УДК 511.522.2
MSC: 11D41

А.Н. Ляшенко

Применение интервальных переменных для анализа разрешимости уравнения Ферма

Аннотация: в работе для анализа разрешимости уравнения Ферма, произведена замена переменных на интервальные значения между ними. В новых переменных найдено решение уравнения для степени 2. Представляя уравнение в новых переменных, удалось установить их [интервалов] возможные значения. Установлено представление исходных переменных только через интервалы и константный множитель. Произведено уменьшение степени уравнения, делением на одну из переменных. Анализ полученных отношений привел к выводу, что константный множитель должен быть равен 1. Представляя решение для высших степеней аналогично решению для степени 2 и используя равенство константного множителя 1 удалось показать отсутствие решения для степеней уравнения больше 2.

Ключевые слова: метод замены переменных, диофантовы уравнения, последняя теорема Ферма

Анализ разрешимости уравнения Ферма

1 Интервальные переменные

Рассмотрим уравнение

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

где $x, y, z, p \in \mathbf{N}_1\{1, 2, \ldots\}$.

Введем новые переменные (интервалы) $n, m \in \mathbf{N}$

$$y - x = n, \quad z - y = m \tag{1.1}$$

Представим x, y, z через новые переменные

$$x^p = z^p - y^p = m\sum_{i=1}^{p} C_p^i m^{i-1} y^{p-i} = \sum_{i=1}^{p} C_p^i \left((n+m)^i - n^i\right)\cdot x^{p-i} \tag{1.2}$$

$$y^p = z^p - x^p = (n+m)\sum_{i=1}^{p} C_p^i (n+m)^{i-1} x^{p-i} = \sum_{i=1}^{p} C_p^i \left(m^i - (-n)^i\right)\cdot y^{p-i} \tag{1.3}$$

$$z^p = y^p + x^p = \sum_{i=1}^{p} C_p^i (-1)^{i+1}\left((n+m)^i + m^i\right)\cdot z^{p-i} \tag{1.4}$$

Из уравнений (1.2, 1.3) найдем вид переменных x и y

$$x^p = m\left(p\cdot y^{p-1} + m\sum_{i=2}^{p} C_p^i m^{i-2} y^{p-i}\right) \Rightarrow x = m_1 \cdot x'$$

$$y^p = (n+m)\cdot\left(p\cdot x^{p-1} + (n+m)\sum_{i=2}^{p} C_p^i m^{i-2} x^{p-i}\right) = w\cdot\left(p\cdot x^{p-1} + w\sum_{i=2}^{p} C_p^i m^{i-2} x^{p-i}\right) \Rightarrow y = w_1\cdot y'$$

Здесь $m_1 \in m$ и $w_1 \in w = (n + m)$.

2 Взаимная простота интервалов

Можно показать, что n и m взаимно просты. Положим, что n пересекается с m и пусть $n = m_1 \cdot n'$ и $m = m_1 \cdot m'$, тогда из (1.1 - 1.3) следует

$$x = m_1 \cdot x'$$

$$y = x + n = m_1\cdot x' + m_1\cdot n' = m_1\cdot y'$$

$$z = y + m = m_1\cdot y' + m_1\cdot m' = m_1\cdot z'$$

Здесь x', y' и z', взаимно просты. Используя данные представления, перепишем уравнения (1) и (1.1) следующим образом

$$0 = x^p + y^p - z^p = (m_1 x')^p + (m_1 y')^p - (m_1 z')^p = m_1^p \cdot \left(x'^p + y'^p - z'^p\right)$$
$$x'^p + y'^p - z'^p = 0$$
$$y - x = n \Rightarrow m_1 y' - m_1 x' = m_1 \cdot n' \Rightarrow y' - x' = n'$$
$$z - y = m \Rightarrow m_1 z' - m_1 y' = m_1 \cdot m' \Rightarrow z' - y' = m'$$

При необходимости операцию сокращения можно повторить до достижения состояния, когда n и m взаимно просты. Из этого следует, что w и m также взаимно просты.

