Функциональные ряды натурального аргумента

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

Аннотация

Параметрические ряды

Исследуется равномерная сходимость рядов, связанных с двойными последовательностями, иначе говоря, равномерная сходимость фунциональных рядов функций натурального аргумента. Устанавляются признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости числовых рядов и являющиеся их обобщением. Полученные теоремы далее будет применены для исследования произвольных функциональных рядов на равномерную сходимость.

Обозначение

Параметрический ряд обозначается как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, где $a_{k,i}$ — двойная последовательность. Под частичными суммами подразумевается двойная последовательность $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$.

Примечание

Данные ряды могли бы быть названы «двойными» вместо «параметрических», однако название «двойной ряд» традиционно уже используется для рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i})$, также связанных с двойной последовательностью, однако суммируемых по другому принципу.

Поточечная и равномерная сходимость

Определение 1

Параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ поточечно сходится, если существует последовательность B_k такая, что соответствующая двойная последовательность частичных сумм сходится к ней поточечно, т.е. выполнено $A_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} B_k$

Определение 2

Параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, если существует последовательность B_k такая, что соответствующая двойная последовательность частичных сумм сходится к ней равномерно, т.е. выполнено $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$

Определение 3

Параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, если равномерно сходится двойной параметрический $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{k,i}|$. Если параметрический ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно равномерно, то будем говорить, что он сходится условно равномерно.

I. Критерий Коши

Теорема 1 [Критерий Коши, необходимость]

Пусть $n_k, m_k \to +\infty$ — последовательности натуральных чисел такие, что выполнено $m_k > n_k$, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда

$S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$

Теорема 2 [Критерий Коши, достаточность]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно, но не сходится равномерно. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$ такие, что $m_k > n_k$, и выполнено $S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \not\to 0$

Примечание

Существенно, что последовательности n_k, m_k возрастают к бесконечности нестрого.

II. Общие признаки сходимости

Теорема 1 [Необходимое условие равномерной сходимости]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда $a_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема 2 [Пренебрежение начальными столбцами]

Пусть I — натуральное число. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$, где $a'_{k,i} = a_{k,i+I}$.

Теорема 3 [Пренебрежение начальными строками]

Пусть K — натуральное число, и параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$, где $a'_{k,i} = a_{k+K,i}$.

II. Общие признаки сходимости

Теорема 4 [Сходимость абсолютно сходящегося]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно. Тогда он сходится равномерно.

Теорема 5 [Произведение сходящегося на постоянную вдоль строки ограниченную]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, последовательность b_k ограничена. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_k$ также сходится равномерно.

Теорема 6 [Произведение абсолютно сходящегося на ограниченную]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, двойная последовательность $b_{k,i}$ ограничена. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ также сходится абсолютно равномерно.

Теорема 7 [Линейная комбинация сходящихся рядов]

Пусть α, β — действительные числа, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходятся равномерно. Тогда равномерно сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})$

Теорема 8 [Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов]

Пусть α, β — действительные числа, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходятся абсолютно равномерно. Тогда абсолютно равномерно сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})$

Теорема 9 [Сумма абсолютно и условно сходящего ряда]

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится условно равномерно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_{k,i} + b_{k,i})$ сходится условно равномерно.

III. Признаки сравнения рядов

Теорема 1 [Признак сравнения]

Пусть для всех i, k выполнено $0 \le a_{k,i} \le b_{k,i}$, и параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ также сходится равномерно.

Теорема 2 [Частный случай, замена на эквивалентную]

Пусть для всех i, k выполнено $0 \le a_{k,i}$, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ сходятся поточечно, а также выполнено $b_{k,i} \xrightarrow[k,i\to\infty]{} 1$. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$.

IV. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Теорема 1 [Признак Дирихле]

Пусть:

1. Существует число M такое, что для любых n и k выполнено $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}| \leq M$
2. Для любых k и i выполнено $b_{k,i} \geq 0$
3. Для любых k и i выполнено $b_{k,i+1} \leq b_{k,i}$
4. Выполнено $b_{k,i} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$

Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}b_{k,i}$ равномерно сходится.

Примечание

Для сравнения рассмотрим теорему C2, §18, «Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональной сходимости». Данная теорема содержит условие $a_n(x) \rightrightarrows 0$. Данному условию для функций натурального аргумента соответствовало бы условие $b_{i,k} \rightrightarrows_{i\to\infty} 0$ вместо более слабого условия $b_{k,i} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$. Таким образом, представлен некий усиленный вариант признака Дирихле.

