемой интерпретации явное выражение в виде конкретной цепочки символов, символьно выразимо. Понятие языка, поскольку мы его отождествляем с бесконечной цепочкой, получается исключительно абстрактно. Полагаем, что данные предварительные рассуждения дают надежду объективно определить для языка математики такое понятие, как выразимость.

О построении модели языка математики на основе единого языка натуральных чисел

За каждым натуральным числом, или символом, языка L_G мы будем закреплять единственное понятие. Если делать иначе, то как следствие, получим противоречивый язык.

Тогда имеем, что произвольные математические понятия, не являющиеся числами и имеющие свое символьное выражение, должны быть ассоциированы с некоторым натуральным числом языка L_G. Но в этом случае в языке будет отсутствовать понятие числа, чья символьная форма была использована под другое понятие. Это означает, что метаязык будет неполным в том смысле, что в нем будут отсутствовать понятия некоторых натуральных чисел, хотя он содержит символьное выражение всех натуральных чисел.

На наш взгляд, наиболее важным свойством, достойным наиболее пристрастного анализа, является свойство бесконечности. Поскольку мы хотим прийти к естественному описанию символьных систем, такие понятия, как мощности несчетных множеств, или кардинальные числа теории множеств, в общем-то абсурдны при анализе символов, как объекта исследования. Но из этого очевидным образом не следует семантическая абсурдность; ее необходимо прояснить, или доказать. Поскольку семантические сущности определяются привязкой некоторого значения символам, возможно, что объективное изучение свойств символов и законов семантической привязки проявит некоторые конструктивные выражения, как абсурдные, в том плане, что они нарушают объективные законы обращения, присущие символам. Если вдруг выяснится, что несчетные множества и прочие трансцендентные понятия, выраженные в символьной форме, нарушают естественные законы обращения символов, а язык в своем принципе есть некая символьная система; тогда встанет вопрос об объекте применения данных понятий.

Само понятие бесконечности, даже счетной, чтобы оперировать им, очень абстрактно; а принятие какого-либо представления на интуитивном уровне сулит логическими ошибками – это не научный метод. Аксиома бесконечности теории множеств сводится к определению по рекурсии, на нем же основывается понятие вычислимости для алгоритма, как характеристика конечности его выполнения.

Мы отклонились от канонического понятия формального языка, как множества цепочки символов, сцепив это подразумеваемое множество в единую цепочку. Обосновываем это тем, что хотя порядок несущественен в определенном контексте, однако от него невозможно избавиться, поскольку он является неотделимым свойством языка, так что мы сцепляем объекты языка, как элементы, путем конкатенации в произвольном или ином порядке; к полученной цепочке, мы предполагаем, можно применить комбинаторную операцию цепочки-множества, но и тут получим некоторую упорядоченную цепочку. Проясним, насколько подобные манипуляции могут искажать семантику языка.

В рамках теории формальных грамматик мы можем считать произвольный язык как контекстно-связанный, если не брать в рассмотрение языки типа 0. Для контекстно-связанных грамматик, или грамматик типа 1, правила замены $\varphi \to \psi$ удовлетворяют условию $\varphi = \varphi_1 A \varphi_2$, $\psi = \varphi_1 \omega \varphi_2$, где A – нетерминальный символ; φ, ψ, ω – цепочки словаря [Alf]. Это дает нам возможность закодировать произвольный символ нетерминального словаря в некоторое натуральное число, которое будет связано с семантикой этого произвольного символа, или слова нетерминального словаря, исходя из контекста. Очевидно, что любой текст, или осмысленная символьная запись, конечны. Это дает возможность сопоставить смысл всего текста, как законченного произведения, с неким натуральным числом, отождествленным с семантическим значением всего произведения, пускай и потенциально очень сложного. О логическом механизме мы будем вести речь позже, главное, что мы хотим прояснить, что оправданным является представление произвольно взятого текста, как порожденного, пускай и сложной, но контекстно-свободной (КС)-грамматикой. Слова в коммуникативных языках мы не можем однозначно, без контекста, отождествить с определенным значением, но, скажем, в контексте параграфа, или даже всего конечного текста, слову можно сопоставить совершенно конкретное семантическое значение; принципиально возможно смысловое кодирование текста в некоторую цепочку натуральных чисел, являющихся семантическими атомами всего текста.

Теперь вернемся к языку. Сцепление отдельных законченных семантических понятий, конечно, не произвольно. Оно также естественно упорядочено – упорядочено через физическое время, как и упорядочивание символов в конкретно взятой цепочке. Например, текст изложения используемой в работе классической теории множеств ZF [KurMost], причинно-следственно не может быть оторван от некоторых семантически завершенных текстов, предшествовавших этой работе, ссылки на часть которых можно увидеть в списке литературы. Но сам этот текст, однозначно, не требует контекстной связи с текстами, которые написаны позже. Потому что он создавался без возможности влияния текстов, которые будут созданы в будущем; их контекст для восприятия того смысла, которые закладывали авторы, в общем-то, необязателен. Заключаем, что язык естественно упорядочен, как и его отдельно взятая часть в виде конечной цепочки, соответственно, сцепление цепочек в языке для создание его концептуальной модели не только возможно, но и естественно необходимо. Закон же сцепления носит темпоральный характер, а не лексикографический или какой-то еще.

Мы предлагаем отождествить понятие бесконечности, применительно к единому языку, его другим семантическим свойством – всевключением. Формально это выражается следующим образом: любая цепочка символов является частью единого языка, или $\forall X(X \subseteq L_G)$. Здесь может так получиться, что некоторая цепочка $X' = L_G$, значит, эта цепочка и есть язык. Бесконечность же, как свойство языка целиком, выражается посредством понятия эффективного процесса [Curr]. Допустим, мы хотим добавить к языку, который, по сути, неотличим от некоторой конечной цепочки, пусть и единственной, новую цепочку, скажем X''. Так рассуждать вполне уместно, ведь язык – понятие живое, это и есть некий процесс. Тогда мы получим, что язык поглотил новую цепочку: $X'' \cup X' = L_G$, что также значит, что $X'' \subset L_G$, а конечная цепочка, до порождения X'' в символьном выражении совпадающая с языком, будет отделена от новой цепочки как в символьном виде, так и семантически, $X'' \cap X' = \emptyset$. Понятие цепочки излишне объемно. Для наших целей будет достаточным присоединение наименьшей значащей единицы языка – символа, или натурального числа, в интерпретации L_{G2}. Присоединением символа к языку или произвольной цепочке будем называть элементарной итерацией эффективного процесса.

Предложенная интерпретация равносильна тому, что мы отождествляем язык с последовательностью цепочек, представляющий язык целиком: $\ldots \subset X \subset X' \subset X'' \subset \cdots$. Каждая последующая цепочка на каждом шаге итерации семантически отлична от предыдущих. И каждая цепочка семантически что-то да значит. Напомним, что мы сопоставляем каждой цепочке натуральное число, выражающее семантическое значение всей цепочки. Это также значит, что в качестве семантической модели языка целиком мы можем использовать последовательность натуральных чисел, начиная с единицы. Перечисление всех натуральных чисел полностью составляет единый язык L_G.

Пусть каждый элемент языка L_G – а это натуральное число – семантически обозначает само себя, то есть символьное выражение натурального числа будет означать это же натуральное число. Тогда мы имеем семантически полный язык, но совершенно бесполезный для практической цели, а именно, как язык.

