Алгебра Клиффорда как универсальный математический инструмент для описания и объединения гравитации и электромагнетизма

Бабаев Алимжан Холмуратович

Аннотация. В этой обзорной статье обобщённая алгебра Клиффорда (в неевклидовом пространстве) представлена как логический и универсальный математический инструмент для описания процессов электромагнетизма и гравитации. В частности, уравнения Эйнштейна (модифицированные, т.е. с 4-х током) и две независимые системы уравнений Максвелла (однородная и неоднородная с нелинейными поправками) объединяются в рамках алгебры Клиффорда. Законы сохранения 4-х тока, электромагнитный 4-х ток и т.д. приобретают явный геометрический смысл – новую трактовку.

Abstract. This review article presents Generalized Clifford algebra (in non-Euclidean space) as a logical and universal mathematical tool for describing the processes of electromagnetism and gravity. Within Clifford algebra, Einstein's equations (modified, i.e. with electromagnetic 4-current) and two independent systems of Maxwell's equations (homogeneous and inhomogeneous with nonlinear corrections) are unified. The laws of conservation of 4-current, electromagnetic 4-current, etc. have a clear geometric meaning and a new interpretation.

Ключевые слова: неоднородность векторного поля; **а**лгебра Клиффорда; уравнения Эйнштейна; неоднородная система уравнений Максвелла; 4-х мерный электромагнитный ток; уравнение непрерывности.

Keywords:

Non-homogeneity of the vector field; Clifford Algebra; Einstein's equations; non-homogeneous system of Maxwell's equations; 4-dimensional electromagnetic current; continuity equation.

УДК 537.8; 512.7

Введение

Цель этой обзорной статьи: показать преимущества математической теории, которая описывает и объединяет электромагнитные и гравитационные процессы. В частности, две независимые системы уравнений Максвелла и уравнения Эйнштейна объединяются в концепции алгебры Клиффорда даже в рамках классической (не квантовой) физики.

Обобщенная алгебра Клиффорда (в криволинейных координатах) используется как мощный и универсальный математический инструмент для объединения, казалось бы, двух необъединяемых фундаментальных полей. В рамках других математических методов, по крайней мере, в классической физике, пока это не удавалось.

В работе [1] был рассмотрен способ объединения гравитации и электромагнетизма, но в ограниченной версии, т.е. без 4-х токов и без многих важных деталей.

Теоретические основы

В статье [2] была дана дифференциальная билинейная форма в (M, g), как мера локальной неоднородности (B) векторного поля с 4-х потенциалом A:

$$B= \nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A \qquad (1),$$

где

$\nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A$ – произведение Клиффорда (∇A), которое состоит из внутреннего $(\nabla \bullet A)$ и внешнего $(\nabla \wedge A)$ произведений "векторов" ∇ и A [2].

$\nabla = e^i D_i$ – набла оператор в криволинейных координатах. Иногда его называют оператором Дирака в криволинейных координатах и обозначают как $D = e^i D_i$.

$D_i = D/q^i$– ковариантное дифференцирование.

$e_i = \partial_i X^k \gamma_k$ – "векторы" подвижного базиса (репера), точнее, 4x4 матрицы.

γ_k – матрицы Дирака. Часто совокупность четырех матриц Дирака $\{\gamma_k\}$ (в 4-х мерном «плоском» пространстве) называют каноническим базисом [2].

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = \mp 2E \delta_{ij}$$

где γ_k – матрицы Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера, E – единичная матрица.

Если $\boldsymbol{i,j}= 0$, то берется знак «+», если $\boldsymbol{i,j} =1,2,3$, то берется знак «-».

Проще говоря, матрицы Дирака γ_k используются подобно единичным векторам (ортам – $\boldsymbol{i, j, k}$) ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

$X^k (q^n)$ – функции преобразования или функции перехода от канонического базиса $\{x^n\}$ к подвижному базису $\{q^n\}$.

$\nabla \bullet A = e^i \bullet e^j \nabla_i A_j = g^{ij} \nabla_i A_j E$ – внутреннее произведение Клиффорда [**3**] (не скалярное произведение).

E– единичная матрица. g^{ij} – метрический тензор. $\nabla \bullet A$ по сути есть симметричный тензор второго ранга, и он интерпретируется как тензор деформации поля A.

$\nabla \wedge A = e^i \wedge e^j \nabla_i A_j$ – внешнее произведение Клиффорда [3] базисных "векторов" e^i и e^j (не векторное произведение).

