Кинематические уравнения колебаний математического маятника

© Н. М. Мусин

16 сентября 2023

УДК 534

Аннотация

В статье приводятся два подхода к выводу кинематических уравнений колебания математического маятника. Один из них общепринятый, но точность решения невысокая. Второй подход позволяет регулировать точность.

Ключевые слова: математический маятник, гармонические колебания.

1 Общепринятый вывод уравнений

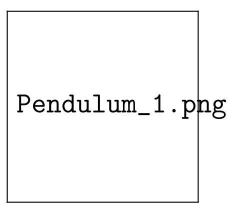

Рис. 1:

Пусть O - начало декартовой системы координат, ось абсцисс направлена слева направо, ось ординат идёт сверху вниз.

Пусть $M(x, y)$ -материальная точка с координатами x, y и массой m, тонкая невесомая нерастяжимая нить OM длины L прикреплена одним концом к точке O, другим концом - к точке M.

В описанной конструкции материальная точка M называется математическим маятником.

Проведём прямую MA перпендикулярно оси абсцисс, на ней возьмём точку D так, чтобы $MD = mg$. Проведём перпендикуляр MB к оси ординат. Обозначим $\varphi = \angle BOM-$ угол отклонения нити маятника от вертикали. Пусть, для определённости, маятник отклонён вправо. Проведём отрезок MC длины $mg \sin\varphi$ перпендикулярно прямой OM, как на рис.1.

Далее получается уравнение $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\varphi = 0$

Далее в учебниках начинается непонятный танец с бубнами. Сначала угол φ определяют с помощью равенства $\varphi = \dfrac{s}{L}$ согласно определению радианной меры угла (здесь $s-$ длина дуги окружности радиусом L, лежащей внутри угла $\angle BOM$). Затем вдруг «замечают», что при малых φ имеет место приближённое равенство $s \approx x$, затем «замечают», что при малых $\dfrac{x}{L}$ имеет место очередное равенство $\sin\dfrac{x}{L} \approx \dfrac{x}{L}$. Кроме того, $L\varphi \approx x$.

Наконец, отсюда «следует» $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{L}x = 0$. Но - для «малых» значений φ.

Кстати, $\sin\varphi$ можно было найти намного проще, из треугольника $\triangle OMB:\ \sin\varphi = \dfrac{x}{L}$.

Ну а дальше уже идут стандартные построения.

Решение этого уравнения $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ имеет место для «малых» φ.

Обозначая $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, можем ввести вспомогательный угол α так, чтобы $\sin\alpha = \dfrac{C_1}{A}$, $\cos\alpha = \dfrac{C_2}{A}$, тогда получаем уравнение $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$.

Получается, что амплитуда A вычисляется по формуле $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Итак, абсцисса точки x меняется приблизительно по гармоническому закону.

Что касается ординаты, то из треугольника $\triangle OMB$ получаем, что $y(t) = OB = \sqrt{L^2 - A^2\sin^2(\omega t + \alpha)}$.

В частности, если $L = A$, то $y(t) = L\cos(\omega t + \alpha)$.

C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Когда мы отводим маятник, например, вправо, то мы сами задаём будущую амплитуду A, то есть $A = x(0) = = C_1\cos(\omega 0) + C_2\sin(\omega 0) = C_1$. Пусть начальная скорость равна нулю, тогда $-C_1\omega\sin(\omega 0) + C_2\omega\cos(\omega 0) = C_2 = 0$.

Итак, $C_1 = A$, $C_2 = 0$. Но тогда вспомогательный угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Получается уравнение $x(t) = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t)$.

Окончательный вывод таков: если маятнику задать амплитуду $A = x(0)$ при нулевой начальной скорости, то абсцисса меняется по гармоническому закону $x(t) = A\cos(\omega t)$. Ордината меняется по закону $y(t) = \sqrt{L^2 - A^2\cos^2\omega t}$.

Если задать амплитуду $A = L$, то ордината будет меняться по закону $y(t) = L\sin\omega t$.

2 Другой подход к выводу уравнений

В предыдущем изложении исходили из движения математического маятника по дуге окружности с центром в точке O и радиусом L.

Предлагаеся разложить силу $\overrightarrow{MD} = m\overrightarrow{g}$ в сумму $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}$.

Тогда получается уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2} + g\operatorname{tg}\varphi = 0$.

Можно было бы продолжить в духе «малых углов», полагая $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$ и далее $\dfrac{d^2x}{dt^2} + g\varphi = 0$, затем $\dfrac{d^2x}{dt^2} + g\dfrac{L\varphi}{L} = 0$ и, наконец, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{L}x = 0$.

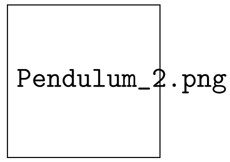

Рис. 2:

Но можно продолжить следующим образом: $\frac{d^2x}{dt^2} + g\frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0$, далее $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}\frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}} = 0$ и, наконец, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}} = 0$, где $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

И в этом случае можно будет говорить, что гармоническое колебания приблизительно имеют место при «малых углах», но мы можем, применив разложение в ряд Тейлора, получить более-менее точные решения уже нелинейного уравнения, например, такого: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\left(x + \frac{1}{2L^2}x^3 + \frac{3}{8L^4}x^5\right) = 0$.