Создадим простейший описательный метаязык над языком натуральных чисел, выражающий конечное число чисел и единственную операцию сложения, также необходим символ-разделитель для цепочек. Не придумывая лишнего, первые девять чисел будем обозначать соответствующими цифрами, принятыми в десятичной нумерации. Символу сложения и запятой, как разделителя, пусть соответствуют числа 10 и 11. Итого язык содержит 11 символов и столько же соответствующих им семантических значений. Особо отметим, что символьное выражение числа не следует путать с цифровой кодировкой, так что, например, запись 38 обозначает цепочку из двух последовательных чисел, а не одно число. Это эквивалентно принятому символьному выражению некоторых особенных для математики чисел, таких как π, e, i; символ обозначает именно конкретное число и не имеет значения цифры. Полученный метаязык $L_G = \{1-9\} \cup \{+, ","\}$ использует два символа, или два числа, которые семантически не выражают числа. Иначе говоря, язык содержит символы 10 и 11, которые не отражают семантически этих чисел. Выпишем несколько цепочек в L_{G2}: цепочке $3 \cdot 10 \cdot 2$, или $3+2$ используя символьную запись, семантически соответствует натуральное число, или символ, 5, который присутствует в языке, а вот цепочка $3+7$ не будет иметь смысла, поскольку под натуральным числом 10 закреплено другое семантическое значение. Любой язык натуральных чисел, когда за некоторыми натуральными числами закрепляются иные понятия, отличные от чисел, получается семантически неполным, поскольку он не способен выразить понятия, явно в нем заложенные. Здесь также условимся, что в язык L_{G2} мы включаем только те цепочки, которые являются правильно построенными формулами, то есть могут иметь смысл. Но дело поправимое, к языку можно присоединить дополнительное понятие в виде нового символа; для этого создадим очередную итерацию языка, в котором будет присутствовать символ числа (10), тогда придется перекодировать символы $\{+, ","\}$. Очередная итерация примет вид $L_G{}' = \{1-(10)\} \cup \{+, ","\}$. Это означает, что в этой итерации цепочка $3+7$ обрела значение, но язык по-прежнему семантически неполный. Но это обстоятельство не мешает языку быть неограниченным, поскольку итерации языка натуральных чисел ассоциированы с самими натуральными числами. Имеем, что $L_G = L_N \cup L_M$. Выступая в качестве языка объекта, L_N, язык натуральных чисел, поскольку он уже становиться не единственным, является семантической частью единого языка натуральных чисел; тогда язык-объект будет являться дополнением семантических средств метаязыка L_M, и наоборот, что $L_G = \overline{L_M} \cup L_M$ и $L_G = \overline{L_N} \cup L_N$.

Тождественно символьная запись числа не используется для записи натуральных чисел; в ходу десятичная система. Мы интерпретируем ее следующим образом: выделяются символы метаязыка $L_D = \{0-9\}$, за ними закрепляются натуральные числа, но уже значения числа эти символы не несут – это цифры. Значение числа приобретает только цепочка цифр; непосредственно символьное выражение натурального числа отсутствует. Может, на первый взгляд, показаться, что цифры могут читаться и как соответствующие числа, т.е. являются многозначными. Это исключается контекстом, только чтение всей цепочки позволяет определить контекстное значение конкретной цифры. Необходимо прочтение контекстно-независимой части цепочки. Так по цифре 1 в десятичной системе в записи некоторого натурального числа мы можем только предполагать, что само это число семантически включает $10^n, n \geq 0$, как часть семантического модуля самого числа; но прочитав число целиком, его собственное семантическое значение не изменится в контексте любой формулы, в которой оно применяется.

Важной деталью, которую требуется прояснить, является назначение, или приписывание, отдельным символам иных семантических значений; то есть, когда через натуральное число выражается значение, не являющееся натуральным числом. Вернемся к предыдущему примеру и рассмотрим значение символа «$+$», который выражен через некоторое натуральное число, скажем 10; соответственно, в этой итерации языка отсутствует понятие числа 10, и цепочка $3 + 7$ поэтому не имеет семантического значения в этой итерации. В следующей итерации языка мы добавили это понятие, однако это привело к тому, что пришлось переопределить ассоциацию понятия, отождествленного с символом «$+$», на другое натуральное число, 11. Возникают опасения относительно того, как эти манипуляции повлияют на смысловое содержания самого понятия; за счет каких логических механизмов оно сохраняется? Ведь мы определяем произвольное натуральное число, как символ, семантически отличный от иного символа. И если мы закрепляли за числом 10 понятие сложения, то возможно ли, что с перекодированием в 11 само понятие может также измениться? – В общем говоря, понятие суммы мы отождествили с конкатенацией символов, которая, в свою очередь используется в механизме создания очередного натурального числа. Это понятие определено по индукции для всех элементов языка натуральных чисел параллельно с принципом генерации самих натуральных чисел; само это понятие является неотрывной частью языка. Если мы посчитаем язык натуральных чисел полным, тогда придется считать понятие суммы не включенным в язык, что абсурдно. Поскольку это понятие определено для любого натурального числа, оно уже закристаллизовано в языке, можно не переживать, относительно того, что символьное переименование понятия изменит само понятие.

С другими же понятиями дела могут обстоять иначе. Но мы будем рассуждать аналогично. Отправной точкой логического процесса формирования понятий являются непосредственно понятие натурального числа. Явно выразив некоторое понятие для всех натуральных чисел на некоторой итерации языка, то есть для некоторой конечной последовательности натуральных чисел, мы, таким образом, определяем его на весь язык натуральных чисел целиком. Тогда символьное переназначение самого понятия не может оказать влияние на само понятие, как определенным на всем языке целиком. Основным определением произвольных операций становится определение по рекурсии.

Для такого понятия математики, как отношение, а в частности отношение тождества, которое в свою очередь необходимо и для определения по рекурсии, используется механизм, описанный в параграфе «О подходе к формальному семантическому анализу языка». Сформулируем кратко: понятия тождество определяется для всех натуральных чисел, как выражающее свойство рефлексивности; в цепочках, содержащих вместе с натуральными числами иные понятия, тождество сохраняет семантическую идентичность цепочки для любой итерации языка натуральных чисел, выражая свойство транзитивности собственного значения. Понятия истинности и ложности непосредственно не содержатся в языке натуральных чисел; они определяются, как вторичная оценка над первичными понятиями. Поясним на примерах: $(5 = 5) = T$ и $(5 = 3) = F$. Оба выражения тождественно истинны, в том смысле, что истинность и ложность в языке является оценкой правильности применения отношения тождества над числами, как первичными понятиями языка. Соответственно, к языку не могут быть присоединены выражения, искажающие семантически закрепленный за символом «$=$» смысл; ведь иначе это исказит смысл уже определенного для всех натуральных чисел понятия тождества, иначе говоря, индуктивно уже определенного на всем языке. Здесь мы интерпретируем истинность и ложность, как меру оценки семантической рефлексивности, или, можно сказать, семантической симметричности выражения.

Построение нового понятия для языка математики может строиться, по крайней мере, по следующим принципам: как в случае с понятиями отношения, сначала за некоторым натуральным числом – символом – устанавливается новый смысл путем генерации конечного множества цепочек, удовлетворяющих этому смыслу для конкретной итерации языка, остальные итерации – по индукции; можно рассуждать обратным образом, генерируется некоторая цепочка языка, затем семантическое значение этой цепочке уже присваивается новому символу, которого нет в данной итерации, присвоение символа можно осуществлять со следующей итерацией, как в случае с генерацией очередного натурального числа в семантическом смысле.