3 Представление переменных через интервалы

Определим связь между x и y. Пусть $x = m_1 \cdot x'$ и $y = w_1 \cdot y'$, здесь и далее пары (m_1, x') и (w_1, y') взаимно просты. Тогда из уравнения (1.1) получим

$$y = x + n = x - m + (n + m) = x - m + w \Rightarrow y - w = x - m = m_1 \cdot w_1 \cdot q = q'$$

Здесь и далее m_1, w_1 и q взаимно просты. Простота m_1 и w_1 следует из простоты n и m.
Пусть m_1 и q не взаимно просты, тогда

$$x = m + m_1 w_1 q = m_2 (m' + w_1) = m_2 x''$$

здесь $m_2 = m_1 \cdot q$. Мы получили $x = m_1 \cdot x' = m_2 \cdot x''$, из этого уравнения следует, что $x' = q \cdot x''$. Т.к. q и m_1 имеют общие делители, получается, что x' и m_1 не взаимно просты. Из этого противоречия следует взаимная простота m_1 и q. Аналогично показывается простота для w_1 и q.

Представим x, y, z через q

$$\begin{gathered} x = m + m_1 w_1 q = m_1 (m' + w_1 q) = m_1 x' \\ y = w + m_1 w_1 q = w_1 (w' + m_1 q) = w_1 y' \\ z = y + m = (w + m) + m_1 w_1 q \end{gathered} \tag{3.1}$$

Из уравнений (3.1) видно, что при $m = m_1$, решение может иметь вид $x = m_1^s \cdot x'$. Подобная ситуация возможна и для y.

Из уравнений (3.1) видно, что пары (y, m) и (x, w) взаимно просты.

4 Возможные значения интервалов

Выясним значения m_1. Уравнение (1.2) можно расписать так

$$x^p = m \sum_{i=1}^{p} C_p^i m^{i-1} y^{p-i} = p \cdot m \cdot y^{p-1} + \frac{(p-1)p}{2} m^2 y^{p-2} + \ldots + m^p \tag{4.1}$$

Из этого представления видно, что возможны следующие варианты:

4.1 $m = m_1 = 1$

4.2 Если p и m взаимно просты, из (4.1) получим

$$x^p = m \cdot \left(p \cdot y^{p-1} + \frac{(p-1)p}{2} m y^{p-2} + \ldots + m^{p-1} \right) = m \cdot \left(p \cdot y^{p-1} + m \cdot func(y, m)\right) = m \cdot X$$
$$x = \sqrt[p]{m} \cdot x' \Rightarrow m_1 = \sqrt[p]{m} \Rightarrow m = m_1^p$$

Здесь и далее в выражении, подобном $x^p = m \cdot (p \cdot y^q + m \cdot func(y,m))$, где m и p взаимно просты и $q \in \mathbf{N}$, значение функции $func(y,m)$ НЕ БУДЕТ каким-либо образом пересекаться с p и $\boldsymbol{y}$. Предположим, что значение $func(y,m)$ зависит от y, тогда получим (для наглядности возьмём р = 5)

$$c \cdot y = func(y, m) = 10y^3 + 10y^2 m + 5ym^2 + m^3 \Rightarrow$$
$$\left[c - \left(10y^2 + 10ym + 5m^2\right)\right] \cdot y = m^3$$

Как видим, здесь y и m не взаимно просты, что противоречит выводам в п.3. Следовательно, значение функции $func(y,m)$ взаимно просто с $\boldsymbol{y}$. Аналогично показывается взаимная простота $func(y,m)$ и p, но используется условие (m и p взаимно просты).

