Исследование функциональных рядов на равномерную сходимость (примеры)

Казаков И.Б.

МФТИ

Москва, 2023

Содержание

Аннотация

Примеры

Представлены решения 8 примеров на исследование равномерной сходимости функциональных рядов, а также доказательство признака Дини и теоремы о непрерывности равнмерного предела непрерывных функций. Решения основаны на применении теорем, представленных на предыдущих слайдах. Примеры взяты из задавальника для студентов факультета ФАКТфаки (см. 3 блок, 3 семинар, С2 §18 + Т.6). Представлено решение всех примеров на равномерную сходимость рядов из данного семинара.

Метод решения

Равномерная сходимость на счётном множестве

Суть метода решения состоит в том, что равномерная сходимость (поточечно сходящегося) функционального ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ на некотором множестве E сводится к её равномерной сходимости на счётных подмножествах $E' \subset E$, имеющих единственную предельную точку на расширенной числовой прямой, т.е. к равномерной сходимости на сходящихся последовательностях. В свою очередь, равномерная сходимость функционального ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ на последовательности x_k есть ничто иное, как равномерная сходимость параметрического ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$, где $a_{k,i} = f_i(x_k)$.

Теорема для последовательностей

Пусть $S_n, S : E \to \mathbb{R}$, и для всех $x \in R$ выполнено $S_n(x) \to S(x)$ (поточечная сходимость). Тогда выполнено:

1. Если $S_n \not\rightrightarrows_E S$, то существуют $a \in \overline{E}$ и последовательность $x_k \to a$ такие, что для двойной последовательности $A_{k,n} = S_n(x_k)$ и последовательности $B_k = S(x_k)$ выполнено $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} B_k$. Отдельно отметим, что последовательность x_k возможно выбрать так, чтобы функциональная последовательность S_n не сходилась равномерно также на любой её подпоследовательности.
2. Если $S_n \not\rightrightarrows_E S$, $x_k \to a \in \overline{E}$. Тогда для двойной последовательности $A_{k,n} = S_n(x_k)$ и последовательности $B_k = S(x_k)$ выполнено $A_{k,n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} B_k$

Метод решения

Теорема для рядов

Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ — функциональный ряд, поточечно сходящийся на множестве E. Тогда выполнено:

1. Если данный ряд не сходится множестве E равномерно, то существуют $a \in \overline{E}$ и последовательность $x_k \to a$ такие, что для соответствующей двойной последовательности $a_{k,i} = f_i(x_k)$ параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ не сходится равномерно. Аналогично, последовательность x_k возможно выбрать так, чтобы ряд не сходился равномерно также на любой её подпоследовательности.
2. Если данный ряд сходится равномерно, $x_k \to a$, то для соответствующей двойной последовательности $a_{k,i} = f_i(x_k)$ параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ сходится равномерно.

Практическое применение

Пусть $f_i : E \to \mathbb{E}$, функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ поточечно сходится. Для того, чтобы исследовать ряд на равномерную сходимость на подмножествах $E' \subset E$, нужно выяснить, на каких сходящихся последовательностях x_k функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ не сходится равномерно. Ряд будет сходится равномерно на тех и только на тех подмножествах, которые не содержат данных последовательностей.

Выделение последовательности

Последовательность

Пусть $f_n \not\rightrightarrows f$. Тогда существует последовательность $x_k \to x_0 \in \overline{E}$ и последовательность натуральных чисел $n_k \uparrow\uparrow +\infty$ такие, что $f_{n_k}(x_k) \to A$, $A \neq 0$.
Рассмотрим произвольную последовательность натуральных чисел $k_s \uparrow\uparrow +\infty$, и положим $y_s = x_{k_s}$. Обозначим $a_{s,i} = f_i(y_s) - f(y_s) = f_i(x_{k_s}) - f(x_{k_s})$. Тогда $a_{s,n_{k_s}} = f_{n_{k_s}}(x_{k_s}) - f(x_{k_s}) \to A \neq 0$.
Таким образом, $a_{s,i} \underset{s,i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Следовательно, $a_{s,i} \not\rightrightarrows_{i\to\infty} 0$. То есть $f_i(y_s) \not\rightrightarrows_{i\to\infty} f(y_s)$, и f_n не сходится равномерно на последовательности y_s.
См. слайды «Некоторые критерии равномерной сходимости функциональной последовательности».

