

В.А. Чуриков

ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДЕЛЬТА- ФУНКЦИИ ДИРАКА С ПОМОЩЬЮ d -ОПЕРАТОРА

E-mail: vachurikov@list.ru.

Аннотация. Производится дифференцирование и интегрирование δ -функции Дирака с помощью d -оператора дробного интегродифференцирования. Для этого используется разложение в степенной ряд одного из возможных предельных представлений δ -функции, который поэлементно интегродифференцируется d -оператором.

Ключевые слова. Дробный анализ, d -оператор, дробная производная, дробное интегрирование, дельта-функция, нормальное распределение, полиномы интегродифференцирования.

Найдём дробную производную и неопределённый интеграл, дельта-функции комплексного порядка $s=\chi+i\gamma$ с помощью d -оператора [1]. Для этого будем использовать предельное представление δ -функции через предел по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ нормального распределения с математическим ожиданием в нулевой точке [2]

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{2n}.$$

Здесь представлено разложение экспоненты в степенной ряд.

Производная $\delta^{-s}(x)$ и первообразная $\delta^{+s}(x)$ дробного порядка s получается с помощью действия на дельта-функцию $\delta(x)$ оператором дробного интегродифференцирования $d^{\pm s}x$, где знак минус соответствует дробному дифференцированию, а плюс – дробному интегрированию

$$\begin{aligned} \delta^{\pm s}(x) &= d^{\pm s}x : \delta(x) = d^{\pm s}x : \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} \right] = \\ &= d^{\pm s}x : \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{2n} \right]. \end{aligned}$$

Здесь, после второго равенства дано разложение экспоненты нормального распределения в степенной ряд.

После интегриродифференцирования, получим

$$\begin{aligned}\delta^{\pm s}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1^{\mp s}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n \pm s + 1)} \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right)^{2n} x^{2n \pm s} \right] + C_{\pm s}(x) = \\ &= 1^{\mp s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x^{\pm s}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n)!}{\Gamma(2n \pm s + 1)} \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} \right)^{2n} \right] + C_{\pm s}(x).\end{aligned}$$

Здесь $C_{\pm s}(x)$ - полиномы интегриродифференцирования порядка s с произвольными численными коэффициентами, которые можно приравнять к нулю [1]; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $1^{\mp s}$ - коэффициенты, который появляются при интегриродифференцировании единица комплексного порядка $s = \chi + i\gamma$

$$1^{\mp s\{k\}} = \exp(\mp i 2\pi s k) = \cos(2\pi s k) \mp i \sin(2\pi s k).$$

Если дробная производная вещественная, т. е. $i\gamma=0$, тогда $s=\chi$. В зависимости от значения порядка интегриродифференцирования $s=\chi+i\gamma$, число коэффициентов будет разным, от одного, до бесконечного счётного множества.

В случае целочисленных порядков будет по одному коэффициенту, тогда $k=0$. Для рациональных порядков $s=r/p$ ($p>1$), тогда число коэффициентов будет конечным $k=0, 1, 2, \dots, p$. Если порядок s иррациональный, то коэффициенты образуют бесконечное счётное множество $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Полученные производные неопределённые интегралы можно получить аналогично, но используя другие представления для дельта-функции, которые могут приводить к другим результатам.

Литература

Чуриков В.А. Локальный d -оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апр. 2014. – Томск: Изд-во томского политех. ун-та, – 2014, – с. 283 – 289.

Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. Москва: Мир, 1976, – 312 с.