Вывод законов 4-х тока из неоднородности векторного поля алгеброй Клиффорда

Бабаев Алимжан Холмуратович

Аннотация. В данной обзорной статье уравнение непрерывности, сохранение вихревого 4-х тока выводятся из неоднородности векторного поля с помощью обобщенной алгебры Клиффорда. В новом определении 4-х тока появляется нелинейность, т.е. член, зависящий от энергии-импульса.

Abstract. The continuity equation and conservation of eddy current 4 are derived from the non-homogeneity of the vector field using generalized Clifford algebra in this review article. Nonlinearity, i.e., an energy-momentum-dependent term, appears in the new definition of the four-current.

Ключевые слова: электромагнитный 4-х ток; уравнение непрерывности; сохранение вихревого 4-х тока; неоднородная система Максвелла; нелинейность 4-х тока. Алгебра Клиффорда; неоднородность векторного поля.

Keywords: four-current density; continuity equation; conservation of eddy four-current; non-homogeneous Maxwell system; nonlinearity of four-current. Clifford Algebra; non-homogeneity of the vector field.

УДК 537.8; 512.7

Введение

Цель статьи: показать, как модель неоднородности векторного поля в алгебре Клиффорда легко и просто описывает электромагнитные процессы. Например, 4-х мерный ток приобретает явный геометрический смысл. В неоднородной системе уравнений Максвелла, точнее, в 4-х токе, появляется дополнительное слагаемое, т.е., нелинейность. Появляется новый закон сохранения для 4-х тока – закон сохранения вихревого 4-х тока.

Теоретические основы

В статье [1] было дано определение локальной неоднородности векторного поля A:

$$B = \nabla A = \nabla \bullet A + \nabla \wedge A \qquad (1),$$

где

$\nabla \bullet A = e^i \bullet e^j \mathcal{D}_i A_j = E g^{ij} \mathcal{D}_i A_j$ – деформация векторного поля [**1**],

$\nabla \wedge A = e^i \wedge e^j \mathcal{D}_i A_j$ – вращение векторного поля [**1**],

$e^i \bullet e^j$ – внутреннее произведение Клиффорда базисных векторов [**2**] (не скалярное произведение),

$e^i \wedge e^j$ – внешнее произведение Клиффорда базисных векторов (бивектор) [**2**],

$\mathcal{D}_i$ – ковариантная производная, g^{ij} – метрический тензор, E – единичный тензор.

Результаты

1. Единая система уравнений Максвелла

Берем градиент от (1)

$$\nabla B = \nabla \nabla A \tag{2}$$

Так как ∇B – тензор третьего ранга (тривектор), то он дуален вектору (псевдовектору) в 4-х мерном пространстве [**1**]:

$$\nabla \nabla A = \mu\, T \bullet A \tag{3}$$

Здесь T – тензор второго ранга, конкретно, тензор энергии-импульса [**3**]. Внутреннее произведение тензора T на вектор-потенциал поля A ($T \bullet A$) дает дуальный вектор.

μ – коэффициент пропорциональности.

Согласно произведению Клиффорда [**2**]

$$\nabla(\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge \nabla \wedge A = \mu\, T \bullet A \tag{3}$$

так как $\nabla \nabla A = \nabla(\nabla \bullet A + \nabla \wedge A) = \nabla(\nabla \bullet A) + \nabla\, (\nabla \wedge A) = \nabla(\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge (\nabla \wedge A)$

Уравнение (3) – единая система уравнений Максвелла.

2. Однородная система уравнений Максвелла

В уравнении (3) было доказано [**1**]:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge A = \nabla \wedge F = 0 \qquad (4),$$

где

$F = \nabla \wedge A$ – тензор электромагнитного поля.

Уравнение (4) – есть однородная система уравнений Максвелла.

3. 4-х мерный электромагнитный ток.

Обозначим [**4**] 4-х мерный электромагнитный ток как:

$$J = -\nabla(\nabla \bullet A) + \mu\, T \bullet A = -\, j + \mu\, T \bullet A \qquad (5),$$

где $\nabla(\nabla \bullet A) = j$.

Очевидно, что в обозначении (5) 4-х ток имеет явную геометрическую интерпретацию: 4-х ток состоит из двух частей: 1) градиента дивергенции потенциала поля ($\nabla(\nabla \bullet A)$) и 2) слагаемого ($\mu\, T \bullet A$), которое зависит от тензора энергии-импульса.

4. Неоднородная система уравнений Максвелла.

Учитывая (4) и (5), уравнение (3) запишем в виде

$$\nabla \bullet F = J \tag{6}$$

Уравнение (6) – есть неоднородная система уравнений Максвелла. Из определения 4-х тока (5) понятно, что уравнение (6) тоже зависит от тензора энергии-импульса, чем и отличается от классического случая.

5. Условие (ограничение)

$$\nabla \bullet A = C \tag{7}$$

означает, что 4-х ток отсутствует,

где C – константа относительно ковариантной производной, например, $C = g \cdot const$.

g – метрический тензор.

Частные случаи (7), например, калибровка Лоренца ($\nabla \bullet A = 0$), Кулона [**3**] – это не что иное, как исключение (игнорирование) 4-х тока.

5. Уравнение непрерывности и сохранение вихревого 4-х тока.

Берем градиент от (5).

$$\nabla J = \nabla\ (- j + \mu\, T \bullet A) \tag{7}$$

Разделяя (7) на симметричную $\nabla \bullet J$ и на антисимметричную $\nabla \wedge J$ части согласно произведению Клиффорда, получим

$$\nabla \bullet J = \nabla \bullet\ (- j + \mu\, T \bullet A) = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \wedge J = \nabla \wedge\ (- j + \mu\, T \bullet A) = 0 \tag{9}$$

Доказательства уравнений (8) и (9) приведены в [**4**].

