

Волны вероятности в классическом эксперименте.

Наблюдать квантовые интерференционные свойства у макроскопических объектов сложно, поскольку размер дифракционной решетки должен иметь такой же порядок, как длина волны де-Бройля. В статье показан простой способ экспериментального наблюдения и теоретического описания интерференционной картины в опыте с макроскопическими телами. Полученные результаты совпадают с решениями уравнения Шредингера для квантовых частиц и могут дополнять эти решения для макроскопических объектов.

1. Введение

Интерференционные эффекты играют важную роль в квантовой механике, а принцип суперпозиции является одним из базовых квантовых постулатов. Волновые функции де-Бройля не имеют физического смысла, но хорошо описывают поведение микрочастиц на квантовом уровне. Волновые свойства микрочастиц подтверждены многими экспериментами. Одним из самых известных экспериментов — это наблюдение интерференции у электронов, проходящих через экран с двумя щелями [1][2].

Поведение макроскопических частиц в двухщелевом эксперименте отличается от поведения электронов. Такое несоответствие приводит к тому, что у объектов с большой массой, волновыми свойствами, как правило, пренебрегают и пользуются понятием траектории тела. Считается, что тело, которое имеет траекторию, не может показывать интерференционных эффектов в эксперименте и наоборот [3]. Можно показать, что для макроскопических частиц, использование корпускулярного и волнового подхода, возможно одновременно, для одних и тех же физических тел.

Рассмотрим несколько мысленных экспериментов в которых футболист пинает мяч внутри некоторого помещения. В этом же помещении есть наблюдатель, который может поймать мяч в некоторый, точно заданный момент времени t_i . Во всех экспериментах будем считать *известной начальной координату мяча* $(0,0)$. Также будем считать известной абсолютную величину начальной скорости V_0 , с которой футболист может ударить по мячу. Для простоты будем считать, что у нас есть единственный

способ что-то узнать про координату и скорость мяча – это визуальное наблюдение.

2. Мысленные эксперименты

Эксперимент 1. Если в комнате есть освещение, то наблюдатель может измерить любую координату в произвольный момент времени (x_1, y_1) , затем вычислить направление скорости и траекторию мяча.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \\ \vec{V} &= V_0 \frac{\vec{r}_1}{|r_1|} \\ \vec{r}(t) &= \vec{V}t = V_0 \frac{\vec{r}_1}{|r_1|} t\end{aligned}\tag{1}$$

В этом эксперименте можно максимально точно поставить ворота в нужное время в правильное место, чтобы вероятность поймать мяч была максимально высокой.

$$P(\vec{r}, t) = \begin{cases} 1 & \vec{r} = V_0 \frac{\vec{r}_1}{|r_1|} t \\ 0 & \vec{r} \neq V_0 \frac{\vec{r}_1}{|r_1|} t \end{cases}\tag{2}$$

Эксперимент 2. Если в комнате нет освещения, но *известно точное время удара по мячу* $t_0 = 0$. Наблюдатель никаким образом не может узнать начальное направление скорости, вычислить точную траекторию $\vec{r}(t)$ в этом случае невозможно. В этом эксперименте, в любой момент времени, можно

определить геометрическое место точек, в которых мяч может быть с одинаковой вероятностью $P(t)$.