Признак Абеля

Теорема

Пусть:

1. $|b_{k,i}| \le M$
2. $b_{k,i}$ монотонна по индексу i
3. Параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится

Тогда параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ равномерно сходится.

Вспомогательные обозначения

1. Положим $A_n^k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i}$, $A_0^k = 0$. Положим также $A_{m,n}^k = A_m^k - A_n^k$.
2. Соответственно выполнено: $a_{k,i} = A_i^k - A_{i-1}^k = A_{i,i-1}^k$
3. Установим соотношение:
   $A_{m_1,n}^k - A_{m_2,n}^k = (A_{m_1}^k - A_n^k) - (A_{m_2}^k - A_n^k) = A_{m_1}^k - A_{m_2}^k = A_{m_1,m_2}^k$.
4. Положим $S_n^k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}$, $S_0^k = 0$. Положим также $S_{m,n}^k = S_m^k - S_n^k$.

Доказательство

Преобразование Абеля

1. $S_{m,n} = \sum_{i=n+1}^{m} a_{k,i} b_{k,i} = \sum_{i=n+1} A^k_{i,i-1} b_{k,i} = \sum_{i=n+1}^{m} (A^k_{i,n} - A^k_{i-1,n}) b_{k,i} =$ $\sum_{i=n+1}^{m} A^k_{i,n} b_{k,i} - \sum_{i=n+1}^{m} A^k_{i-1,n} b_{k,i} = \sum_{i=n+1}^{m} A^k_{i,n} b_{k,i} - \sum_{i=n}^{m-1} A^k_{i,n} b_{k,i+1}$
2. В случае $m > n+1$: $S_{m,n} = A^k_{m,n} b_{k,m} - A^k_{n,n} b_{k,n+1} + \sum_{i=n+1}^{m-1} A^k_{i,n}(b_{k,i} - b_{k,i+1}) =$ $A^k_{m,n} b_{m,k} + \sum_{i=n+1}^{m-1} A^k_{i,n}(b_{k,i} - b_{k,i+1})$
3. В случае $m = n+1$: $S_{m,n} = \sum_{i=n+1}^{n+1} A^k_{i,n} b_{k,i} - \sum_{i=n}^{n} A^k_{i,n} b_{k,i+1} =$ $A^k_{n+1,n} b_{k,n+1} - A^k_{n,n} b_{k,n+1} = A^k_{n+1,n} b_{k,n+1} = A^k_{m,n} b_{k,m}$
4. В случае $m = n$: $S_{m,n} = 0$.
5. В случае $m < n$: $S_{m,n} = -S_{n,m}$

Доказательство

Оценка $\sum\limits_{i=n+1}^{m-1} |b_{k,i} - b_{k,i+1}|$

$b_{k,i}$ монотонна по i. Возможны два случая.

1. В случае $b_{k,i+1} \leq b_{k,i}$:
$$\sum_{i=n+1}^{m-1} |b_{k,i} - b_{k,i+1}| = \sum_{i=n+1}^{m-1} (b_{k,i} - b_{k,i+1}) = b_{k,n+1} - b_{k,m}$$
2. В случае $b_{k,i+1} \geq b_{k,i}$:
$$\sum_{i=n+1}^{m-1} |b_{k,i} - b_{k,i+1}| = -\sum_{i=n+1}^{m-1} (b_{k,i} - b_{k,i+1}) = b_{k,m} - b_{k,n+1}$$

В обоих случаях $\sum\limits_{i=n+1}^{m-1} |b_{k,i} - b_{k,i+1}| = |b_{k,m} - b_{k,n+1}| \leq |b_{k,m}| + |b_{k,n+1}| \leq 2M$

Доказательство

Определим $C^k_{m,n}$ при $m \geq n$

1. В случае $m > n$ определим $C^k_{m,n} = \max(|A^k_{n,n}|, |A^k_{n+1,n}|, \ldots, |A^k_{m,n}|)$
2. В случае $m = n$ определим $C^k_{n,n} = |A^k_{n,n}| = 0$