Отсюда мы можем рассматривать весь язык как итерацию, т.е. конечную цепочку, содержащую группы семантических понятий: $L_G = L_N \cup L_1 \dots \cup L_n$, где L_N – неполный язык натуральных чисел, символы которого семантически выражают сами натуральные числа; $L_1 \dots \cup L_n$ – произвольный конечный набор различных групп метаязыков, семантические понятия которых не являются натуральными числами. Поскольку мы предполагаем интерпретацию эффективного процесса такую, что за один элементарный акт к языку добавляется один символ, образуя очередную итерацию языка, возможно рассматривать развитие языка целиком, как поэлементное добавление каждой конечной группы единого языка, в том числе создание новых групп и т.п.

Если мы создадим некоторое производное понятие для каждого натурального числа, соответственно, будет задана отдельная семантическая группа, так же потенциально бесконечная, как и язык натуральных чисел.

Далее мы рассмотрим концепцию добавления к языку натуральных чисел таких понятий арифметики, как ноль, отрицательные числа, рациональные числа. Мы ставим себе целью логически корректного определения понятия иррационального числа, так что предыдущие понятия являются предварительными в контексте данной задачи.

Для здания новых чисел, как понятий, построенных на основе отношений над натуральными числами, мы будем использовать определение по рекурсии, основываясь на теории рекурсивных функций, однако само понятие функция в контексте дискурса избыточно; мы просто используем семантическое значение символа, определенное на основании допустимых цепочек языка.

Напомним, что как запись натурального числа в L_G мы подразумеваем цепочку, состоящую из единиц, количество которых явным образом ассоциируется с натуральным числом, так что $S(X) = X + 1$, где X – цепочка, произвольной длины состоящая из единиц, так что цепочку $S(X)$ мы ассоциируем с последователем числа, выраженного цепочкой X. Определим понятие предыдущего числа, как $\mathrm{S}^{-1}\big(\mathrm{S}(X)\big) = X$, а с ним и операцию вычитания: $\mathrm{S}^{-1}(X) = X - 1$. Тогда ноль, как понятие выражается через число, предшествующее единице, $\mathrm{S}^{-1}(1) = 0$. В символьном виде такая цепочка невыразима – нет такой цепочки из единиц, непосредственно семантически отождествляющую такую запись, – однако как понятие, отличное от понятия натурального числа, вполне имеет право на существование. В отличие от рекурсивной арифметики натуральных чисел [Goods], мы будем использовать рекурсивную формулировку для задания понятий на числах в общем, а не только на натуральных. Теперь мы можем рекурсивно определить операцию суммы: $X_1 + X_2 = \mathrm{S}(X_1) + \mathrm{S}^{-1}(X_2) = \mathrm{S}^{-1}(X_1) + \mathrm{S}(X_2)$, и вычитания: $X_1 - X_2 = \mathrm{S}^{-1}(X_1) - \mathrm{S}^{-1}(X_2) = \mathrm{S}(X_1) - \mathrm{S}(X_2)$. Запись операции представляет собою семантически тождественные цепочки; цель же составляет получение результата, т.е. некоторого числа. Должна быть запись, удаляющая символ операции: $X_1 + 0 = X_1, X_1 - 0 = X_1$. Теперь система арифметики на целых числах однозначно определена.

Использование выражений с вычитанием может привести к конструированию понятий, ассоциируемых с отрицательными числами. Их семантическое определение через натуральное число следующее: отрицательное число $(-X_1)$ это такое число, что сумма с числом $\mathrm{S}(X_1)$ дает единицу, $(-X_1) + \mathrm{S}(X_1) = 1$. Последователи отрицательных чисел аналогичны по свойствам положительным: $\mathrm{S}(-X_1) = -X_1 + 1, \mathrm{S}^{-1}(-X_1) = -X_1 - 1$.

Операцию умножения сначала рекурсивно определим аналогично: $X_1 \times 1 = X_1$, $X_1 \times X_2 = X_1 + X_1 \times \mathrm{S}^{-1}(X_2) = X_1 \times \mathrm{S}(X_2) - X_1$. Понятно, что операция коммутативна; мы не будем загромождать запись. Свойство умножения на ноль проявляется через уже записанные определения, продемонстрируем это: $X_1 \times 0 = X_1 \times \mathrm{S}(0) - X_1 = X_1 - X_1$.

Для деления: $X_1 \div 1 = X_1$, $X_1 \div X_2 = 1 + (X_1 - X_2) \div X_2 = (X_1 + X_2) \div X_2 - 1$. Для операции деления возможно написание цепочек, имеющих вид: $X_1 \div X_2, X_1 < X_2$, либо $-(X_1 \div X_2)$, образующие дробные положительные и отрицательные числа. Имеет смысл рассматривать как новые семантические сущности числа между единицей и минус единицей; остальные получаются суммированием с произвольным натуральным числом.

Таким образом, мы получаем анализ сконструированного семантического языка, в то же время являющимся единым языком натуральных чисел: $L_G = L_N \cup L_M \cup L_0 \cup L_{-N} \cup L_Q \cup L_{N \cup M \cup -N \cup Q}$. Здесь L_N – неполный язык натуральных чисел; L_M – метаязык над числами, включает семантические понятия, числами не являющиеся, вроде операций, отношений, знаков-разделителей, включая знаки контекста – различного рода скобки и т.п., за семантическими объектами которого закреплены символы-натуральные числа языка L_G, не относящиеся семантически к L_N, значение которых определяется через набор допустимых цепочек, семантически замыкающихся на L_N; L_0 – язык, включающий семантический ноль, который мы определяем, как число, не являющееся натуральным; L_{-N} – язык, или перечисление понятий, что мы подразумеваем, как одно и то же, включающий семантически сконструированные отрицательные числа по механизму формирования цепочек на основе L_N и L_M, которые семантически не замыкаются на L_N или L_0, тогда им присваивается свое натуральное число L_G; L_Q – язык дробных чисел от минус единицы до единицы, без нуля, сконструированные по тому же принципу, что и семантический язык отрицательных чисел; $L_{N \cup M \cup -N \cup Q}$ – язык чисел, сконструированных на основе цепочек, включающих понятия L_N, L_M, L_{-N}, L_Q, но семантически не относящиеся к этим языкам этих понятий, например, числа $3\,{}^{6}/_{7}$, $-2{,}31$ и т.п..

Представление всего языка L_G в виде конечной итерации крайне наглядно; на каждой очередной итерации языка мы можем добавлять к нужному семантическому языку новые объекты, тем самым, не ограничивая каждый язык чисел в размере. Добавление каждого нового понятия соответствует итерации L_G, иначе говоря, добавлению натурального числа к L_G, при этом, какое семантическое выражение будет иметь это число не оговаривается. Эти размышления не противоречат результатам теории множеств, в которой полагается, что множество натуральных чисел имеет одинаковую мощность с множествами отрицательных и рациональных чисел, хотя эти результаты получены иным путем.

Заметим, что при очередной итерации языка L_G все символы-числа семантического языка L_N сохраняют свои значения в то время, как для остальных семантических групп возможно потребуется переопределение понятия с другим натуральным числом. Таким образом, мы заключаем, что конечный неполный семантический язык натуральных чисел L_N инвариантен по отношению к итерации единого языка L_G, иначе говоря, символы L_N сохраняют свое значение на любой произвольной итерации L_G. Более того, все понятия, выражаемые другими числовыми языками – L_0, L_{-N}, L_Q, $L_{N\cup M\cup -N\cup Q}$ – получены закреплением за некоторым натуральным числом иного семантического значения.