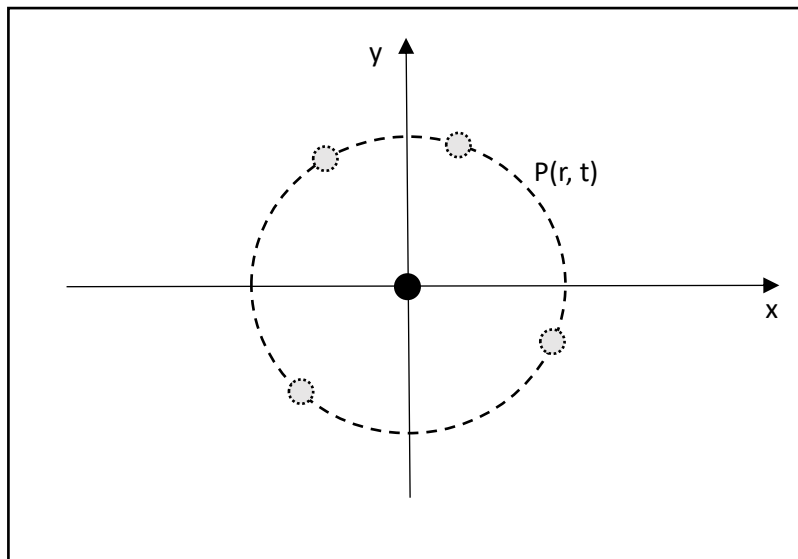


Рисунок 1

Это волна вероятности, но волна с единственным максимумом. Наблюдатель может вычислить в какой окрестности нужно установить ворота, но не может узнать конкретную точку в каждый момент времени, если не включать освещение. Использовать понятие траектории в этом эксперименте бессмысленно. Однако вероятность поймать мяч все еще остается высокой, эту вероятность можно посчитать.

$$|r(t)| = V_0 t$$

$$P(r, t) \sim \frac{1}{r^2} \tag{3}$$

С увеличением времени, волну вероятности в малой окрестности можно будет считать плоской, тогда вероятность обнаружить тело в этой окрестности можно считать положительной вещественной константой, меньше единицы.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(r, t) = \begin{cases} P_0 = const & r = V_0 t \\ 0 & r \neq V_0 t \end{cases} = P_0 \int_0^{\infty} \delta(r - V_0 t) dr \tag{4}$$

Далее не будем везде подразумевать, что волна плоская и предел писать не будем.

Эксперимент 3. В комнате нет освещения, к мячу бегут футболисты, один за одним, с равным интервалом $\Delta t = const$ и пытаются по нему в темноте

ударить. Ударяет только один, но кто именно – неизвестно. В этом случае у наблюдателя нет точного времени удара. От места удара расходится волна вероятности с многими максимумами. Максимумов будет столько, сколько футболистов участвуют в эксперименте. По аналогии можем записать формулу для вероятности:

$$|r_n| = V_0 t + V_0 n \Delta t \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(r_n, t) = \begin{cases} P_0 & r = V_0 t + V_0 n \Delta t \\ 0 & r \neq V_0 t + V_0 n \Delta t \end{cases} = P_0 \int_0^\infty \delta(r - V_0 t - V_0 n \Delta t) dr \quad (5)$$

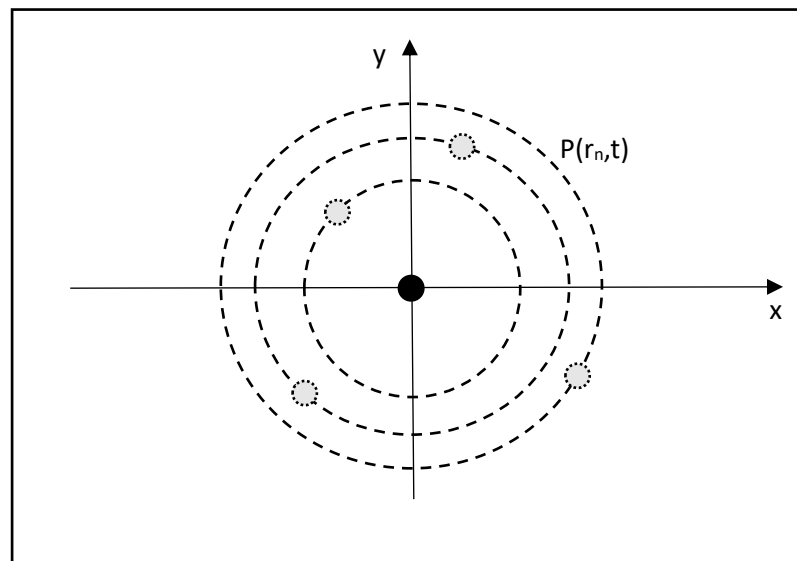


Рисунок 2

Перейдем в систему отсчета, в которой плоская волна неподвижна, тогда $V_0 t = 0$, вероятность нахождения частицы в точках $r_n = V_0 n \Delta t$ будет постоянной P_0 , как указано на рис. 3.