Оценка $S^k_{m,n}$ при $m \geq n$

1. В случае $m > n+1$:
   $$|S^k_{m,n}| \leq |A^k_{m,n}||b_{m,k}| + \sum_{i=n+1}^{m-1} |A^k_{i,n}||b_{k,i} - b_{k,i+1}| \leq$$
   $$C^k_{m,n}|b_{k,m}| + \sum_{i=n+1}^{m-1} C^k_{m,n}|b_{k,i} - b_{k,i+1}| \leq C^k_{m,n}(M + 2M) = 3MC^k_{m,n}$$
2. В случае $m = n+1$:
   $|S^k_{m,n}| \leq |A^k_{m,n}||b_{m,k}| \leq MC^k_{m,n} \leq 3MC^k_{m,n}$
3. В случае $m = n$:
   $|S^k_{m,n}| = |S^k_{n,n}| = 0 \leq 3MC^k_{m,n}$

Таким образом, при $m \geq n$ выполнено $|S^k_{m,n}| \leq 3MC^k_{m,n}$

Доказательство

Завершение доказательства

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}$ равномерно сходится, то, в соответствии с критерием Коши, существует натуральное число N такое, что для всех $m > n > N$ и для всех k выполнено $|\sum\limits_{i=n+1}^{m} a_{k,i}| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$, т.е. $|A^k_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Выберем такое N.
2. Зафиксируем $m > n > N$.
3. Зафиксируем $n \leq i \leq m$.
4. При $n < i \leq m$ выполнено $|A^k_{i,n}| < \frac{\varepsilon}{3M}$. При $i = n$ выполнено $|A^k_{n,n}| = 0 < \frac{\epsilon}{3M}$. Расфиксируем i. Таким образом, для всех $n \leq i \leq m$ выполнено $|A^k_{i,n}| < \frac{\epsilon}{3M}$. И, следовательно, выполнено $C^k_{n,m} = \max(|A^k_{n,n}|, |A^k_{n+1,n}|, \ldots, |A^k_{m,n}|) < \frac{\varepsilon}{3M}$
5. Таким образом, $|\sum\limits_{i=n+1}^{m} a_{k,i}b_{k,i}| = |S^k_m - S^k_n| = |S^k_{n,m}| < 3MC^k_{n,m} < \varepsilon$ при всех $m > n > N$ (расфиксируем m, n).
6. Расфиксируем $\varepsilon > 0$. В соответствии с критерием Коши, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i}b_{k,i}$ равномерно сходится.

[Пример 1, Т.6а] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x\sin(\frac{1}{x^2 i^2})$ на множестве $E = (0, +\infty)$

Поточечная сходимость

Поточечная сходимость: для любого $x \in (0, +\infty)$
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x\sin(\frac{1}{x^2 i^2}) \sim \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 i^2} = \frac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ — сходящийся ряд.

На последовательностях $x_k \to a$, $a \in (0, +\infty]$

$a_{k,i} = x_k \sin(\frac{1}{x_k^2 i^2}) \sim \frac{x_k}{x_k^2 i^2} = \frac{1}{x_k i^2}$. Пояснение: $\frac{1}{x_k^2 i^2} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$, $\frac{\sin(1/x_k^2 i^2)}{1/(x_k^2 i^2)} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 1$.

Критерий Коши: $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{x_k i^2} = \frac{1}{x_k}\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{i^2} \to 0$

На последовательности $x_k = \frac{1}{k}$

$a_{k,i} = x_k \sin(\frac{1}{x_k^2 i^2}) = \frac{1}{k}\sin(\frac{k^2}{i^2})$. Так как $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (-\delta, +\delta)$ выполнено $\frac{1}{2}x < \sin x < \frac{3}{2}x$. Следовательно, при $i > \sqrt{\delta}k$ выполнено $\frac{1}{2}\frac{k}{i^2} < a_{k,i} < \frac{3}{2}\frac{k}{i^2}$.

Положим $n_k = [\sqrt{\delta}k] + 1$, $m_k = 2[\sqrt{\delta}k] + 2$. Тогда $n_k, m_k \to +\infty$, $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{k,i} >$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{k}{i^2} = \frac{k}{2}\sum_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{1}{i^2} > \frac{k}{2}\sum_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{1}{m_k^2} = \frac{k}{2}\frac{1}{m_k^2}(m_k - n_k) = \frac{k}{8n_k} > \frac{k}{8\sqrt{\delta}k} = \frac{1}{8\sqrt{\delta}} \not\to 0$$

Пример 1

Выводы

1. Ряд сходится равномерно на множестве $(1, +\infty)$.
2. Ряд не сходится равномерно на множестве $(0, 1)$.