$\nabla \wedge A$ по сути есть антисимметричный (кососимметричный) тензор второго ранга (бивектор), и он интерпретируется как тензор вращения поля A.

Примечание. По «немым» индексам идет суммирование (правило Эйнштейна). Латинские символы в индексах принимают значения от 0 до 3, а греческие – от 1 до 3.

Результаты

Берем градиент ($\nabla = e^i D_i$ – оператор Дирака) от (1)

$$\nabla B = \nabla \nabla A \qquad (2)$$

∇B - это тензор третьего ранга. Так как он дуален вектору в 4-х мерном пространстве [2], то мы запишем уравнение (2) в виде

$$\boldsymbol{\nabla B = \nabla \nabla A = \mu\, T \bullet A} \qquad (3)$$

где μ - коэффициент пропорциональности (константа), T – тензор второго ранга, а внутреннее произведение $T \bullet A$ даёт дуальный вектор. Физический смысл тензора T определим позже.

Согласно произведению Клиффорда [3]

$$ab = a \bullet b + a \wedge b,$$

т.е.

$$\nabla B = \nabla \bullet B + \nabla \wedge B \qquad \text{и} \qquad \nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A,$$

уравнение (3) запишем в виде:

$$\nabla (\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \mu\, T \bullet A \qquad (4)$$

Примечание.

$\nabla (\nabla \bullet A) = \nabla \bullet (\nabla \bullet A)$, так как $\nabla \wedge (\nabla \bullet A)$ не имеет смысла.

В формуле (4)

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla \wedge F = 0 \qquad (5),$$

что было доказано в [2]. $F = \nabla \wedge A$ – тензор электромагнитного поля. Уравнение (5) – есть однородная система уравнений Максвелла.

4-х мерный ток был определен как градиент от дивергенции потенциала A и плюс дополнительный член, который зависит от тензора T [4]:

$$J = \nabla (\nabla \bullet A) - \mu\, T \bullet A \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), уравнение (4) можно записать в виде:

$$\nabla \bullet F = - J \tag{7}$$

Уравнение (7) – модифицированная неоднородная система Максвелла. Она содержит в правой части дополнительное слагаемое ($\mu\, T \bullet A$), которое связано с энергией - импульса. Естественно, если

$$\mu\, T \bullet A \simeq 0,$$

то уравнение (7) – есть классическая неоднородная система уравнений Максвелла.
Если

$$\mu\, T \bullet A \neq 0,$$

то 4-х ток зависит от тензора T (тензор энергии - импульса, что выясним позже). Тогда при высоких энергиях сохранение 4-х тока отличается от классического вида [4]. Разумеется, что и смысл неоднородной системы уравнений Максвелла тоже расширяется.

Уравнение (4) является единым уравнением электромагнетизма, которое объединяет обе независимые системы Максвелла: однородную (5) и неоднородную (7).

Теперь уравнение (3) перепишем в другой форме, эквивалентной (4):

$$(\nabla \bullet \nabla)\, A + (\nabla \wedge \nabla) \bullet A + (\nabla \wedge \nabla) \wedge A = \mu\, T \bullet A \tag{8}$$

где $\nabla \bullet \nabla = \Box$ – оператор Даламбера в криволинейных координатах или квадрат оператора Дирака. Математически строго говоря, есть разница между квадратом оператора Дирака и оператором Даламбера («грубый» даламбертиан). К этому мы вернемся позже.

<u>*Примечание*</u>.

Из $(\nabla \bullet \nabla)\, A = (\nabla \bullet \nabla) \bullet A + (\nabla \bullet \nabla) \wedge A$ получаем $(\nabla \bullet \nabla)\, A = (\nabla \bullet \nabla) \bullet A$, так как $(\nabla \bullet \nabla) \wedge A$ не имеет смысла.

Каждое слагаемое уравнения (8) запишем в координатной форме.

$$(\nabla \bullet \nabla)\, A = \Box\, A = (e^i \bullet e^j)\, e^k\, \nabla_i \nabla_j A_k = e^k g^{ij} \nabla_i \nabla_j A_k \tag{9}$$

Согласно cross - произведению Клиффорда

$$- z \bullet (x \wedge y) = (x \wedge y) \bullet z = (z \bullet y)\, x - (z \bullet x)\, y,$$