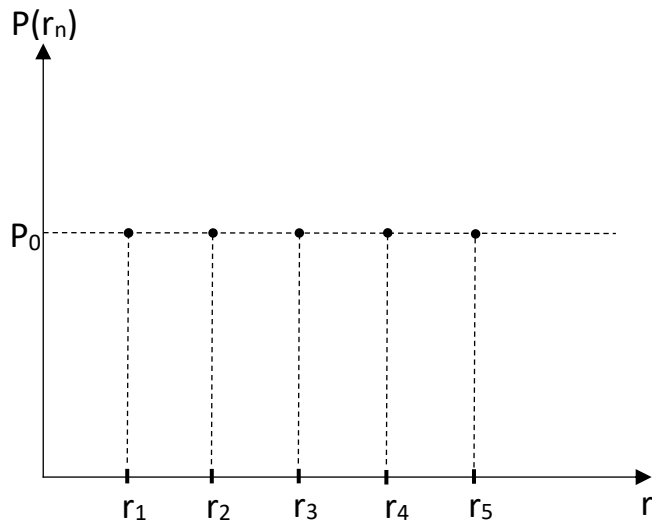


Рисунок 3

Представление функции вероятности в виде набора отдельных точек неудобно математически и лишено физического смысла, поскольку любой реальный эксперимент содержит ненулевые погрешности. Можно учесть, что в неидеальном опыте, образующиеся максимумы должны быть размыты. Действительно, если считать, конечным время на взмах ноги, время на удар по мячу, время на разгон и отрыв мяча от ноги и т.п., то волну вероятности правильней описывать нормальным распределением:

$$P(r_n) = P_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r - V_0 n \Delta t}{\sigma} \right)^2} \quad (6)$$

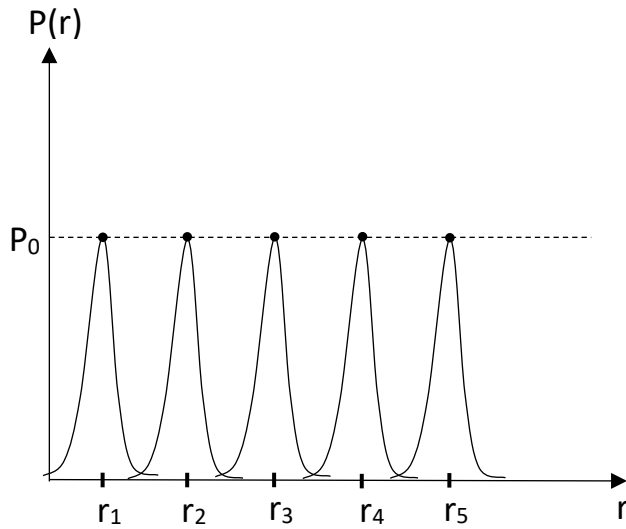


Рисунок 4

В реальности можно подобрать условия эксперимента так, чтобы распределение (6) приближенно описывалось функцией квадрата косинуса. Для этого среднеквадратичное отклонение должно удовлетворять условию:

$$\sigma = \frac{V_0 \Delta t}{\sqrt{2\pi}} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$\left(\frac{r - V_0 n \Delta t}{\sigma} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2\pi} r}{V_0 \Delta t} - \sqrt{2\pi} n \right)^2 \quad (8)$$

$$P(r, n) = P_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2\pi} r}{V_0 \Delta t} - \sqrt{2\pi} n \right)^2} \approx P_0 \left(1 - \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} - \pi n \right)^2 \right) \approx P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} - \pi n \right)$$