Критерий Коши для двойных последовательностей

Необходимость

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} b_i$, $n_k, m_k \to \infty$ — последовательности натуральных чисел. Тогда выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \to 0$

Достаточность

Пусть $a_{i,j} \underset{j\to\infty}{\not\rightrightarrows} b_i$, $a_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} b_i$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$ такие, что для всех k $m_k > n_k$, и выполнено $a_{k,m_k} - a_{k,n_k} \not\to 0$.

Примечание

Данные утверждения доказаны на слайдах «Двойные последовательности»

Доказательства теорем I

Утверждение 1

Пусть $n_k, m_k \to +\infty$ — последовательности натуральных чисел такие, что выполнено $m_k > n_k$, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда $S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$

Доказательство.

1. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, то существует последовательность B_k такая, что соответствующая двойная последовательность $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$ частичных сумм сходится к ней равномерно, т.е. выполнено $A_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$
2. В соответствии с критерием Коши для двойных последовательностей, выполнено $A_{k,m_k} - A_{k,n_k} = \sum\limits_{i=1}^{m_k} a_{k,i} - \sum\limits_{i=1}^{n_k} a_{k,i} = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$

Теорема I.1 доказана.

Утверждение 2

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно, но не сходится равномерно. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$ такие, что $m_k > n_k$, и выполнено $S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \not\to 0$

Доказательство.

1. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно, но не сходится равномерно, то существует последовательность B_k такая, что соответствующая двойная последовательность $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$ частичных сумм сходится к ней поточечно, но не сходится к ней равномерно, т.е. выполнено $A_{k,i} \xrightarrow[i\to\infty]{} B_k$, $A_{k,i} \underset{i\to\infty}{\not\rightrightarrows} B_k$.
2. В соответствии с критерием Коши для двойных последовательностей, существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $A_{k,m_k} - A_{k,n_k} = \sum\limits_{i=1}^{m_k} a_{k,i} - \sum\limits_{i=1}^{n_k} a_{k,i} = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \not\to 0$

Теорема I.2 доказана.

Доказательства теорем II

Утверждение 3

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда $a_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство.

1. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, то существует последовательность B_k такая, что соответствующая двойная последовательность $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$ частичных сумм сходится к ней равномерно, т.е. выполнено $A_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$
2. И, следовательно, так же выполнено $A_{k,i-1} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$, и $A_{k,i} - A_{k,i-1} = a_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

Теорема II.1 доказана.

Доказательства теорем II

Утверждение 4

Пусть l — натуральное число. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$, где $a'_{k,i} = a_{k,i+l}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим двойные последовательности частичных сумм $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$, $A'_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a'_{k,i}$, и установим соотношение
$$A'_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} a'_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i+l} = \sum_{i=l+1}^{n+l} a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n+l} a_{k,i} - \sum_{i=1}^{l} a_{k,i} = A_{k,n+l} - A_{k,l}.$$
2. Предположим, что выполнено $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$. Тогда
$$A'_{k,n} = A_{k,n+l} - A_{k,l} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B_k - A_{k,l}.$$
3. Предположим, что выполнено $A'_{k,n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B'_k$. Тогда
$$A_{k,n+l} = A'_{k,n} + A_{k,l} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B'_k + A_{k,l}$$

Теорема II.2 доказана.

Утверждение 5

Пусть K — натуральное число, и параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$, где $a'_{k,i} = a_{k+K,i}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим двойные последовательности частичных сумм $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$, $A'_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a'_{k,i}$, и установим соотношение $A'_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a'_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k+K,i} = A_{k+K,n}$.
2. Так как парамерический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно, то существует последовательность B_k такая, что $A_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} B_k$
3. Предположим, что $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} B_k$. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что $A_{k,n_k} - A_{k,m_k} \not\to 0$.