второе слагаемое в (8) имеет координатный вид:

$$(\nabla \wedge \nabla) \bullet A = (e^i \wedge e^j) \bullet e^k \, \nabla_i \nabla_j A_k = ((e^k \bullet e^j)\, e^i - (e^k \bullet e^i)\, e^j)\, \nabla_i \nabla_j A_k = (g^{kj} e^i - g^{ki} e^j)\, \nabla_i \nabla_j A_k =$$
$$= g^{kj} e^i \nabla_i \nabla_j A_k - g^{ki} e^j \nabla_i \nabla_j A_k$$

Здесь в первом слагаемом, меняя индексы i и j, получим

$$g^{ki} e^j \nabla_j \nabla_i A_k - g^{ki} e^j \nabla_i \nabla_j A_k = g^{ki} e^j (\nabla_j \nabla_i A_k - \nabla_i \nabla_j A_k)$$

или

$$e^j g^{ki} (A_{k;i;j} - A_{k;j;i}) = e^j g^{ki} A_p R^p{}_{kji} = - e^j A_p R^p{}_j \qquad (10)$$

где $R^p{}_i$ – тензор Риччи.

Теперь, учитывая (5), (9) и (10), уравнение (4) запишем в координатном виде:

$$\Box A_k - A_p R^p{}_k = \mu\, T^p{}_k A_p \qquad (11)$$

Возьмем производную (градиент) от (11), чтобы получить уравнение Эйнштейна.

Тензор четвертого ранга $\nabla (\nabla B)$ дуален скаляру (псевдоскаляру) в 4-х мерном пространстве [2], т.е.

$$\nabla (\nabla B) = S \qquad (12)$$

где $S = \mu\, \nabla \bullet (T \bullet A)$ – скаляр (псевдоскаляр).

Рассмотрим только внутреннее произведение (12), т.е. $\nabla \bullet (\nabla B)$.

Эту часть уравнения (10) запишем в координатном виде

$$(\Box A^n)_{;n} - (A^i R^n{}_i)_{;n} = (\Box A^n)_{;n} - A^i{}_{;n} R^n{}_i \quad - 0.5\, A^n R_{;n} = \mu\, (T^m{}_i A^i)_{;n} \qquad (13)$$

В $(\Box A^n)_{;n}$ поменяем сначала местами индексы i и n, затем (во втором шаге) j и n. При этом не меняем индексы в $g^{nk} g^{ij}$.

Для любого тензора [5] выполняется следующее равенство:

$$A_{kj;i;n} - A_{kj;n;i} = A_{kp} R^p{}_{jin} - A_{pj} R^p{}_{kin} \qquad (14)$$

Отсюда

$$(\Box A^n)_{;n} = g^{nk} g^{ij} A_{k;j;i;n} = g^{nk} g^{ij} (A_{k;j;n;i} + A_{p;j} R^p{}_{kin} + A_{k;p} R^p{}_{jin})$$

Тогда из этого равенства получим

$$(\Box A^n)_{;n} = g^{nk} g^{ij} A_{k;j;n;i} \qquad (15),$$

потому, что

$$g^{nk} g^{ij} (A_{p;j} R^p{}_{kin} + A_{k;p} R^p{}_{jin}) = 0.$$

Действительно,

$$g^{nk} g^{ij} (A_{p;j} R^p{}_{kin} + A_{k;p} R^p{}_{jin}) = g^{nk} g^{ij} A_{p;j} R^p{}_{kin} + g^{nk} g^{ij} A_{k;p} R^p{}_{jin} =$$
$$= g^{ij} A_{p;j} R^p{}_i - g^{nk} A_{k;p} R^p{}_n = A_{p;j} R^{pj} - g^{nk} A_{j;p} R^{pj} = 0$$

так как тензор Риччи симметричен $R^{pj} = R^{jp}$.

Теперь в уравнении (15) поменяем местами индексы j и n, опять не меняя их в $g^{nk}g^{ij}$
Для любого вектора выполняется равенство [5]

$$A_{k;j;n} - A_{k;n;j} = A_p R^p{}_{kjn} \qquad (16)$$

Отсюда

$$(g^{nk}g^{ij} A_{k;j;n})_{;i} = g^{nk}g^{ij} (A_{k;j;n} + A_p R^p{}_{kjn})_{;i} = g^{nk}g^{ij} A_{k;j;n;i} + g^{nk}g^{ij} (A_p R^p{}_{kjn})_{;i}$$

$$\text{или} \qquad (\Box A^n)_{;n} = J^i{}_{;i} + (A_p R^{pi})_{;i} \qquad (17)$$

Здесь $J_i = g^{nk}A_{k;n;i} = (A^n{}_{;n})_{;i}$ – есть 4-х мерный электромагнитный ток [4].