Уравнение (8) – есть уравнение непрерывности или закон сохранения 4-х тока.

В уравнении (8) отметим лишь то, что дивергенция тензора T равна нулю ($\nabla \bullet T = 0$), так как тензор T – тензор энергии-импульса.

Также отметим, что

$$\mu\, T\bullet(\nabla\bullet A) = \nabla\bullet j$$

Это означает, что изменение деформации поля ($\nabla\bullet A$) приведет к изменению классического 4-х тока ($\nabla\bullet j$).

Уравнение (9) – есть закон сохранения вихревого 4-х тока. Уравнение (9) запишем в «привычном» 3-х мерном виде. Разделяя (9) на «временные» и «пространственные» части, запишем

$$e^i\wedge e^j\, \mathcal{D}_i\, J_j = e^\alpha\wedge e^0\, \mathcal{D}_\alpha\, J_0 + e^0\wedge e^\alpha\, \mathcal{D}_0\, J_\alpha + e^\beta\wedge e^\lambda\, (\mathcal{D}_\beta\, J_\lambda - \mathcal{D}_\lambda\, J_\beta) = 0,$$

$\alpha = 1,2,3.\ \beta < \lambda.$

$e^\beta\wedge e^\lambda\, (\mathcal{D}_\beta\, J_\lambda - \mathcal{D}_\lambda\, J_\beta) = \gamma\, E^{\beta\lambda\mu 0}\, (\mathcal{D}_\beta\, J_\lambda - \mathcal{D}_\lambda\, J_\beta) = -rot\, \boldsymbol{J}$

$\gamma = \gamma_0\, \gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3,\ E^{\beta\lambda\mu 0}$ – абсолютно антисимметричный тензор 4-го ранга в ковариантном виде [**4**], $e^0\wedge e^\alpha\, J_\alpha = -\boldsymbol{J}$ – 3-х мерный электромагнитный ток.

$e^\alpha\wedge e^0\, \mathcal{D}_\alpha = \nabla$ – 3-х мерный оператор набла.

$J_0 = \rho$ – плотность электрического заряда,

$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_t$.

Тогда получим 3-х мерный вид уравнения (9):

$$-\nabla\rho + \mathcal{D}_t\, \boldsymbol{J} + rot\, \boldsymbol{J} = 0 \qquad (10)$$

Проще говоря, любое изменение 3-х тока ($\mathcal{D}_t\, \boldsymbol{J}$) по времени компенсируется изменением вихревого 3-х мерного тока ($rot\, \boldsymbol{J}$) при предположении, что градиент плотности электрического заряда ($-\nabla\rho$) постоянен.

6. Сила Лоренца.

Следуя М. Риссу [**5**], мы найдем силу Лоренца:

$$JF = J\bullet F + J\wedge F = e^k J_k\, (e^i\wedge e^j)\, \mathcal{D}_i\, A_j = e^k\bullet (e^i\wedge e^j)\, J_k\, \mathcal{D}_i\, A_j + (e^k\wedge e^i\wedge e^j)\, J_k\, \mathcal{D}_i\, A_j$$

Производя простые выкладки и оставляя только реальные векторы, получим силу Лоренца:

$$\boldsymbol{F}_{Lor} = J^0F_{01} + J^0F_{02} + J^0F_{03} + J^1F_{12} + J^1F_{13} + J^2F_{21} + J^2F_{23} + J^3F_{31} + J^3F_{32}$$

Или в «привычном» векторном виде

$$\boldsymbol{F}_{Lor} = J^0\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \qquad (11)$$

где J^0 – электрический заряд, $\boldsymbol{J}$ – 3-мерный ток, $F = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\}$, $\times$ – символ обычного векторного произведения векторов.

Обсуждения и выводы

1. Вращательная часть неоднородности векторного поля $\nabla\wedge A$ создает тензор электромагнитного поля F, а деформационная часть, точнее, градиент деформации поля $(\nabla(\nabla\bullet A))$ создает электромагнитный 4-х ток.

2. Согласно (5), электрический заряд (J_0) не является постоянной величиной. При высоких энергиях (т.е. при малых расстояниях) может случиться, что $\mu\ T\bullet A> j$. Тогда заряд меняет свое значение на противоположное. Возможно, этим объясняется удержание протонов в ядре.

3. Уравнения (9) и (10) показывают, что вихревой 4-х ток сохраняется. Проще говоря, уравнение (10) (при $\nabla\rho$ = const) – есть правило Ленца.

Благодарность

Не могу не отметить колоссальную помощь моей жены, Гомазковой Л. Н., во всем: от корректировки текста до создания условий для работы, не говоря уже о её терпении. Заодно благодарю и читателей за их интерес и терпение.

Библиографический список

1. Бабаев А. Х., Альтернативный формализм на основе алгебры Клиффорда. SCI-ARTICLE. №40 (декабрь) 2016. https://sci-article.ru/stat.php?i=1480330789 . pdf: https://sci-article.ru/number/12_2016.pdf стр. 34 – 42. https://doi.org/10.24108/preprints-3112477
2. Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика. Том 2. Теория поля, Москва, «Наука». стр. 109. ISBN 5-02-014420-7.
4. Бабаев А. Х., Сохранение 4-х мерного тока в формализме, основанном на алгебре Клиффорда. SCI-ARTICLE. №42 (февраль) 2017, стр. 27. https://sci-article.ru/number/02_2017.pdf стр. 27-33. https://doi.org/10.24108/preprints-3112478
5. Г. Казанова, Векторная алгебра, Перевод с франц. 1979, Москва, изд «МИР», стр. 55.