[Пример 2, Т.6б] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{xi}{x^2+i^2}}{1+\ln^2 i}$ на множестве $E = (0, +\infty)$

Поточечная сходимость

Для любого $x \in (0, +\infty)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{xi}{x^2+i^2}}{1+\ln^2 i} \sim x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(x^2+i^2)(1+\ln^2 i)} \le x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(1+\ln^2 i)} \le x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \ln^2 i}$$ — сходящийся ряд.

На последовательностях $x_k \to a$, $a \in [0, +\infty)$

$$a_{k,i} = \frac{\sin \frac{x_k i}{x_k^2+i^2}}{1+\ln^2 i} \sim \frac{x_k i}{(x_k^2+i^2)(1+\ln^2 i)} \sim \frac{x_k i}{i^2(1+\ln^2 i)} = \frac{x_k}{i(1+\ln^2 i)} \sim \frac{x_k}{i \ln^2 i}.$$

Пояснения: $\frac{x_k i}{x_k^2+i^2} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$, $\frac{\sin \frac{x_k i}{x_k^2+i^2}}{\frac{x_k i}{x_k^2+i^2}} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 1$, $\frac{i^2}{x_k^2+i^2} = \frac{1}{1+\frac{x_k^2}{i^2}} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 1$.

Критерий Коши: $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{x_k}{i \ln^2 i} = x_k \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{i \ln^2 i} \to a * 0 = 0$

Пример 2

На последовательности $x_k = k$

$a_{k,i} = \frac{\sin\frac{ki}{k^2+i^2}}{1+\ln^2 i}$. Так как $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (-\delta, +\delta)$ выполнено $\frac{1}{2}x < \sin x < \frac{3}{2}x$.

При $i > max(\delta, 1)k$ выполнено $0 < \frac{ik}{i^2+k^2} = \frac{1}{\frac{i}{k}+\frac{k}{i}} < \frac{1}{\frac{i}{k}} = \frac{k}{i} < \delta$, и следовательно,

$\sin\frac{ik}{i^2+k^2} > \frac{1}{2}\frac{ik}{i^2+k^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{i}{k}+\frac{k}{i}} > \frac{1}{2}\frac{1}{2\frac{i}{k}} = \frac{k}{4i}$,

$\frac{\sin\frac{ki}{k^2+i^2}}{1+\ln^2 i} > \frac{k}{4i(1+\ln^2 i)}$.

Положим $n_k = [max(\delta, 1)]k + 1$, $m_k = 2n_k$. Тогда $\sum_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{\sin\frac{ki}{k^2+i^2}}{1+\ln^2 i} >$

$\frac{k}{4}\sum_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{1}{i(\ln^2 i+1)} > \frac{k}{4}\frac{m_k-n_k}{m_k(\ln^2(m_k)+1)} = \frac{k}{8}\frac{1}{(\ln^2(2n_k)+1)} = \frac{k}{8}\frac{1}{\ln^2(2[max(\delta,1)]k+2)+1} \to +\infty$

Выводы

1. Ряд сходится равномерно на множестве $(0, 1)$.
2. Ряд не сходится равномерно на множестве $(1, +\infty)$.

[Пример 3, §18, 20(4)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i(1-x^i)$ на множестве $E = (\frac{1}{2}, 1)$

Поточечная сходимость

Для любого $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i(1-x^i) = \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^{2i} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} - \frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2} \to \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = S(x)$$

На последовательности $x_k = 1 - \frac{1}{k}$

$$S_k(x_k) - S(x_k) = \frac{x_k(1-x_k^k)}{1-x_k} - \frac{x_k^2(1-x_k^{2k})}{1-x_k^2} - \frac{x_k}{1-x_k} + \frac{x_k^2}{1-x_k^2} = \frac{x_k}{1-x_k}(-x_k^k) - \frac{x_k^2}{1-x_k^2}(-x_k^{2k}) =$$
$$\frac{1-\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}(-(1-\frac{1}{k})^k) - \frac{(1-\frac{1}{k})^2}{1-(1-\frac{1}{k})^2}(-(1-\frac{1}{k})^{2k}) = (k-1)(-(1-\frac{1}{k})^k) - \frac{(k-1)^2}{k^2-(k-1)^2}(-(1-$$
$$\frac{1}{k})^{2k}) = (k-1)[\frac{k-1}{2k-1}(1-\frac{1}{k})^{2k} - (1-\frac{1}{k})^k] \to +\infty * (\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e}) = -\infty$$