4.3 Если $m \in p$

Пусть $p = p_1 \cdot m^d$, где $1 \le d < p$, p_1 и m взаимно просты. Из (4.1) для $p = 2$ получим

$$x^2 = 2m \cdot y + m^2$$

Для $m = 2$ и $(y + 1) = 4 \cdot (x')^2$, где $x' \in \mathbf{N}$ мы получим

$$x^2 = 4(y+1) = 4 \cdot 4x'^2 \Rightarrow x = \sqrt{16x'^2} = 4x' \Rightarrow x = m^2 \cdot x'$$

Из (4.1) для $p > 2$ получим

$$x^p = p_1 m^d m \cdot y^{p-1} + \frac{(p-1)p_1 m^d}{2} m^2 y^{p-2} + \ldots + m^p \Rightarrow$$
$$x^p = m^{d+1}\left(p_1 y^{p-1} + \frac{(p-1)p_1}{2} m \cdot y^{p-2} + \ldots + m^{p-d-1}\right) \tag{4.2}$$

- Для уравнения (4.2) видно, что при $m = 2$, члены 1-ый и 2-ой будут нечётными (т.к. p_1 и y нечётны). Их сумма даст число пропорциональное m, например, m^i. Если i будет равна степени m в третьем члене $((p\text{-}2)\cdot(p\text{-}1)\cdot p_1\cdot m^2)/6$, можно будет продолжить суммирование членов с возрастанием степени при m. В итоге получим $x^p = m^t \cdot X$, где $t > p$ т.к. последний член в (4.2) имеет степень m^p. И значит, возможна ситуация, когда $t/p = s > 1 \in \mathbf{N}$. А значит, уравнение (1) может иметь решение.

Приведём пример. Пусть $p = 4$ и $m = 2$, тогда $p = m^2$

$$x^4 = 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4$$
$$x^4 = 4m\left(y^3 + 3y^2 + m^2y + m\right) = 4m\left((y+3)y^2 + m^2y + m\right)$$

Пусть $(y + 3) = 2\cdot(2i + 1) = m\cdot(2i + 1)$, где $i \in \mathbf{N}$, тогда получим $y = 4\cdot i - 1$

$$x^4 = 4m\left(m(2i+1)(4i-1)^2 + m^2(4i-1) + m\right) = 4m^2\left((2i+1)(4i-1)^2 + 2(4i-1) + 1\right)$$

Распишем выражение в скобках

$$x^4 = 4m^2\left((2i+1)(16i^2 - 8i + 1) + 8i - 2 + 1\right) = 2m^2\left(32i^3 + 2i\right) = m^4 \cdot 2i \cdot \left(16i^2 + 1\right)$$

Если $2i = j^4$, где $j \in \mathbf{N_2}$ то мы получим такое решение $x = m\cdot j\cdot x'$.

- При $m = 2\cdot m'$, где $m' \in \mathbf{N_2}$. Во втором члене (p-1) и p_1 нечётные и на 2 не делятся, тогда из уравнения (4.2) мы получим

$$x^p = m^{d+1}\left(p_1 y^{p-1} + \frac{m}{2} func(m,y)\right) = m^{d+1}\left(p_1 y^{p-1} + m' \cdot func(m,y)\right) = m^{d+1} X \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[p]{m^{d+1}X} \Rightarrow x = m^{\frac{d+1}{p}} x'$$

Пусть $p = m$ тогда $d = 1$. Приведем таблицу значений $m^{d+1/p} = p^{2/p}$

p	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$p^{2/p}$	2.08	2	1.9	1.8	1.7	1.68	1.63	1.58	1

Пусть $p = m^2$ тогда $d = 2$. Приведем таблицу значений $m^{d+1/p} = p^{3/(2p)}$

p	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$p^{3/(2p)}$	1.7	1.68	1.62	1.56	1.52	1.48	1.44	1.41	1

Пусть $p = m^3$ тогда $d = 3$. Приведем таблицу значений $m^{d+1/p} = p^{4/(3p)}$

p	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$p^{4/(3p)}$	1.63	1.59	1.54	1.49	1.45	1.41	1.38	1.36	1

Как видим выражение $m^{d+1/p} \in \mathbf{N}$ и значит уравнение (1) имеет решение, только при $p = m = 4$

- При $m = 2m'+1$, где $m' \in \mathbf{N}$. Во втором члене (p-1)/2 или p_1/2, $\in \mathbf{N}$, тогда из уравнения (4.2) следует

$$x^p = m^{d+1}\left(p_1 y^{p-1} + m \cdot func(m,y)\right) = m^{d+1} X \Rightarrow x = \sqrt[p]{m^{d+1}X} \Rightarrow x = m^{\frac{d+1}{p}} x'$$

Здесь мы получили значение x аналогичным случаю $m = 2m'$ способом, но в данном случае m - нечётное, а значит не равно 4 и значит при всех значениях m решения уравнения (1) нет.