Известно, что дивергенция 4-х тока равна нулю – закон сохранения 4-х тока (уравнение непрерывности) [4]:

$$J^n{}_{;n} = 0 \qquad (18)$$

Учитывая (18), уравнение (17) подставляем в (13). Раскроем скобку ковариантного дифференцирования по n ($;n$) и, упрощая, получим:

$$A^p (R^n{}_{p;n} - 0.5\, \delta^n{}_p R_{;n}) = \mu\, T^m{}_{p;n} A^p + \mu\, T^m{}_p A^p{}_{;n} \qquad (19),$$

где $T^m{}_p A^p{}_{;n} = T\bullet(\nabla \bullet A)$.

$\nabla \bullet A$ – тензор деформации поля. В статье [4] было доказано, что

$$T\bullet(\nabla \bullet A) = T^{mp} A_{p;n} = J^n{}_{;n} = 0 \qquad (20)$$

Так как $J^n{}_{;n} = 0$ и $\Lambda_{p;n} = 0$, то добавление этих членов в (19) не дает вклада. Тогда, упрощая (19), получим уравнение Эйнштейна:

$$R^n{}_p - 0.5\, \delta^n{}_p R + \Lambda_p = \mu\, T^n{}_p + J_p \qquad (21)$$

В классической физике считается, что $\Lambda_p = 0$.

Примечание. Каждому значению индекса p соответствует своя константа (число) Λ_p (космологическая постоянная). К этому мы ещё вернемся, чтобы пояснить причину многозначности Λ_p.

Так как 4-х мерная ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю

$$g^{nk} (G_{pn})_{;k} = g^{nk} (R_{pn} - 0.5\, g_{pn} R)_{;k} = 0,$$

то потребуем, чтобы выполнялось следующее условие для тензора $\boldsymbol{T}$:

$$g^{nk} (T_{pn})_{;k} = 0 \qquad (22)$$

т.е. чтобы дивергенция тензора T_{pn} тоже равнялась нулю. Также тензор T_{pn} симметричен. Отсюда делаем вывод, что тензор T_{pn} является тензором энергии - импульса. Таким образом, физический смысл тензора T в уравнении (4) – есть тензор энергии - импульса.

Мы получили уравнение Эйнштейна из закона сохранения 4-х тока (уравнение непрерывности). Таким образом, мы доказали, что уравнения Эйнштейна эквивалентны неоднородной системе уравнений Максвелла.

Уравнения Эйнштейна (21) можно получить из неоднородной системы Максвелла (7) прямым путём, т.е. без дифференцирования, как мы делали в предыдущем случае (формула (13)).

Для этого обобщаем тождество Бохнера – Вайтценбека [6]

$$D^2\psi = \nabla \bullet \nabla\psi + \mathscr{R}(\psi),$$

где

$$\mathscr{R}(\psi) = 0.5\ \Sigma_{i,j}\ e_i \bullet e_j\ R_{ij}\ \psi,$$

ψ – гладкая (скалярная функция), $\nabla \bullet \nabla$ – «грубый» лапласиан, D^2 – лапласиан связности, R – тензор Риччи.

Или обобщаем лапласиан Лихнеровича [7]

$$D^2\Psi = \nabla \bullet \nabla\Psi + c\mathcal{R}\mathrm{ic}(\Psi),$$

где

$$\mathcal{R}\mathrm{ic}(\Psi) = \Sigma(R \bullet \Psi),$$

$c = 0.5$, Ψ – гладкое тензорное поле.

Теперь вышесказанное применим на случай вектор-функции A_j в 4-х мерном римановом пространстве (M,g). Для тензора Риччи ($\mathscr{R}$ic) (0,2) с метрикой g и гладкого векторного поля A_p получим:

$$\Box A_p = \Lambda_p A_p + 0.5\ R\ \delta^n{}_p A_n \qquad (23)$$

где D^2 – даламбертиан по связности, $\nabla \bullet \nabla$ – грубый даламбертиан, Λ_p – собственные числа каждой собственной функции A_p (скалярной!!!) оператора $\nabla \bullet \nabla$.

Таким образом, подставка замены (23) в уравнение (11) тоже дает уравнение Эйнштейна (21).

Конечно, наше утверждение (23) (замена) не является строгим математическим доказательством, поэтому нуждается в дальнейшем детальном изучении.