Выводы

Ряд не равномерно сходится на множестве $(\frac{1}{2}, 1)$

[Пример 4, §18, 33(5)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{x+i^2} \sin \frac{i^2}{x}$ на множестве $E = (0, +\infty)$

Поточечная сходимость

Для любого $x \in (0, +\infty)$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left| \frac{x}{x+i^2} \sin \frac{i^2}{x} \right| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{x+i^2} = x \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x+i^2}$ — сходящийся ряд.

На последовательностях $x_k \to a$, где $a \in [0, +\infty)$

$a_{k,i} = \frac{x_k}{x_k+i^2} \sin \frac{i^2}{x_k}$. $|a_{k,i}| \leq \frac{x_k}{x_k+i^2} \leq \frac{x_k}{i^2}$. Критерий Коши:

$\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{x_k}{i^2} = x_k \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{i^2} \to a * 0 = 0$

На последовательности $x_k = k^2$

$a_{k,i} = \frac{k^2}{k^2+i^2} \sin \frac{i^2}{k^2}$. Так как $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (-\delta, +\delta)$ выполнено $\frac{1}{2} x < \sin x < \frac{3}{2} x$.

При $i < \sqrt{\delta} k$ выполнено $\frac{1}{2} \frac{i^2}{k^2} < \sin \frac{i^2}{k^2} < \frac{3}{2} \frac{i^2}{k^2}$, $\frac{1}{2} \frac{i^2}{i^2+k^2} < a_{k,i} < \frac{3}{2} \frac{i^2}{i^2+k^2}$.

Положим: $n_k = [\frac{\sqrt{\delta}}{2}] k$, $m_k = 2n_k$. Тогда

$\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{i^2}{i^2+k^2} > \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{n_k^2}{m_k^2+k^2} = \frac{n_k^2}{4n_k^2+k^2}(m_k - n_k) = \frac{n_k^2}{4n_k^2+k^2} n_k = \frac{[\frac{\sqrt{\delta}}{2}]^2 k^2}{4[\frac{\sqrt{\delta}}{2}]^2 k^2 + k^2} n_k \to +\infty$

Пример 4

Выводы

1. Ряд равномерно сходится на множестве $(0, 1)$
2. Ряд не сходится равномерно на множестве $(1, +\infty)$

[Пример 5, §18, 36(12)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(e^{\frac{x}{\sqrt{i}}}-1)(\arctan\frac{x^2}{i+1})$ на множестве $E=(0,+\infty)$

Поточечная сходимость

Для любого $x\in(0,+\infty)$
$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(e^{\frac{x}{\sqrt{i}}}-1)(\arctan\frac{x^2}{i+1})\sim\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{i}}*\frac{x^2}{i+1}=x^3\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i}(i+1)}$ — сходящийся ряд.

На последовательностях $x_k\to a$, где $a\in[0,+\infty)$

$a_{k,i}=(e^{\frac{x_k}{\sqrt{i}}}-1)(\arctan\frac{x_k^2}{i+1})\sim\frac{x_k}{\sqrt{i}}\frac{x_k^2}{i+1}=x_k^3\frac{1}{\sqrt{i}(i+1)}$. Пояснения: $\frac{x_k}{\sqrt{i}}\xrightarrow[i,k\to\infty]{}0$, $\frac{x_k^2}{i+1}\xrightarrow[i,k\to\infty]{}0$.