4.4 Если $p \in m$. Пусть $m = p \cdot m'$, тогда из (4.1) получим

$$x^p = p \cdot m \cdot \left(y^{p-1} + \frac{(p-1)}{2} m \cdot y^{p-2} + \ldots + \frac{m}{p} m^{p-2}\right) =$$
$$p \cdot m \cdot \left(y^{p-1} + \frac{(p-1)}{2} m \cdot y^{p-2} + \ldots + m' \cdot m^{p-2}\right)$$

- при $p = 2\cdot p'$, где $p' \in \mathbf{N}$ получим

$$x^p = p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+\frac{(p-1)}{2}m\cdot y^{p-2}+\ldots+m'\cdot m^{p-2}\right)=$$

$$p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+\frac{(p-1)}{2}2p'm'\cdot y^{p-2}+\ldots+m'\cdot m^{p-2}\right)=p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+m'\cdot func(m,y)\right)=p\cdot m\cdot X\Rightarrow$$

$$x=\sqrt[p]{p\cdot m}\cdot x'=m_1\cdot x'\Rightarrow m_1=\sqrt[p]{p\cdot m}\Rightarrow m=p^{p-1}m_2^p\Rightarrow m_1=p\cdot m_2$$

- при $p = 2\cdot p' + 1$, где $p' \in \mathbf{N}$ получим

$$x^p = p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+\frac{(p-1)}{2}m\cdot y^{p-2}+\ldots+m'\cdot m^{p-2}\right)=$$

$$p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+p'm\cdot y^{p-2}+\ldots+m'\cdot m^{p-2}\right)=p\cdot m\cdot\left(y^{p-1}+m\cdot func(m,y)\right)=p\cdot m\cdot X\Rightarrow$$

$$x=\sqrt[p]{p\cdot m}\cdot x'=m_1\cdot x'\Rightarrow m_1=\sqrt[p]{p\cdot m}\Rightarrow m=p^{p-1}m_2^p\Rightarrow m_1=p\cdot m_2$$

4.5 Если $m \cap p$

Пусть $p = p'\cdot m_0^d$, и $m = m_0^s\cdot m'$ где $1 \le d < p$, $1 \le s$, $2 < m$. Здесь p', m_0 и m' взаимно просты. И p' и m' одновременно не равны 1. Из (4.1) для $p > 2$ получим

$$\begin{aligned} x^p &= m_0^d p'\cdot m\cdot y^{p-1}+\frac{(p-1)m_0^d p'}{2}m^2\cdot y^{p-2}+\ldots+m^p\Rightarrow \\ x^p &= m_0^d m\left(p'y^{p-1}+\frac{(p-1)p'}{2}m\cdot y^{p-2}+\ldots+\frac{m^{p-1}}{m_0^d}\right)\end{aligned}\qquad(4.3)$$

- Если $m = 2^s\cdot m'$, где $m_0 = 2$ и m' - нечётное, то из уравнения (4.3) мы получим

$$x^p = 2^d m\left(p_0 y^{p-1}+2^{s-1}m'\cdot func(m,y)\right)=2^d mX\Rightarrow$$

$$x=\sqrt[p]{2^d mX}=m_1x'\Rightarrow m_1=2^{\frac{d+s}{p}}m'^{\frac{1}{p}}$$

- Если $m = m_0^s\cdot m'$, где m - нечётное, то из уравнения (4.3) мы получим

$$x^p = m_0^d m\cdot\left(p_0 y^{p-1}+\frac{(p-1)p'}{2}m\cdot func(m,y)\right)=m_0^d mX\Rightarrow$$

$$x=\sqrt[p]{m_0^d mX}=m_1x'\Rightarrow m_1=m_0^{\frac{d+s}{p}}m'^{\frac{1}{p}}$$

В данном случае при любых значениях p и p', выражение $(p-1)\cdot p' / 2$ будет всегда целым. Т.е. в данном случае, как и выше, при определенных значениях d и s возможно наличие решения для уравнения (1).