Завершение доказательства

1. Обозначим $x_k = A_{k,n_k} - A_{k,m_k}$, $y_k = A'_{k,n_{k+K}} - A'_{k,m_{k+K}}$. Тогда выполнено $x_{k+K} = A_{k+K,n_{k+K}} - A_{k+K,m_{k+K}} = A'_{k,n_{k+K}} - A'_{k,m_{k+K}} = y_k$. И, следовательно, $y_k \not\to 0$. Так как $n_{k+K}, m_{k+K} \uparrow +\infty$, то отсюда следует, что двойная последовательность $A'_{k,n}$ не сходится равномерно при $n \to +\infty$.
2. Предположим, что $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$. Тогда $A'_{k,n} = A_{k+K,n} \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} B_{k+K}$

Теорема II.3 доказана.

Доказательства теорем II

Утверждение 6

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно. Тогда он сходится равномерно.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \not\to 0$
2. С другой стороны, так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i}| \to 0$
3. Следовательно, $|\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i}| \leq \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i}| \to 0$. Противоречие.

Теорема II.4 доказана.

Утверждение 7

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, последовательность b_k ограничена. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_k$ также сходится равномерно.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} b_k \not\to 0$.
2. С другой стороны, так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$.
3. И, следовательно, выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} b_k = b_k \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$, как произведение ограниченной на бесконечно малую. Противоречие.

Теорема II.5 доказана.

Утверждение 8

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, двойная последовательность $b_{k,i}$ ограничена. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ также сходится абсолютно равномерно.

Доказательство.

1. Так как двойная последовательность $b_{k,i}$ ограничена, то существует число M такое, что для всех i, k выполнено $|b_{k,i}| \leq M$. Выберем такое M.
2. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i} b_{k,i}| \not\to 0$.
3. С другой стороны, так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i}| \to 0$
4. Следовательно,
$$0 \leq \sum_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i} b_{k,i}| \leq \sum_{i=n_k+1}^{m_k} M|a_{k,i}| = M \sum_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i}| \to M * 0 = 0.$$
Противоречие.

Теорема II.6 доказана.

Утверждение 9

Пусть α, β — действительные числа, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходятся равномерно. Тогда равномерно сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})$

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} (\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})$.
2. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \to 0$. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} b_{k,i} \to 0$.
3. Следовательно, $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} (\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i}) = \alpha \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} + \beta \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} b_{k,i} \to 0$. Противоречие.

Теорема II.7 доказана.

Доказательство теорем II

Утверждение 10

Пусть α, β — действительные числа, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходятся абсолютно равномерно. Тогда абсолютно равномерно сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})$.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i}| \not\to 0$.
2. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |a_{k,i}| \to 0$. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится абсоютно равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} |b_{k,i}| \to 0$.
3. Следовательно, $|\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k}(\alpha a_{k,i} + \beta b_{k,i})| \le |\alpha| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{k,i}| + |\beta| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_{k,i}| \to 0$. Противоречие.

Теорема II.8 доказана.

Утверждение 11

Пусть параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится абсолютно равномерно, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится условно равномерно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_{k,i} + b_{k,i})$ сходится условно равномерно.

Доказательство.

1. Так как параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходятся равномерно, то равномерно сходится также и параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_{k,i} + b_{k,i})$.
2. Предположим обратное, т.е. параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_{k,i} + b_{k,i})$ сходится абсолютно равномерно.
3. Тогда абсолютно равномерно сходится также параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_{k,i} + b_{k,i}) + \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-a_{k,i}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$, что противоречит условию.

Теорема II.9 доказана.

Доказательства теорем III

Утверждение 12

Пусть для всех i, k выполнено $0 \le a_{k,i} \le b_{k,i}$, и параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится равномерно. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ также сходится равномерно.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \not\to 0$.
2. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{k,i}$ сходится равномерно, то выполнено $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} b_{k,i} \to 0$.
3. Следовательно, $0 \le \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} \le \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} b_{k,i} \to 0$. Противоречие.

Теорема III.1 доказана.

Доказательства теорем III

Утверждение 13

Пусть для всех i, k выполнено $0 \le a_{k,i}$, параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ сходятся поточечно, а также выполнено $b_{k,i} \xrightarrow[k,i\to\infty]{} 1$. Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда равномерно сходится параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$.

Доказательство.

1. Так как $b_{k,i} \xrightarrow[k,i\to\infty]{} 1$, то существует натуральное число N такое, что для любых $k, i > N$ выполнено $\frac{1}{2} < b_{k,i} < \frac{3}{2}$.
2. Положим $a'_{k,i} = a_{k+N,i+N}$. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится поточечно, то он же сходится равномерно одновременно с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$.
3. Положим $b'_{k,i} = b_{k+N,i+N}$. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ сходится поточечно, то он же сходится равномерно одновременно с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k+N,i+N} b_{k+N,i+N} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i} b'_{k,i}$.