Отдельного внимания служит расширение метаязыка над числами, поскольку добавление нового понятия к нему семантически обогащает язык, может привести к созданию новых числовых понятий. Определим операцию возведения в степень следующим образом: $X_1\hat{}1 = X_1$, $X_1\hat{}X_2 = X_1 \times X_1\hat{}\mathrm{S}^{-1}(X_2) = X_1\hat{}\mathrm{S}(X_2) \div X_1$. Обратную же операцию можно определить на основе результата возведения в степень, то есть: $1\sqrt{X_1} = X_1$, $X_2\sqrt{(X_1\hat{}X_2)} = \mathrm{S}^{-1}(X_2)\sqrt{\left(X_1\hat{}\,\mathrm{S}^{-1}(X_2)\right)} = \mathrm{S}(X_2)\sqrt{\left(X_1\hat{}\mathrm{S}(X_2)\right)}$. Произвольное число в нулевой степени равняется единице, это свойство также выводимо: $X_1\hat{}0 = X_1\hat{}\mathrm{S}(0) \div X_1 = X_1 \div X_1$.

Операции на числах определяются исключительно на натуральных числах, но распространяют свое свойство на любые другие получаемые цепочки, поскольку остальные числа получаются посредством тех же операций, как семантические понятия, отличные от натуральных чисел. Их также можно рассматривать, как незавершенные операции с натуральными числами. Данный язык позволяет не терять из виду того, что все объекты языка – суть есть натуральные числа, за некоторыми натуральными числами закреплены иные семантические понятия, интерпретируемые, как операции над числами; различные цепочки, включающие семантические натуральные числа и неудаляемые операции, есть семантическое выражение каких-то отличных от натуральных чисел понятий.

О построении континуума

Мы подходим к одной из главных задач работы, а именно, освещения нелогичности представления такого понятия, как иррациональное число, наравне с числами иррациональными, как эквивалентные по свойствам точки на числовой прямой. Это, в свою очередь, требует иной интерпретации результатов, реализованных в математике посредством таких канонических понятий, как канторовский диагональный аргумент и дедекиндово сечение, демонстрирующие, то, что принято называть несчетностью.

Данная концепция требует признания оправданности такого семантического феномена, как бесконечные множества, большие по размерам, чем некоторое каноническое счетное бесконечное множество, ассоциируемое с рядом натуральных чисел. Более того, эта математическая концепция, признанная как оправданная, транслируется на представление о физическом мире, как свойство физического пространства-времени, отождествленного со свойством математического континуума. Сама же проблема может быть сформулирована максимально простым образом, предложенным Геделем [Godl]: сколько точек находится на прямой евклидового пространства?

Начнем с элементарного неопределяемого понятия математики – точки. Это понятие элементарное и неопределяемое, значит, мы можем его заменить неким символом. Это уже по своей сути некий символ, но мы используем более конкретный символ языка L_G – единицу. Теперь обозначения точки и единицы отождествлены. Мы, очевидно, захотим иметь не одну точку, а некоторое множество; всем новым точкам, таким образом, будет семантически соответствовать некоторое натуральное число, или символ языка L_G. Это семантическая ассоциация накладывает на точки следующие свойства: они все различимы и естественно упорядочены. Если кто-либо захочет наделить точки, как понятия, естественными свойствами неразличения и неупорядочивания – это будет логически противоречивый акт. Для вскрытия противоречия достаточно попросить изобразить то, что подразумевается, как точка; тут мы скажем, что это единица, а изображенная вторая точка будет ее последователем, и пространственно они взаиморазличны, как натуральные числа, – большего и не требуется.

Итак, для удобства изложения мы сопоставим уже символу понятия точки единицу следующим образом: $p_1 = 1$. Мы будем считать точку, как математическое понятие, далеко не элементарным; оно доступно анализу. Добавим еще одну, следующую, точку: $\mathrm{S}(p_1) = p_2$. Эта точка другая, по отношению к первой, получена путем разделения двух точек некоторой новой сущностью – интервалом; это понятие не равнозначно понятию точки. Оно характеризует взаиморазличие двух точек, соответственно, аналогично взаиморазличию двух натуральных чисел, отождествленных с этими точками.

Но, в отличие от свойств натуральных чисел, точкам мы полагаем несколько видоизмененные свойства: они только взаимоотличимы, у них не должно быть абсолютного выражения в виде числа. Сформулируем это следующим образом: $(\mathrm{S}(p_1) = p_2) \wedge (\mathrm{S}(p_2) = p_1) \wedge (p_1 \neq p_2)$. Последнее выражение можно сопоставить со следующей формулировкой: точка p_1 следующая по отношению к точке p_2, точка p_2 следующая по отношению к p_1, p_1 и p_2 – различные точки. Это выраженное семантическое свойство противоречит свойству натуральных чисел.

Возьмем уже три точки, ассоциированные с натуральными числами, p_1, p_2 и p_3, – и опишем их взаимные отношения, как точек, путем последовательного перечисления: $p_1, \mathrm{S}(p_1), \mathrm{S}(\mathrm{S}(p_1))$, либо $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{S}^{-1}(p_3)), \mathrm{S}^{-1}(p_3), p_3$, либо $\mathrm{S}^{-1}(p_2), p_2, \mathrm{S}(p_2)$. Мы приходим к важному наблюдению за свойством точек: им, в отличие от натуральных чисел, не важен порядок чтения, то есть последовательность точек p_1, p_2, p_3 семантически эквивалентна последовательности p_3, p_2, p_1.Для большего числа элементов, т.е. точек, рассуждения аналогичны. Заключим, что линейное упорядочивание точек, как свойство, выражающее само понятие точки, должно быть инвариантно по отношению к направлению упорядочивания, иначе говоря, используя принятое обозначение для реляционного отношения предшествования, $x \prec y$ (читается «x предшествует y», $xRy \wedge x \neq y$), для точек будет семантически справедлива запись: $\ldots \prec p_{i-1} \prec p_i \prec p_{i+1} \prec \cdots = \cdots \succ p_{i-1} \succ p_i \succ p_{i+1} \succ \cdots$.

Будем использовать стандартное обозначение операции зеркального отображения над цепочкой, где X^T обозначает зеркальное отображение цепочки X. Соответственно, для конечного языка натуральных чисел L_N можно произвести обратный ему конечный язык L_N^T, представляющий перечисление тех же самых натуральных чисел, но только в обратном порядке. Операция инвалютивна, следовательно, имеем: $(L_N^T)^T = L_N$. Напомним, что под языком L_N мы подразумеваем первичные объекты, т.е. непосредственно числа-цепочки, в то время как остальным языкам, в том числе L_N^T мы подразумеваем семантическое соответствие некоторым натуральным числам L_G иных значений; в данном случае натуральные числа L_G обретают значения чисел L_N, т.е. происходит семантическое копирование языка L_N.

Обозначим язык точек через L_p – это язык, который перечисляет все имеющиеся точки на определенной итерации языка L_G. Свойства этого языка следующие: он семантически тождествен как языку натуральных чисел, так и зеркальному отображению этого языка, иначе говоря $L_p = \left(L_p\right)^T$. Введем такие операции, которые будут семантически справедливы как для L_N, так и для L_N^T. По своей сути, у нас уже имеется копия языка натуральных чисел, представленная как язык отрицательных целых чисел без нуля, будем считать, что $L_N^T = L_{-N}$. Порядок следования соответствующих чисел в языках будет: $\ldots n+1, n, n-1, \ldots = \cdots - n+1, -n, -n-1, \ldots$. Итак, получаем, что при подстановки заместо понятия точки, как некоторого натурального числа, так и соответствующего отрицательного, значение выражения должно сохраняться. Это также можно интерпретировать, как то, что для точки понятие последующей и предыдущей идентичны и заменяются понятием соседней точки. Это обстоятельство мы выразим следующим образом на основании первичных понятий для натуральных чисел: $1 = \mathrm{S}(p) - p = \mathrm{S}^{-1}(p) - p$. Символу единице здесь уже соответствует понятие интервал. Последняя запись означает, что для любой точки расстояние до любой соседней точки, предыдущей или следующей, что одно и то же, одинаково. Обозначение точек посредством языка L_N или L_{-N} будем считать семантически тождественным и выражать следующим образом: $|p| = |-p|$, где $-p$ – выражение точки в языке L_{-N}, если p – выражение в языке L_N и наоборот.