Оба варианта решения, далее будем рассматривать как их предельный случай, когда $m_1 = (p\cdot m)^{1/p}$.

Как нами указывалось m_1 и q взаимно просты. Исходя из соотношений между m и m_1:

- $m = m_1 = 1$
- $m = 2$ и $m_1 = m^s$
- $m = 4$ и $m_1 = 2$ (при $p = 4$) $\Rightarrow m = m_1^2$
- $m = m_1^p$
- $m = m_1^p / p$

видим, что в первом случае $m = m_1$ и т.к. (m_1 и q) взаимно просты, то m и q тоже взаимно просты. Во втором случае т.к. $m \in m_1$ и т.к. (m_1 и q) взаимно просты, то m и q тоже взаимно просты. В остальных случаях m является степенной функцией m_1 и т.к. (m_1 и q) взаимно просты, то m и q тоже взаимно просты. Аналогично показывается простота для w и q.

5 Анализ разрешимости

5.1 Найдем решение при p = 0

$$0 = x^0 + y^0 - z^0 = 1$$

решение отсутствует т.к. $0 \neq 1$

5.2 Найдем решение при $p = 1$

$$0 = x + y - z = y - n + y - y - m = y - n - m$$

решение таково $\forall\ m, n \in \mathbf{N}$

$$y = n+m, x = y-n, z = y = m$$

5.3 Найдем решение при $p = 2$

$$x^2 = z^2 - y^2 = (x+(n+m))^2 - (x+n)^2 = 2mx + m^2 + 2mn \Rightarrow$$

$$(x-m)^2 + 2mx - m^2 = 2mx + m^2 + 2mn \Rightarrow$$

$$(x-m)^2 = 2m^2 + 2mn = 2m(n+m) \Rightarrow$$

$$x = m + \sqrt{2m(n+m)} \Rightarrow$$

$$2m(n+m) = (2t)^2 \Rightarrow n = \frac{2t^2}{m} - m$$

Для любого m и такого t, что $2t^2/m \in \mathbf{N}$, получим решение

$$n = \frac{2t^2}{m} - m$$

$$x = m + \sqrt{2m(n+m)}, \quad y = x+n, \quad z = y+m$$

5.4 Найдем решение при $p > 2$

Будем искать решения при различных значениях n и m:

5.4.1 $0 = n = m$

Исходя из (1.1) получим $x = y = z$, тогда $2x^p = x^p$.Следовательно, должно выполняться $2 = 1$, что невозможно. Значит для уравнения (1) решения нет.

5.4.2 $0 = n < m$

Исходя из (1.1) получим $x = y$, тогда $2x^p = z^p$. Следовательно, должно выполняться $2^{1/p} = z/x$, что невозможно, т.к. иррациональные числа не могут быть представлены в виде обыкновенной дроби. Значит для уравнения (1) решения нет.

5.4.3 $0 = m < n$

Исходя из (1.1) получим $y = z$, тогда $x^p = 0$. Получим примитивное решение $x = 0$, что противоречит условию $x, y, z, p \in \mathbf{N}_1\{1, 2, \ldots\}$.

5.4.4 $1 = n = m$

Выпишем уравнение (1.3) для нечетных $p \geq 3$.

$$\begin{cases} y^3 = 3\cdot 2y^2 + 2 \\ y^5 = 5\cdot 2y^4 + 10\cdot 2y^2 + 2 \\ \ldots \\ y^p = p\cdot 2y^{p-1} + f(y^2) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3\cdot 2y + 2/y \\ y^4 = 5\cdot 2y^3 + 10\cdot 2y + 2/y \\ \ldots \\ y^p = p\cdot 2y^{p-2} + f(y) + 2/y \end{cases} \tag{5.1}$$

Как видим в уравнениях (5.1) должно выполняться условие $2/y = \alpha$, где $\alpha \in \mathbf{N}$.
Если $y = 1$, $x = 0$, $z = 2$, то при таких значениях уравнение (1) $1^p \neq 2^p$ не имеет решения.
Значит $y = 2$, $x = 1$, $z = 3$, но при таких значениях уравнение (1) $1^p + 2^p \neq 3^p$ тоже не будет иметь решения. И значит для нечетных p решения для (1) отсутствуют.