Можно вывести уравнения Дирака из неоднородности векторного поля в рамках обобщенной алгебры Клиффорда [8]. В классической физике предостаточно литературы, объясняющей единую природу уравнений Дирака и Максвелла. Поэтому здесь мы не будем излагать эту тему.

Мы отметим лишь то, что алгебра Клиффорда является универсальным и мощным математическим аппаратом для описания и объединения электромагнитных и гравитационных процессов. Алгебра Клиффорда является альтернативой, дополнением к лагранжеву формализму, ни в коем случае не отрицая его. Более того, алгебра Клиффорда, особенно обобщенная, позволяет структурирование и обобщение теории полей и фундаментальных частиц.

Обсуждения и выводы

1. Методами обобщенной алгебры Клиффорда электромагнетизм и гравитация объединяются в единую теорию в модели неоднородности векторного поля. Проще говоря, уравнения Максвелла и уравнения Эйнштейна описывают одно и то же явление – гравиэлектромагнитизм. Уравнения Максвелла – есть уравнения для полевых величин (ток, тензор электромагнитного поля и потенциал), а уравнения Эйнштейна – уравнения для пространственных величин (метрический тензор, тензор кривизны, кривизны).

2. Уравнение Эйнштейна (21) инвариантно относительно добавления электромагнитного 4-х тока. Видимо, присутствие электромагнитных явлений в гравитационных процессах (свечение, молнии и т.д. в землетрясениях, вулканах, наличие магнитных полей в небесных телах) обусловлено этим дополнительным членом (4-х электромагнитным током).

3. В рамках алгебры Клиффорда можно описать модифицированную неоднородную систему уравнений Максвелла, где существует дополнительный член, который зависит от энергии-импульса. Из-за этого дополнительного члена 4-х ток не остается постоянным и зависит от энергии-импульса.

4. Методы алгебры Клиффорда позволяют выводить бикватернионы, повороты, спиноры и, в конечном итоге, уравнения Дирака в неевклидовом пространстве непосредственно из неоднородности векторного поля [9].

5. Уравнение (23) – есть векторное уравнение (для потенциала A) в неевклидовом пространстве. Это уравнение описывает распространение волны на поверхностях с кривизной. Видимо, член $0.5\ R$ (кривизна) является гравитационным потенциалом в уравнении (23).

Благодарность

Выражаю огромную благодарность жене и соратнице Любе за корректировку русского текста статьи, и вообще, за её труд и терпение.

Библиографический список:

1. Бабаев А. Х. Эквивалентность неоднородной системы уравнений Максвелла и уравнений Эйнштейна. SCI-ARTICLE.RU, №43 (март), 2017. https://sci-article.ru/stat.php?i=1483104319 . pdf: https://sci-article.ru/number/03_2017.pdf стр. 10-15.
2. Бабаев А. Х., Альтернативный формализм на основе алгебры Клиффорда. SCI-ARTICLE. №40 (декабрь) 2016. https://sci-article.ru/stat.php?i=1480330789 . pdf: https://sci-article.ru/number/12_2016.pdf стр. 34 – 42. https://doi.org/10.24108/preprints-3112477
3. Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6.
4. Бабаев А. Х., Сохранение 4-х мерного тока в формализме, основанном на алгебре Клиффорда. SCI-ARTICLE. №42 (февраль) 2017, стр. 27. https://sci-article.ru/number/02_2017.pdf стр. 27-33. https://doi.org/10.24108/preprints-3112478
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика. Том 2. Теория поля, стр. 109.
6. B. Wilking, C. Böhm. Manifolds with positive curvature operators are space forms. https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v167-n3-p10.pdf
7. Peter Petersen. Demystifying the curvature term in Lichnerowicz Laplacians. https://www.math.ucla.edu/~petersen/BLWformulas.pdf
8. Бабаев А. Х., Вывод уравнения Дирака из неоднородности пространства и решение для поколений нейтрино. SCI-ARTICLE. №52 (декабрь) 2017. https://sci-article.ru/stat.php?i=1513592338 . pdf: https://sci-article.ru/number/12_2016.pdf стр. 237 – 244.
9. Бабаев А. Х., Бикватернионы, вращения и спиноры в обобщенной алгебры Клиффорда. SCI-ARTICLE. №452 (май) 2017. https://sci-article.ru/stat.php?i=1495946354 . pdf: https://sci-article.ru/number/05_2017.pdf стр. 296 – 304. Английская версия: https://doi.org/10.24108/preprints-3112462