И, следовательно, $\frac{e^{\frac{x_k}{\sqrt{i}}}-1}{\frac{x_k}{\sqrt{i}}}\xrightarrow[i,k\to\infty]{}1$, $\frac{\arctan\frac{x_k^2}{i+1}}{\frac{x_k^2}{i+1}}\xrightarrow[i,k\to\infty]{}1$

Критерий Коши: $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k}x_k^3\frac{1}{\sqrt{i}(i+1)}=x_k^3\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k}\frac{1}{\sqrt{i}(i+1)}\to a^3*0=0$

Пример 5

На последовательности $x_k = k$

$a_{k,i} = (e^{\frac{k}{\sqrt{i}}} - 1)(\arctan \frac{k^2}{i+1})$. Так как $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, то существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \in (-\delta_1, \delta_1)$ выполнено $\frac{1}{2}x < e^x - 1 < \frac{3}{2}x$. Так как $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что для всех $x \in (-\delta_2, \delta_2)$ выполнено $\frac{1}{2}x < \arctan x < \frac{3}{2}x$. Положим $\delta = min(\delta_1^2, \delta_2)$

Тогда при всех $i > \frac{k^2}{\delta}$ выполнено $\frac{k}{\sqrt{i}} < \delta_1$, $\frac{k^2}{i+1} < \frac{k^2}{i} < \delta_2$, и, следовательно, $\frac{1}{4}\frac{k^3}{\sqrt{i}(i+1)} < a_{k,i} < \frac{9}{4}\frac{k^3}{\sqrt{i}(i+1)}$.

Положим $n_k = [\frac{k^2}{\delta}] + 1$, $m_k = 2n_k$. Тогда $\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{k^3}{\sqrt{i}(i+1)} = k^3 \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{i}(i+1)} >$

$(m_k - n_k)\frac{k^3}{\sqrt{m_k}(m_k+1)} > n_k \frac{k^3}{(2n_k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{3/2}}\frac{k^3}{(n_k)^{1/2}} > \frac{1}{2^{3/2}}\frac{k^3}{(\frac{k^2}{\delta})^{1/2}} = \frac{\delta^{1/2}}{2^{3/2}}k^2 \to +\infty$

Выводы

1. На множестве $(0,1)$ ряд сходится равномерно
2. На множестве $(1,+\infty)$ ряд не сходится равномерно.

[Пример 6, §18, 22(1)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ix \sin x}{\sqrt[3]{i+x}}$ на множестве $E = [0, +\infty)$

Сумма синусов арифметической прогрессии

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin x \sin ix = \sin x \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin(x/2)} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin x \sin ix\right| \leq 2, \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Поточечная сходимость

Для любого $x \in [0, +\infty)$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ix \sin x}{\sqrt[3]{i+x}}$ сходится по признаку Дирихле (для обыкновенных рядов).

Пример 6

На последовательностях $x_k \to a$, $a \in [0, +\infty]$

$a_{k,i} = \sin ix_k \sin x_k$, $b_{k,i} = \frac{1}{\sqrt[3]{i+x_k}}$. Проверим условия признака Дирихле.

1. $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,k}| \leq 2$
2. $b_{k,k} \geq 0$,
3. $b_{k,i+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{i+1+x_k}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{i+x_k}} = b_{i,k}$
4. $b_{k,i} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$

   Действительно, для любых последовательностей $i_s, k_s \uparrow +\infty$ выполнено $b_{i_s,k_s} = \frac{1}{\sqrt[3]{i_s+x_{k_s}}} \to 0$

Таким образом, параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} b_{k,i}$ равномерно сходится.

Вывод

Ряд сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$

[Пример 7, §18, 22(3)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \arctan x^i$ на множестве $E = [1, +\infty)$

Поточечная сходимость

Для любого $x \in [1, +\infty)$.
Выполнено:

1. $\arctan x^{i+1} \geq \arctan x^i$, $|\arctan x^i| \leq \frac{\pi}{2}$
2. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$ сходится

По признаку Абеля (для числовых рядов) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \arctan x^i$ сходится.

На последовательностях $x_k \to a$, $a \in [1, +\infty]$

$a_{k,i} = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$, $b_{k,i} = \arctan x^i$. Проверим условия признака Абеля.

1. $|b_{k,i}| = |\arctan x_k^i| \leq \frac{\pi}{2}$
2. $\arctan x_k^{i+1} = b_{k,i+1} \geq b_{k,i} = \arctan x_k^i$, так как $x_k^{i+1} \geq x_k^i$, а arctan — монотоннно возрастающая функция.
3. Параметрический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$ равномерно сходится, так как не зависит от переменной k

Таким образом, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \arctan x_k^i$ равномерно сходится.