Для описания понятия точек мы вводим неотрывно связанное понятие интервала. Для понятия длины интервала мы будем использовать натуральные числа и отрицательные числа. Интервал от точки p_1 до p_2 будем обозначать i_{1-2}, тогда $i_{2-1} = -i_{1-2}$. Семантическое же значение интервала одинаково: $|i_{2-1}| = |i_{1-2}|$. Интерпретация операции суммы над объектами будет следующая: $p_1 + i_{1-2} = p_2$ – интерпретируется, как трансляция; к некоторой точке p_1 мы присоединяем интервал до некоторой точки p_2, что, как результат, дает точку p_2. Если точка p_1 выражалась натуральным числом, то прибавление натурального числа приведет к сдвигу вправо; если p_1 выражалось отрицательным числом, то прибавление натурального числа приведет к сдвигу влево с получением семантически тождественной точки путем сопоставления значений L_N^T и L_N. Аналогичны рассуждения относительно знака интервала. Операция разности $p_1 - p_2 = i_{1-2}$ интерпретируется, как вычисление интервала между двумя точками. Если абстрагироваться от формальных операций и перейти на определения понятий, то можно сказать, что некоторая точка определяется посредством другой точки и связанного интервала; интервал определяется посредством двух разных точек. Итого, мы имеем три сущности, которые взаимоопределяют друг друга.

Как показано, привнесение отрицательных чисел, как инструмент описания понятия точек, необходим лишь для выражения возможности равнонаправленного чтения символов. Здесь последовательность, или язык, отрицательных чисел является семантической копией обратной последовательности натуральных чисел, которая, в свою очередь, однозначно, или изоморфно, определена на первоопределяемой последовательности натуральных чисел. Таким образом, мы можем отказаться от дополнительной копии последовательности натуральных чисел и использовать однозначную связь точка – натуральное число, но при соблюдении некоторых условий.

Рассмотрим точку, как математический объект, несколько глубже. Точке неявно предполагается наличие некоторого свойства. Например, если рассматривать геометрию, то за точкой может быть закреплено свойство «являться вершиной некоторого угла», или «принадлежать некоторой прямой», или «делить некоторый отрезок пополам», свойство можно рассматривать, как сочетание каких-либо элементарных свойств. В функциональном анализе точке может соответствовать некоторое значение – значение функции. Не вдаваясь в излишние подробности, мы заключаем, что точка, как математическая сущность, неотрывно связана с неким свойством, которое она также отождествляет. Если говорить о точке в пространстве, как таковом, без рассмотрения внешних свойств этого пространства, то непосредственное свойство пространства будет задаваться посредством точек и интервалов – других сущностей мы не привносим. Для конкретной итерации языка мы полагаем конечное число точек. Мы постулируем следующую интерпретацию свойств точек: свойства точек определяются взаимным расположением этих точек; положение точек определяется через понятие интервала относительно других точек.

Мы поступим следующим образом, будем связывать точку с натуральным числом, которое будет только обозначать эту точку; сама точка будет характеризоваться исключительно каким-то собственным свойством. Мы предусматриваем, что можем поменять для точки-числа ее число, как смена названия, однако свойства этой точки должны быть при этом неизменные. Пусть на некоторой итерации языка имеется цепочка натуральных чисел $L_N = X_1$, ассоциированная с точками. На очередной итерации добавим новую точку-натуральное число, получим $L_N = X_1 x$. Для точек-чисел также должно выполняться условие $L_p = X_1 x = x X_1^T$. Поскольку начальный порядок обозначения точек был выбран произвольно, можно также добавить, что $L_p = X_1 x = x X_1^T = x X_1 = X_1^T x$; иначе говоря, семантические свойства цепочки не меняются при добавлении числа-точки с любой стороны. Однако для натуральных чисел счет начинается с единицы, и добавление очередного числа также должен рассматриваться, как добавление числа перед единицей, если речь идет о точках. В случае $X_1 x$, т.е. добавления точки-числа справа от цепочки точек-чисел, никакой потребности в переименовании точек не возникает, числа-точки сохраняют свои свойства, а при добавлении точки слева, $x X_1$, необходимо произвести переименование свойств точек, эту операцию со свойствами мы ассоциируем с термином трансляция. Для каждого числа x_i цепочки X_1 связанные свойства переносятся, или транслируются, на последователь $\mathrm{S}(x_i)$ в цепочке $x X_1$. Операции с отзеркаленной цепочкой, которую мы подменяем соответствующими отрицательными числами, $x X_1^T$ интерпретируется, как добавление $\mathrm{S}^{-1}(x_i)$ к последовательности отрицательных чисел, т.е. переименование точек не требуется; а в случае $X_1^T x$ точки необходимо переименовать, где каждому числу x_i цепочки X_1^T будет соответствовать $\mathrm{S}^{-1}(x_i)$ цепочки $X_1^T x$ по некоторым свойствам, закрепленным за точкой-числом. Таким образом, добавление точки справа или слева семантически неразличимы; свойство операции трансляции в виде сохранения за точками свойств является целью определения данной операции на цепочке точек-чисел. Здесь мы можем вспомнить красочное описание принципа симметрии в физике, предоставленное Р. Фейманом [Fein], где описывается невозможность абсолютного определения понятий право и лево, или отрицательного и положительного, только в том контексте это рассматривается, как свойство физической материи. Здесь же мы пытаемся получить аналогичные результаты, но уже через свойства символов, как непосредственных объектов для исследования. Переименование точек, но не как свойство, а как операцию, изменяющую порядок нумерации точек на обратный, будем называть вращением.

Пусть задана цепочка точек X_1 путем их нумерации в терминах языка $L_N \cup L_0 \cup L_{-N}$. К каждому числу x_i цепочки X_1 мы можем прибавить некоторое натуральное число n так, чтобы получить цепочку X'_1, состоящую исключительно из терминов языка натуральных чисел, причем трансляция свойств на числа-точки осуществляется по однозначному соответствию $x_i \leftrightarrow x'_i$, где $x'_i = x_i + n$. Здесь мы показываем, что отрицательные числа, ровно и как ноль в значении точки на числовой прямой, являются вторичными понятиями, образованными из натуральных чисел; существует очевидная процедура, именуемая, как трансляция, позволяющая перейти к первичным понятиям, представленных натуральными числами.

Для интерпретации дробных чисел в контексте понятия точки сократим рассуждения за очевидностью. Пусть задана последовательность точек через цепочку чисел X_1. Добавлением новой точки в интервал между существующими числами-точками n_i и n_{i+1} цепочки X_1 мы сопоставим добавлению к языку следующего понятия $n_{i+q} = n_i + q$, где $q \in L_Q$. Относительные свойства этой точки, по отношению к другим точкам, может быть выражены через интервалы: число-точка n_{i+q} отстоит от точки n_i на интервал q и от точки n_{i+1} на интервал $1 - q$. Для любого конечного количества точек x_i, положение которых описано языком $L_N \cup L_Q$, можно применить операцию масштабирования, приводящую к семантическому соответствию $x_i \leftrightarrow x'_i$ где $x'_i = x_i \times n$, так что относительное числовое выражение точек будет задано только языком L_N.