Выпишем уравнение (1.3) для четных $p \geq 4$.

$$\begin{cases} y^4 = 4\cdot 2y^3 + 4\cdot 2y \\ y^6 = 6\cdot 2y^5 + 20\cdot 2y^3 + 6\cdot 2y \\ \ldots \\ y^p = p\cdot 2y^{p-1} + y\cdot f(y^2) + p\cdot 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4\cdot 2y + 4\cdot 2/y \\ y^4 = 6\cdot 2y^3 + 20\cdot 2y + 6\cdot 2/y \\ \ldots \\ y^{p-2} = p\cdot 2y^{p-3} + f(y) + p\cdot 2/y \end{cases} \tag{5.2}$$

В уравнениях (5.2) должно выполняться условие $2p/y = \alpha$, где $\alpha \in \mathbf{N}$. Из этого условия видно, что $y \leq 2p$. Если смотреть на равенства (5.2) до переноса y^2, то из $y^p = p\cdot 2y^{p-1} + f(p,y)$ следует, что должно выполняться условие $y > 2p$. Как видим значения y не пересекаются, а значит и для четных p уравнение (1) решения не имеет.

5.4.5 $1 < n$, $1 < m$, n и m взаимно просты, или $1 = n < m$ или $1 = m <$ n

Разделим уравнение (1.3) на y

$$y^{p-1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} C_p^i (m^i - (-n)^i) y^{p-i}}{y} = \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i (m^i - (-n)^i) y^{p-i-1} + \frac{m^p - (-n)^p}{y}$$

Итак, чтобы уравнение (1) имело решение необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{m^p-(-n)^p}{y}=a\in N \tag{5.3}$$

$$a=\frac{m^p-(-n)^p}{y}=\frac{m^p+(-1)^{p+1}(w-m)^p}{y}=\frac{m^p+(-1)^{p+1}\sum_{i=0}^{p}C_p^i w^{p-i}(-m)^i}{y}=$$

$$=(-1)^{p+1}\frac{\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-i}(-m)^i}{y(=w+q')}=(-1)^{p+1}\cdot w\cdot\frac{\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-1-i}(-m)^i}{y(=w+q')}=$$

$$=(-1)^{p+1}\cdot w\cdot\left(\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i+\frac{(-1)^{p-1}p\cdot m^{p-1}-q'\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i}{y(=w+q')}\right)\Rightarrow$$

$$a'=a-(-1)^{p+1}\cdot w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i=(-1)^{p+1}\cdot w\frac{(-1)^{p-1}p\cdot m^{p-1}-q'\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i}{w+q'}\Rightarrow$$

$$a'w+a'q'=p\cdot m^{p-1}\cdot w+(-1)^p q'\cdot w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i$$

Т.к. w и q взаимно просты (смотри п. 4), то приравняв члены при w и q' получим систему

$$\begin{cases} a'w=p\cdot m^{p-1}\cdot w \\ a'q'=(-1)^p q'\cdot w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a'=p\cdot m^{p-1} \\ a'=(-1)^p w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$0=p\cdot m^{p-1}-(-1)^p w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i=(-1)^{p+1}p\cdot m^{p-1}+w\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i\Rightarrow$$

$$w\cdot 0=(-1)^{p+1}p\cdot m^{p-1}\cdot w+w^2\cdot\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i w^{p-2-i}(-m)^i=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-i}(-m)^i\Rightarrow$$

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-i}(-m)^i-m^p+m^p$$

При нечетном p = 3, 5, 7 …

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-i}(-m)^i-m^p+m^p=\sum_{i=0}^{p}C_p^i w^{p-i}(-m)^i+m^p=(w-m)^p+m^p=n^p+m^p=0 \tag{5.4}$$

Данное уравнение не имеет решения в натуральных числах.