Пример 7

Вывод

Ряд равномерно сходится на множестве $[1, +\infty)$

[Пример 8, §18, 36(5)] Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 - ix + i^2}$ на множестве $E = (0, +\infty)$

Оценка

$0 \le \frac{x}{x^2 - ix + i^2} = \frac{x}{(x - \frac{i}{2})^2 + \frac{3i^2}{4}} \le \frac{x}{\frac{3i^2}{4}} = \frac{4}{3}\frac{x}{i^2}$

Поточечная сходимость

Для всех $x \in (0, +\infty)$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 - ix + i^2} \le \frac{4}{3} x \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ — сходящийся ряд.

На последовательностях $x_k \to a$, $a \in [0, +\infty)$

$\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{x_k}{x_k^2 - ix_k + i^2} \le \frac{4}{3} x_k \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{1}{i^2} \to \frac{4}{3} a * 0 = 0$

На последовательности $x_k = k$

При $i \ge 2k$ выполнено $(\frac{i}{2} - k)^2 \le \frac{i^2}{4}$,

$a_{k,i} = \frac{x_k}{x_k^2 - ix_k + i^2} = \frac{k}{k^2 - ik + i^2} = \frac{k}{(\frac{i}{2} - k)^2 + \frac{3i^2}{4}} \ge \frac{k}{\frac{i^2}{4} + \frac{3i^2}{4}} = \frac{k}{i^2}$.

Положим $n_k = 2k$, $m_k = 4k$. Тогда

$\sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} a_{i,k} \ge \sum\limits_{i=n_k+1}^{m_k} \frac{k}{i^2} \ge k(m_k - n_k)\frac{1}{m_k^2} = k\frac{2k}{16k^2} = \frac{1}{8} \not\to 0$

Пример 8

Выводы

1. Ряд сходится равномерно на множестве $(0, 1)$.
2. Ряд не сходится равномерно на множестве $(1, +\infty)$

Признак Дини

Теорема 1 [Признак Дини для функциональных последовательностей]

Пусть $f_i, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определённые на отрезке $[a, b]$.
Если:

1. $f_i \to f$ поточечно на отрезке $[a, b]$
2. $f_i, f \in C[a, b]$
3. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:
   1. Для любого $x \in [a, b]$ выполнено $f_{i+1}(x) \leq f_i(x)$
   2. Для любого $x \in [a, b]$ выполнено $f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$

Тогда $f_i \rightrightarrows f$ на отрезке $[a, b]$.

Следствие [Признак Дини для функциональных рядов]

Пусть $u_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определенные на отрезке $[a, b]$, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ (поточечная сходимость)
Если:

1. $u_i(x) \geq 0$.
2. $u_i, S \in C[a, b]$

Тогда $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x) \rightrightarrows S(x)$

Признак Дини

Доказательство

1. Предположим обратное. Тогда существует последовательность $x_k \to x_0$ такая, что функциональная последовательность f_i не сходится равномерно на последовательности x_k, то есть не сходится равномерно по i двойная последовательность $a_{k,i} = f_i(x_k)$.
2. Введем также обозначения: $b_k = f(x_k)$, $c_i = f_i(x_0)$.
3. Так как функции f_i поточечно сходятся к функции f, то $a_{k,i} = f_i(x_k) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x_k) = b_k$
4. Так как функции f_i непрерывны, то $a_{k,i} = f_i(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f_i(x_0) = c_i$
5. Так как функция f непрерывна, то $b_k = f(x_k) \to f(x_0)$
6. Так как фунции f_i поточечно сходятся к функции f, то $c_i = f_i(x_0) \to f(x_0)$
7. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:
   1. $a_{k,i+1} = f_{i+1}(x_k) \leq f_i(x_k) = a_{k,i}$
   2. $a_{k,i+1} = f_{i+1}(x_k) \geq f_i(x_k) = a_{k,i}$
8. Таким образом, выполнены все условия теоремы Дини для двойных последовательностей. Следовательно, $a_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} b_k$, что противоречит предположению.

Признак Дини

Теорема 2 [«Двойственный» признак Дини]

Пусть $f_i, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определённые на отрезке $[a, b]$.
Если:

1. $f_i \to f$ поточечно на отрезке $[a, b]$
2. $f_i, f \in C[a, b]$
3. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:
    1. Для любого i все функции f_i монотонно убывают
    2. Для любого i все функции f_i монотонно возрастают

Тогда $f_i \rightrightarrows f$ на отрезке $[a, b]$.