Итак, в результате данного мысленного построения мы получили интерпретацию линейного пространства точек посредством исключительно натуральных чисел. Рассмотрены операции добавления к существующему конечному количеству точек дополнительных точек, что может быть ассоциировано с очередной итерацией языка L_G, причем положение этих точек в произвольном месте пространства существующих точек описывается также только натуральными числами. Для каждой очередной итерации языка можно добавлять число-точку вне уже заданной цепочки чисел-точек, при этом сохраняя относительное положение заданных чисел-точек – такая операция ассоциирована с трансляцией; также можно задать очередную точку внутри уже существующей цепочки чисел-точек, при этом, сохраняя взаимное относительное положение, – это операция масштабирования. Инвариантность операции вращения по отношению к свойствам точек и определяет эти самые свойства, связывая понятия точки с первичным объектом языка – натуральным числом. Конечно, в силу привычки, при числовом задании положения точки на числовой прямой удобно пользоваться нулем, отрицательными и дробными числами; однако, как показано, эти понятия выводятся из натуральных чисел. Подобную конструкцию мы назовем рациональным континуумом, чтобы различать с термином континуума, как понятия теории множеств, имеющего мощность большую, чем счетное множество.

О семантической интерпретации понятия иррационального числа

Ричард Дедекинд в своей монографии [Ded] рассматривает интерпретацию чисел, как точек на числовой прямой. Свои рассуждения здесь мы начнем именно с этого представления, хотя ранее нами было показано, что точка, как понятие, может быть описано через числа, но однозначно не подменено.

В целях настоящего исследования определим понятие иррационального числа посредством предполагаемых свойств данных сущностей: возьмем два рациональных числа r_1 и r_2, $r_1 < r_2$, которые обозначим, как нижней и верхней оценкой некоторого иррационального числа. Произвольное иррациональное число, ir, определим как $ir = r_1 + \varepsilon_1 = r_2 - \varepsilon_2$, где ε_1, ε_2 – некоторые иррациональные составляющие числа ir, необходимые его для выражения через числа r_1 и r_2, суть есть также иррациональные числа. Семантическое определение иррационального числа, тождественное приведенным формулировкам, будет следующим: для любых двух различных рациональных чисел r_1 и r_2, определяющих точки на числовой прямой, можно определить такое понятие, как иррациональное число ir, которое находится в интервале между этими числами, так что $r_1 < ir < r_2$, причем данное число обладает таким свойством, что не разбивает интервал пополам, так что $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Заметим, что мы еще не определили иррациональное число однозначно, здесь мы выделили лишь его свойство, то условие, которое обязательно должно соблюдаться для иррационального числа, хотя оно может выполняться, если ε_1 и ε_2 понимать, как рациональные числа, т.е. подходит, как описание рационального числа. Ключевое различие, что для числа иррационального нельзя допускать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Очевидно, что середина интервала, однозначно выражаемая некоторым рациональным числом $(r_1 + r_2) \div 2$ либо больше ir, либо меньше. Это значит, что мы допускаем возможность существования как минимум двух иррациональных чисел, расположенных симметрично, или на одинаковом интервале, от произвольного рационального числа $(r_1 + r_2) \div 2$.

Рассуждения могут быть продолжены по индукции, относительно новых обнаруживаемых точек внутри оговоренного интервала. Заключим следующее важное обстоятельство, описывающее взаимное отношение, приписываемое рациональным и иррациональным числам: на любом интервале между различными рациональными числами можно обнаружить число иррациональное; на любом интервале между различными иррациональными числами можно обнаружить число рациональное; если от рационального числа отложить интервал до некоторого иррационального числа, но в другом направлении, то результатом будет также иррациональное число; если от иррационального числа отложить интервал до некоторого рационального числа, но в другом направлении, то результатом будет иррациональное число. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать иррациональный интервал, как обособленную семантическую сущность, не связанной с рациональным числом, следовательно, и с числами натуральными. Это значит, что если мы предположим иррациональное число, как точку, то на некотором интервале от нее находится точка, выражаемая рациональным числом, но в то же время на том же интервале, но в противоположную сторону, точка будет выражаться через число иррациональное. Но в нашем представлении точек, как последовательности чисел семантически тождественной отзеркаленной этой же последовательности, возникает противоречие вполне очевидным образом.

На рассматриваемой числовой прямой произведем операции трансляции и мультипликации так, чтобы в результате применения операций число r_1 было преобразовано в единицу, соответственно, число r_2 будет преобразовано в некоторое натуральное число, n_2. Эти же операции обязательны для применения и ко всем остальным точкам числовой прямой данной итерации языка натуральных чисел для того, чтобы свойства точек, выраженные через взаимное их расположение, оставались неизменными. Возникает вопрос относительно влияния произведенных преобразований на то, что мы подразумеваем под иррациональными числами. По принятым представлениям, точки, соответствующие иррациональным числам, должны быть переименованы в иные иррациональные числа. Но мы будем настаивать, что в результате произведенных операций мы избавились от всех рациональных чисел, подменив их первичными понятиями натуральных чисел; иных чисел, соответственно, и точек на прямой не может и быть.

Взглянем на точки до преобразования, рассмотрев цепочку чисел: $r_1 \cdot (ir) \cdot r_2$где под (ir) мы подразумеваем некоторое понятие, находящееся между точками, соответствующим числам r_1 и r_2. После преобразований мы получили цепочку натуральных чисел, которую выразим аналогичным образом: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (ir) \ldots \cdot n_2 - 1 \cdot n_2$. Для всех натуральных чисел в интервале от 1 до n_2 до преобразования можно сопоставить какое-либо рациональное число, обозначающее ту же самую точку, которую после преобразования выражает число натуральное. В последовательности натуральных чисел, отождествленных с точками, помимо самих натуральных чисел присутствует еще одна сущность языка, определяемая нами, как символ-разделитель. Для полноценного выражения свойств символа разделителя мы можем обратиться к грамматике $N0\infty$ в контексте семантической интерпретации, предлагаемой в данной работе. Итак, мы заявляем следующее: иррациональным числам, как понятиям математики, соответствуют элементарные интервалы, или окрестности точек, если понятиям точек сопоставлять множество рациональных чисел. Мы указываем на то, что пространство точек, помимо самих точек, содержит некоторую самостоятельную сущность, отличную от точек, и позволяющую взаиморазличать точки. И эта самая сущность не может быть описана как точка, поскольку неразрывно используется для задания самого понятия точки. Представление об иррациональном числе не укладывается в представление о точке: между двумя произвольными точками мы можем задать еще одну, и она будет исключительно отождествлена с рациональным числом, поскольку была по факту своего задания однозначно определена через конечные ненулевые интервалы до соседних точек. Тогда произвольная окрестность точки, не содержащая другую точку, может быть семантически отождествлена с тем, что мы подразумеваем под иррациональным числом. Данное заключение основывается на семантическом сопоставлении свойств, приписываемых понятию иррационального числа и символа разделителя, как непосредственного символьного объекта единого языка натуральных чисел. Мы рассуждаем в конструктивных понятиях; если необходимо полагать, что в окрестности некой точки находится точка, и даже не одна, их всегда можно добавить на очередной итерации языка. В любом случае, рассматривая какую-либо итерацию, между натуральными числами, или символами, языка находятся символы-разделители; при рассмотрении понятий точек, которым соответствуют натуральные числа, символы-разделители семантически переходят в понятие интервала, или окрестности точки.