Таким образом, для волн вероятности можно использовать простую приближенную формулу:

$$P(r) = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \quad (9)$$

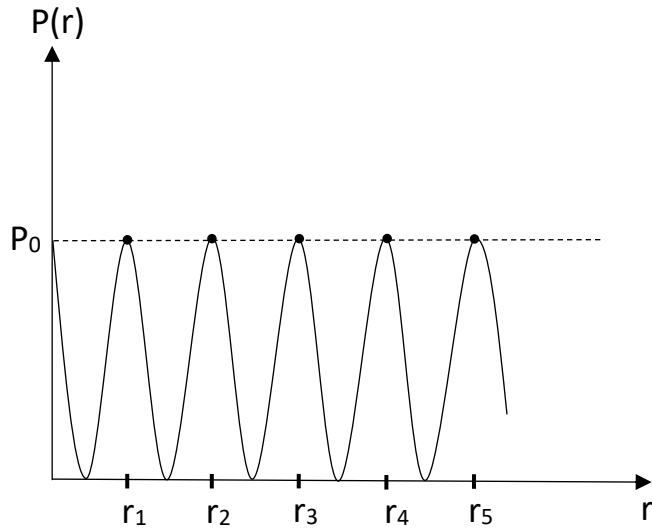


Рисунок 5

В третьем эксперименте все еще можно пытаться определить вероятность того, в каком месте в конкретное время будет мяч. Максимумы волны вероятности дадут геометрическое место точек, куда нужно поставить ворота, чтобы иметь хоть какой-то шанс на успех. Нетрудно найти волновое уравнение, решением которого будут функции (9):

$$P(r) = P_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t}\right) = \frac{P_0}{2} + \frac{P_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t}\right) \quad (10)$$

$$P(r) - \frac{P_0}{2} = \frac{P_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t}\right) \equiv \phi$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2\pi}{V_0 \Delta t} \frac{P_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t}\right)^2 \frac{P_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t}\right) = -\left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t}\right)^2 \phi \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t}\right)^2 \phi = 0$$

Перейдем в (11) от скорости к кинетической энергии:

$$E_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2m \left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)^2 \phi = 0 \quad (12)$$

Перейдем от кинетической энергии к полной и потенциальной:

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{(E-U)\Delta t^2} \phi = 0 \quad (13)$$

Можно заметить, что (13) полностью совпадает со стационарным уравнением Шредингера, если в эксперименте добиться равенства:

$$V_0 \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0} = \lambda_D \quad (14)$$

Где λ_D — это длина волны де-Бройля.

Действительно, объединим (13) и (14):

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{(E-U)\Delta t^2} \phi = 0 \\ \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0^2} = \frac{\pi\hbar}{E_k} = \frac{\pi\hbar}{(E-U)} \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда:

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2 (E-U)^2}{(E-U)\pi^2 \hbar^2} \phi = 0 \quad (16)$$

$$\boxed{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + (E-U)\phi = 0}$$

Уравнение (16) совпадает с уравнением Шредингера, однако решением здесь будет не комплексная амплитуда, а вещественная функция ϕ , которая связана с вероятностью соотношением (10):

$$P(r) = \phi + \frac{P_0}{2} \quad (17)$$

Максимальная вероятность P_0 должна быть определена так, чтобы при любых ϕ выполнялось неравенство $0 \leq P(r) \leq P_0$.

Эксперимент 4. Модифицируем третий эксперимент. Поставим на пути мяча непроницаемое препятствие с двумя щелями. Через щели мяч может пролетать, через препятствие – не может. Если мяч пролетает через щель, то его траектория меняется случайным образом. Наблюдатель, находящийся за щелями, может предсказать точки, где вероятность обнаружить мяч станет максимальной, а где эта вероятность будет минимальной. Волна вероятности будет накладываться сама на себя, давая картину, похожую на интерференционную картину световой волны.