Следствие [«Двойственный» признак Дини для функциональных рядов]

Пусть $u_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определенные на отрезке $[a, b]$, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ (поточечная сходимость)
Если:

1. $u_i, S \in C[a, b]$
2. Выполнено хотя бы одно из следующих условий:
    1. Все u_i монотонно возрастают
    2. Все u_i монотонно убывают

Тогда $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x) \rightrightarrows S(x)$

Признак Дини

Доказательство

1. Предположим обратное. Тогда существует последовательность $y_s \to x_0$ такая, что функциональная последовательность f_i не сходится равномерно на последовательности y_s, а также на любой её подпоследовательности.
2. Выделим из последовательности y_s монотонную подпоследовательность $x_k = y_{s_k} \to x_0$. Введём обозначения: $a_{i,k} = f_i(x_k)$, $b_k = f(x_k)$, $c_i = f_i(x_0)$. Соответственно, последовательность $a_{k,i}$ не сходится равномерно по i.
3. Так как функции f_i поточечно сходятся к функции f, и все функции f_i, f непрерывны, то $a_{k,i} = f_i(x_k) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x_k) = b_k$, $a_{k,i} = f_i(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f_i(x_0) = c_i$, $b_k = f(x_k) \to f(x_0)$, $c_i = f_i(x_0) \to f(x_0)$
4. Рассмотрим 4 случая:
   1. Функции f_i монотонно возрастают, последовательность x_k монотонно возрастает. Тогда $a_{k+1,i} = f_i(x_{k+1}) \leq f_i(x_k) = a_{k,i}$.
   2. Функции f_i монотонно убывают, последовательность x_k монотонно убывает. Тогда $a_{k+1,i} = f_i(x_{k+1}) \leq f_i(x_k) = a_{k,i}$.
   3. Функции f_i монотонно убывают, последовательность x_k монотонно возрастает. Тогда $a_{k+1,i} = f_i(x_{k+1}) \geq f_i(x_k) = a_{k,i}$.
   4. Функции f_i монотонно возрастают, последовательность x_k монотонно убывает. Тогда $a_{k+1,i} = f_i(x_{k+1}) \geq f_i(x_k) = a_{k,i}$.
5. Во всех случаях выполнены все условия теоремы Дини для двойных последовательностей. Следовательно, $a_{k,i} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} b_k$, что противоречит предположению.

Перестановка пределов

Теорема [о перестановке пределов]

Пусть $f_i, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определённые на отрезке $[a, b]$, $x_k \to x_0$
Если:

1. $f_i \rightrightarrows f$
2. Все пределы $\lim\limits_{k\to\infty} f_i(x_k)$ существуют

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_k) = \lim\limits_{i\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} f_i(x_k)$ (пределы существуют)

Следствие [перестановка пределов в равномерно сходящихся рядах]

Пусть $u_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функции, определённые на отрезке $[a, b]$, $x_k \to x_0$.
Если:

1. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$
2. Все пределы $u_i(x_k)$ существуют

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lim\limits_{k\to\infty} u_i(x_k)$ (пределы существуют, ряд сходится)

Доказательство

1. Обозначим $a_{k,i} = f_i(x_k)$, $b_k = f(x_k)$, $c_i = \lim\limits_{k\to\infty} f_i(x_k)$.
2. Тогда выполнено $a_{k,i} \xrightarrow[k\to\infty]{} c_i$, $a_{i,k} \underset{i\to\infty}{\rightrightarrows} b_k$
3. В соответствии с теоремой Стокса-Зайделя, повторные пределы существуют и равны, то есть выполнено выполнено $\lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} a_{k,i} = \lim\limits_{i\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} a_{k,i}$
4. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_k) = \lim\limits_{i\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} f_i(x_k)$

Доказательство следствия

1. Обозначим $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$
2. Так как существуют все пределы $\lim\limits_{k\to\infty} u_i(x_k)$, то существуют также и все пределы $\lim\limits_{k\to\infty} S_n(x_k)$
3. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} S_n(x_k)$
4. То есть $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lim\limits_{k\to\infty} u_i(x_k)$