Ключевое различие в данном выделении рациональных чисел от иррациональных заключается в невозможности перевести число иррациональное с помощью операций трансляции и масштабирования в натуральное число, то есть первичное семантическое понятие языка. Тогда может возникнуть возражение, основанное на том, что мы можем к языку добавить операцию, или даже операции, переводящие некоторый набор иррациональных чисел в натуральные. Как пример, возьмем последовательность квадратных корней натуральных чисел, эта последовательность содержит числа иррациональные. Допустим, мы можем применить операцию возведения квадрат для каждого числа, соответственно, получим ряд натуральных чисел. Недопустимость данной и подобных операций объясняется изменением относительного расположения точек-чисел, их взаимное расположение изменится, данная операция не сохраняет свойства точки, как семантического объекта языка, а значит не применима. Аналогичные рассуждения можно применить и к мнимой единице и подобным языковым конструкциям.

Если обратиться к геометрическому выражению очень специфического числа, а именно отношению радиуса окружности к ее диаметру, можно предположить возражение, что оба объекта, а именно, радиус и дуга, заданы в явном виде, каждому может быть сопоставлено некоторое число; длина дуги существует ровным счетом аналогично длине радиуса. Здесь мы вынуждены указать на то обстоятельство, что длина дуги не выразима в полной мере через радиус; но также можно рассуждать и обратно – прямые линии также в полной мере не измеримы дугами. Важен не сам объект реальности или его символ, а то, как это будет семантически связано в языке; тогда факт возможности изображения дуги, или окружности, или введение в язык особых символов для отождествления с этими объектами, такими как π, никак не оспаривает невозможность выражения этих понятий в полной мере, конечным образом, через понятия натуральных чисел, которые мы в данном дискурсе наделили свойством первичных, или элементарных, языковых объектов.

В заключение параграфа рассмотрим интерпретацию теоремы о диагонали [KurMost], которое используется для доказательства различных бесконечных множеств. Заметим, однако, что возможность существования различных бесконечных множеств уже содержится в принятии существования первичного, счетного, бесконечного множества; раз мы принимаем такой объект аксиоматически существующим, то можно последовательно допустить подмену атомарных элементов данного множества счетными множествами, и так до бесконечности. Вернемся к теореме: пусть L_N – конечное множество натуральных чисел итерации языка L_G, $L_{2^{(N-1)}}$ – множество всех подмножеств множества L_N без пустого множества. Совершенно очевидно, что $|L_N| < |L_{2^{(N-1)}}|$ для любых $N > 1$. Язык, или множество $L_{2^{(N-1)}}$, мы можем рассматривать, как метаязык над первичными понятиями языка, т.е. над языком L_N. Оба этих языка являются конечными, поскольку являются частями единственного языка L_G, которому мы сообщили свойство счетной бесконечности. Язык L_N представим как конечная цепочка символов для итерации языка L_G вместе с $L_{2^{(N-1)}}$; язык $L_{2^{(N-1)}}$, как цепочка символов, включает символы L_N и иные символы L_G, которые семантически однозначно отождествлены с неединичными цепочками, составленными из символов L_N. Придавать цепочке L_N свойство законченности неоправданно, ведь она содержит не все символы единого языка L_G, следовательно, перенять свойство бесконечности цепочка L_N не может. Таким образом, при рассмотрении диагонального аргумента, мы просто не выходим за рамки конечных понятий, что имеет под собой вполне логичное обоснование. Говоря еще проще, мы простоя отрицаем платонистический подход, усматривающий множество натуральных чисел, как конечного, законченного объекта мышления.

В контексте полученного результата нельзя не упомянуть труды Вейля по философии математики [Weyl]. Отдельно хотим выделить мысль о «бессмысленности рассматривать континуум, как нечто готово-сущее», а более философски глубокая мысль, на наш взгляд, заключается в том, что «настоящее не есть нечто уже готовое в себе и определенное, а что оно само, вовнутрь становится в процессе перехода в будущее, и только … по «скончании всех веков» становится совершенно точно определенным…». Полагаем, что что именно понятие континуума отражает последнюю мысль, но уже в математически абстрактной, философски сухой, форме, задача которого (континуума) вновь развернуться в представление о познавательных возможностях разума. Вместе с тем, мы приходим к схожим результатам к конструкции, называемым Вейлем, «атомистическим континуумом», в то же время характеризуемым им самим, как «логически выдержанная, но вместе с тем насильственно-вымученная» теория. Сущность представления континуума Вейлем заключалась в рассмотрении интервалов, как элементов континуума, а не точек, причем предполагается что, натуральным числам некоторым законом можно сопоставить интервалы, причем каждый последующий интервал включает предыдущие. Заметим лишь, что данная логическая концепция представляет собой последовательные вложения интервалов друг в друга и также может быть описана через аксиому бесконечности ZF, в то же время предполагает некоторую сущность – интервал – который включает точки, или числа, но который в то же время не может быть выражен посредством точек, или чисел. На наш взгляд, такое построение логически тупиково в смысле его рекурсивности, или самоприменимости. Получается, что континуум строится на элементах, сами являющихся по своей сути континуумами, иначе говоря, само понятие не раскрывается однозначно посредством других, иных понятий, а лишь дается определение его свойств.

В нашей модели рационального континуума присутствуют элементы построения континуума – элементарные интервалы, не являющиеся точками, и в то же время не содержащие точки, по сути, являющимися самостоятельными атомами, сродни точкам. Это некоторые отдельные семантические сущности. Оправданность такого подхода объясняется исключительно свойствами символов, как первичных, атомарных объектов языка, следовательно и процесса мышления. Точки и числовые интервалы при этом не рассматриваются, как первичные сущности, они рассматриваются как символы и иволютивные упорядоченные цепочки, соответственно. Оценку логической убедительности предложенного построения мы оставляем за читателем.

Заключение

Будем считать, что основная цель работы достигнута, а именно выражена идея логического построения некоторых фундаментальных понятий математики, основываясь на свойствах символов, как первичных объектов; подвергнуто критике представление о несчетности, в том смысле, как качественной характеристики множества, или множеств с кардинальными числами большими, чем $\aleph_0$.

Следует признать, что метаматематическому дискурсу довольно сложно придать стройное изложение, присущее уже разработанной формальной теории, отчего в работе могут содержаться некоторые неточности, связанные с использованием устоявшейся терминологии; надеемся, что контекст изложения позволит донести мысль, вкладываемую автором в те или иные формулировки.

Также в работе внимание уделено откровенно философским идеям. Сделано это целенаправленно; для обоснования критики тех или иных устоявшихся формальных методов необходима аргументация, очевидно, что взяться из аксиоматического подхода она просто не может. Философским вопросом мы хотим завершить и настоящий параграф.

Мы исходили из конструктивной концепции в изложении Мартина-Лефа [MartL], символы языка математики рассматриваются как материальные объекты, хотя прямо об этом не заявляется; используется термин «конструктивные объекты», полагая их рассмотрение как конечных конфигураций знаков, непосредственно распознаваемых, существующих, как конкретные объекты во времени и пространстве. Несмотря на кажущуюся математическую строгость, с философского воззрения здесь можно, а может и нужно, усмотреть неопределенность изложения понятия. Например, эти конечные конфигурации знаков воспринимаются одним сознанием или несколькими; без утверждения положения о материальности знаков, или символов, непосредственно распознаваемые объекты, воспринимаемые, как равные или различные, в зависимости от субъекта распознавания могут таковыми субъективно не признаваться. Далее, утверждается, что формулы и доказательства в формальной системе рассматриваются, как конструктивные объекты, а произвольные осмысленные утверждения – нет. Тогда как можно отличить одно от другого, если по большому счету и то, и другое выглядит как конечная конфигурация знаков? В изложении Карри [Curr] идея Гильберта заключалась в предположении существования финитных интуитивных рассуждений, абсолютно верных a priori; язык формулирования метаматематических суждений должен быть механическим в том смысле, что правильность применения правил языка можно было проверить, рассматривая символы, как физические объекты, безотносительно к тому значению, которое они могли бы иметь. Опять же, здесь фигурирует понятие физического объекта. Считаем уместным перенести рассуждения в философскую плоскость относительно дилеммы об идеалистическом и материалистическом воззрении.