3. Случай прямоугольной потенциальной ямы

Рассмотрим решение уравнения (13) для эксперимента с макроскопическим телом в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{E \Delta t^2} \phi = 0 \quad (18)$$

Будем искать решение в виде экспоненты:

$$\phi = C_1 e^{i \frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r} + C_2 e^{-i \frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r} = a \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r + \varphi \right) \quad (19)$$

Граничные условия накладываем так, чтобы вероятность найти частицу на краях ямы была нулевой:

$$\begin{aligned} P(0) = \phi(0) + \frac{P_0}{2} = 0 &\Rightarrow \phi(0) = -\frac{P_0}{2} \\ P(l) = \phi(l) + \frac{P_0}{2} = 0 &\Rightarrow \phi(l) = -\frac{P_0}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляем (20) в (19):

$$\begin{cases} \phi(0) = a \cos(\varphi) = -\frac{P_0}{2} \\ \phi(l) = a \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l + \varphi \right) = -\frac{P_0}{2} \end{cases} \quad (21)$$

Полагая начальную фазу равной нулю, находим уровни энергии в потенциальной яме:

$$\begin{cases} a = -\frac{P_0}{2} \\ -\frac{P_0}{2} \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l \right) = -\frac{P_0}{2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l = 2\pi n \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{m l^2}{2n^2 \Delta t^2}}$$

Если подставить в (22) время из (14), то получим:

$$\begin{cases} E_n = \frac{ml^2}{2n^2\Delta t^2} \\ \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0^2} = \frac{\pi\hbar}{E_n} \end{cases} \quad (23)$$

$$E_n = \frac{ml^2 E_n^2}{2n^2\pi^2\hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{ml^2}$$

Как видно, энергии (23) отличаются от уровней энергии квантовой частицы в потенциальной яме. Однако, если вместо (14), выбрать длину волны в два раза меньше:

$$V_0\Delta t = \frac{\pi\hbar}{mV_0} = \frac{\lambda_D}{2} \quad (24)$$

то получим полное совпадение с классическим результатом, который получается при решении уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} E_n = \frac{ml^2}{2n^2\Delta t^2} \\ \Delta t = \frac{\pi\hbar}{mV_0^2} = \frac{\pi\hbar}{2E_n} \end{cases} \quad (25)$$

$$E_n = \frac{ml^2 4E_n^2}{2n^2\pi^2\hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$$

Найдем распределение вероятностей:

$$P(r) = \phi + \frac{P_0}{2} = a \cos\left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r + \varphi\right) + \frac{P_0}{2} \quad (26)$$

$$P(r) = -\frac{P_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{l} r\right) + \frac{P_0}{2} = \frac{P_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{l} r\right)\right) = P_0 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} r\right)$$

Полученный результат полностью совпадает с решением стационарного уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме.

4. Заключение

Расчеты показывают, что при правильной постановке эксперимента, волновые свойства возможно наблюдать у макроскопических частиц. Распределение вероятности можно получить из решения стационарного уравнения Шредингера напрямую, не прибегая к комплексным амплитудам.

Литература:

1. Feynman, Richard P.; Robert B. Leighton; Matthew Sands. The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3 (неопр.). — Addison-Wesley, 1965. — С. 1.1—1.8. — ISBN 978-0201021189.
2. Donati, O; Missiroli, G F; Pozzi, G (1973). "An Experiment on Electron Interference". American Journal of Physics. 41 (5): 639–644. Bibcode:1973AmJPh..41..639D. doi:10.1119/1.1987321.
3. Harrison, David (2002). "Complementarity and the Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics". UPSCALE. Dept. of Physics, U. of Toronto. Retrieved 21 June 2008.