Завершение доказательства

1. Соответственно, для всех k, i выполнено $\frac{1}{2} < b'_{k,i} < \frac{3}{2}$.
2. Зафиксируем последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow$, $m_k > n_k$.
3. Выполнено $\frac{1}{2} \sum\limits_{i=n_k}^{m_k} a'_{k,i} < \sum\limits_{i=n_k}^{m_k} a'_{k,i} b'_{k,i} < \frac{3}{2} \sum\limits_{i=n_k}^{m_k} a'_{k,i}$.
4. И, следовательно, утверждения $\sum\limits_{i=n_k}^{m_k} a'_{k,i} \to 0$ и $\sum\limits_{i=n_k}^{m_k} a'_{k,i} b'_{k,i} \to 0$ выполнены или не выполнены одновременно.
5. Расфиксируем последовательности n_k, m_k. Таким образом, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i}$ сходится (или расходится) равномерно одновременно с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a'_{k,i} b'_{k,i}$.
6. Следовательно, одновременнно равномерно сходятся или расходятся также параметрические ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$.

Теорема III.2 доказана.

Доказательства теорем IV

Утверждение 14

Пусть:

1. Существует число M такое, что для любых n и k выполнено $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}| \leq M$
2. Для любых k и i выполнено $b_{k,i} \geq 0$
3. Для любых k и i выполнено $b_{k,i+1} \leq b_{k,i}$
4. Выполнено $b_{k,i} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$

Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ равномерно сходится.

Доказательство.

1. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $n_k, m_k \uparrow +\infty$, $m_k > n_k$ такие, что выполнено $S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} b_{k,i} \not\to 0$.
2. Обозначим также: $A_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$. Таким образом, для любых n, k выполнено $|A_{k,n}| \leq M$.

Доказательства теорем IV

Оценка S_k

1. Преобразование Абеля: $S_k = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} b_{k,i} = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} (A_{k,i} - A_{k,i-1}) b_{k,i} =$
$\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} A_{k,i} b_{k,i} - \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} A_{k,i-1} b_{k,i} = \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} A_{k,i} b_{k,i} - \sum\limits_{i=n_k}^{m_k-1} A_{k,i} b_{k,i+1} =$
$(\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} A_{k,i} b_{k,i} + A_{k,m_k} b_{k,m_k}) - (A_{k,n_k} b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} A_{k,i} b_{k,i+1}) =$
$A_{k,m_k} b_{k,m_k} - A_{k,n_k} b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} A_{k,i} (b_{k,i} - b_{k,i+1})$

2. Тогда $|S_k| \le |A_{k,m_k} b_{k,m_k} - A_{k,n_k} b_{k,n_k+1}| + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} |A_{k,i}(b_{k,i} - b_{k,i+1})| \le$
$|A_{k,m_k}||b_{k,m_k}| + |A_{k,n_k}||b_{k,n_k+1}| + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} |A_{k,i}||b_{k,i} - b_{k,i+1}| \le M|b_{k,m_k}| +$
$M|b_{k,n_k+1}| + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} M|b_{k,i} - b_{k,i+1}| = M(|b_{k,m_k}| + |b_{k,n_k+1}| + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} |b_{k,i} - b_{k,i+1}|)$

3. В силу условий теоремы все подмодульные выражения положительны.

Доказательства теорем IV

Окончание доказательства

1. Далее, $|S_k| \le M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i} - b_{k,i+1}) = M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i} - b_{k,i+1}) = M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i} - \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i+1}) = M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i} - \sum\limits_{i=n_k+2}^{m_k} b_{k,i}) = M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k-1} b_{k,i} - \sum\limits_{i=n_k+2}^{m_k} b_{k,i}) = M(b_{k,m_k} + b_{k,n_k+1} + b_{k,n_k+1} - b_{k,m_k}) = 2M * b_{k,n_k+1}$
2. Так как $b_{k,i} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$, то $b_{k,n_k+1} \to 0$.
3. Следовательно, $S_k \to 0$. Противоречие.

Теорема IV.1 доказана.