Этот предмет нами уже поднимался в параграфе «Об элементарности символа», где, по сути, выражается материалистическое представление о символе. Под материей, как философском понятии, мы будем подразумевать определение, данное Лениным [Len]; будем считать его вполне подходящим в контексте данной работы для описания свойства символа быть материальным объектом. Отсюда можно задаться вопросом, переносит ли данное представление о символе материалистическое воззрение на природу математики? Было бы странным выводить основание для абстрактной по своей сущности науки из предметной реальности; логичнее было бы предположить такое основание более подходящим для физических наук.

Здесь мы образуемся к концепции Ч. Пирса относительно измерений знака: он есть знак для некоторой мысли; он есть знак вместо некоторого объекта, эквивалента этой мысли; он знак в отношении связи с этим объектом [Peir].

Для начала формальных логических рассуждений достаточно пользоваться лишь первым измерением, не переводя знак в сферу объектов или материи, иначе говоря, пусть он существует исключительно в сознании. Однако и в этом случае мы обнаружим для элементарного знака-мысли свойства так называемого конструктивного объекта; он различим, а значит, дискретен, относительно других знаков-мыслей, он может быть мыслим либо тождественен им, либо отличным. Сам процесс мышления оказывается связан со временем, и здесь вовсе необязательно его полагать материальным, пусть это ощущение времени находится исключительно в сознании. Этого уже достаточно для того, чтобы осуществлять развитие абстрактного языка, отвлеченного от материи; знаки-мысли, как атомы в пространстве мыслимого времени, неизбежно будут подчинены некоторым законам; исследование этих законов и есть логика. В этом смысле и математика может отказаться от материальных корней и заниматься построением или анализом конструкций из мыслей-знаков. В то же самое время – это тупик.

Математика – это, прежде всего, язык. Если мы допустим возможность развития языка исключительно внутри индивидуального сознания, что в принципе, возможно, но как инструмент рефлексии, тогда само понятие языка потеряет свой естественный смысл. Приведем аналогию с концепцией теории графов: пусть точка, или узел, будет ассоциировано с сознанием, или носителем языка, очередная итерация языка, или мыслительный акт, будет ассоциирован со стрелкой, поскольку мы подразумеваем мыслительный процесс внутри сознания, эта стрелка будет петлей. Петля ассоциируется с постоянным дискретным мыслительным процессом, приводящим к изменению языка; от этого качества языка, постоянно меняющегося, нельзя отказаться, поскольку само мышление, как понятие, потеряет свой смысл, превратится в некое закристаллизованное знание, и язык, как процесс, становится не нужным. Такая конструкция может быть ассоциирована с философской идеалистической концепцией, называемой солипсизмом. Напротив же другая модель, предполагающая множество, не единичное, конечно, узлов, взаимно соединенных стрелками и имеющих петли. Такая модель, считаем очевидным, более полно отражает понятие языка, но она уже предполагает некоторую среду, осуществляющую медиаторную связь между отдельными сознаниями-носителями языка. Можно попробовать исключить свойство материальности для этой среды. Сделано это может быть следующим образом: субъект может предположить, что с ним осуществляет взаимодействие другой субъект посредством телепатии, либо субъект может отрицать принцип объективности, следовательно и материальность среды, заявляя, что источник сообщения передал информацию не в точности такую, которая была получена субъектом-приемником сообщения, также и наоборот. Объективность, ровно как и материальность языковой среды, подтверждается фактом возможности ретрансляции содержательной части сообщения, которая и является частью языка: для повторения фразы собеседнику вовсе необязательно воспроизводить частоту звука, протяженность, обертона и тому подобные атрибуты самого физического явления, ровно как и абсолютно точно копировать письменные символы. Таким образом, изучая язык, как понятие, как сущность, необходимо объективно, или материально, осмыслять его элементы, каковыми являются символы или знаки языка. В настоящей работе мы пытались отразить эту мысль через отсылку на дискретность и естественную временную упорядоченность знаков, как физических объектов, объективно воспринимаемых не только другими субъектами языкового обмена, но и непосредственно субъектом, ведущим рефлексивные рассуждения. В этом свете уже не вызывает удивление, что предмет изучения науки физики так удобно и так точно описывается языковыми средствами математики.

С другой стороны, в языке современной математики содержатся понятия непрерывности, или континуума, иррациональных чисел и множества других понятий и определений, присущих развитым формальным теориям. Мы предлагаем относиться к подобным понятиям, как к своего роду химерам, не имеющим реального, или объективного, явного отражения. Такой химерой становится окружность; данное понятие может быть подменено выразимыми, реальными, понятиями многоугольников с равными сторонами с любым, сколь угодно большим, но конечным, количеством углов. Вместе с тем мы допускаем возможность формального оперирования с такими понятиями, как объектами-мыслями, полностью невыразимыми посредством конечной совокупности символов, принятых за первичные понятия языка, – натуральных чисел. Представление о непрерывности, применимое к физическим объектам, телам, находит свою несостоятельность с признанием существования дискретно различимых атомов, элементарных частиц, квантов энергии и т.п. объектам; применительно же к описанию материального пространства мы должны усматривать несостоятельность концепции непрерывности через признание существование материальных волн, или волн де Бройля, хотя здесь логическое построение ожидаемо более сложно. Полагаем вполне очевидным, что для всех предметных, технических задач, вполне будет достаточным применение предложенного рационального континуума.

Выраженный в данной работе взгляд на предмет математики не претендует на полноту, мы лишь обосновываем наше видение логического построения математических объектов с учетом фундаментальных свойств символов, игнорирование которых может быть причиной как излишне абстрактного, так и сугубо механистического подходов.

Список литературы

[Alf] Алферова З.В. Теория алгоритмов. – М: Статистика, 1973.

[Brou] Brouwer L.E.J. Historical background principles and methods of intuitionism. – South African journal of science, 1952.

[CarnMean] Карнап Р. Значение и необходимость. – М: Издательство иностранной литературы, 1959.

[CarnLogSyn] Carnap R. Logical syntax of language. – London: Routledge, 2000.

[Chom] Chomsky N. Three models for the description of language. // IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 2, No 3, 1956.

[Curr] Карри Х.Б. Основания математической логики. – М: Мир, 1969.

[Ded] Dedekind R. Essays on the theory of numbers. – Chicago: Open court publishing company, 1901.

[Fein] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 4. – М: Мир, 1976.

[FrBar] Френкель А.А., Бар-Хилел И. Основания теории множеств. – М: Мир, 1966.

[Godl] Godel K. What is Cantor’s continuum problem? // The American Mathematical Monthly, 1947, Vol. 54, No. 9.

[Goods] Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ. – М: Наука, 1970.

[Heg] Гегель Г.В.Ф. Наука логики.

[KurMost] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М: Мир, 1970.

[Len] Ленин В.У. Материализм и эмпириокритицизм. Т. 18. – М: Издательство политической литературы, 1968.

[MartL] Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. – М: Мир, 1975.

[Pean] Peano G. Arithmetices principia: nova method exposita, 1889.

[Peir] Пирс Ч.С. Избранные философские произведения. – М: Логос, 2000.

[Tar] Tarski A. The Semantic Conception of Troth and the Foundations of Semantics. // Philosophy and Phenomenologicai Reseach, 1944, v. 4, n. 3, pp. 341–375.

[Weyl] Вейль Г. О философии математики Сборник работ. – М, Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство, 1934.