При четном p = 4, 6, 8 …

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^i w^{p-i}(-m)^i+m^p-m^p=\sum_{i=0}^{p}C_p^i w^{p-i}(-m)^i-m^p=(w-m)^p-m^p=n^p-m^p=0 \tag{5.5}$$

Данное уравнение имеет решение при $n=m$, но у нас условие, что n и m взаимно просты.
Приведём примеры:

- Для $p=3$

$$y^3=3(m+n)y^2+3(m^2-n^2)y+(m^3+n^3)\Rightarrow y^2=3(m+n)y+3(m^2-n^2)+\frac{(m^3+(w-m)^3)}{y}$$

$$\frac{w^3-3w^2m+3wm^2}{y}=w\frac{w^2-3wm+3m^2}{y(=w+q')}=w\cdot\left(w-3m+\frac{3m^2-q'(w-3m)}{w+q'}\right)=a\in N\Rightarrow$$

$$a'=a-w^2+3wm=w\frac{3m^2-q'(w-3m)}{w+q'}\Rightarrow a'w+a'q'=3m^2w-w(w-3m)q'\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a'w = 3m^2 w \\ a'q' = -w(w-3m)q' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 3m^2 \\ a' = -w(w-3m) \end{cases} \Rightarrow 3m^2 = -w(w-3m) \Rightarrow$$

$$0 = w^2 - 3wm + 3m^2 \Rightarrow$$

$$w \cdot 0 = w^3 - 3w^2 m + 3wm^2 - m^3 + m^3 = (w-m)^3 + m^3 \Rightarrow$$

$$n^3 + m^3 = 0$$

- Для $p = 4$

$$y^4 = 4(m+n)y^3 + 6(m^2 - n^2)y^2 + 4(m^3 + n^3)y + (m^4 - n^4) \Rightarrow$$

$$y^3 = 4(m+n)y^2 + 6(m^2 - n^2)y + 4(m^3 + n^3) + \frac{(m^4 - (w-m)^4)}{y} \Rightarrow$$

$$a = -\frac{w^4 - 4w^3 m + 6w^2 m^2 - 4wm^3}{y} = -w\frac{w^3 - 4w^2 m + 6wm^2 - 4m^3}{y(= w+q')} =$$

$$= -w\left(w^2 - 4wm + 6m^2 + \frac{-4m^3 - q'(w^2 - 4wm + 6m^2)}{w+q'} \right) = a \in N \Rightarrow$$

$$a' = a + w^3 - 4w^2 m + 6wm^2 = -w\frac{-4m^3 - q'(w^2 - 4wm + 6m^2)}{w+q'} \Rightarrow$$

$$a'w + a'q' = 4m^3 w + w(w^2 - 4wm + 6m^2)q' \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a'w = 4m^3 w \\ a'q' = w(w^2 - 4wm + 6m^2)q' \end{cases} = \begin{cases} a' = 4m^3 \\ a' = w(w^2 - 4wm + 6m^2) \end{cases} \Rightarrow 4m^3 = w^3 - 4w^2 m + 6wm^2 \Rightarrow$$

$$0 = w^3 - 4w^2 m + 6wm^2 - 4m^3 \Rightarrow w \cdot 0 = w^4 - 4w^3 m + 6w^2 m^2 - 4wm^3 + m^4 - m^4 \Rightarrow$$

$$0 = (w-m)^4 - m^4 = n^4 - m^4 = 0$$

Как видим при любом p решение отсутствует, а, следовательно, нужно искать выполнение условия (5.3) только при $q = 1$, т.е. $q' = w_1 \cdot m_1 \cdot q = w_1 \cdot m_1$.

Таким образом, решение уравнения (1) должно иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= m + m_1 w_1 \\ y &= w + m_1 w_1 \\ z &= (w+m) + m_1 w_1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Будем искать решение аналогично решению для $p = 2$. Левую часть уравнения (1.2) дополним до $(x-m)^p$

$$x^p = x^p + \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}(-m)^i - \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}(-m)^i = (x-m)^p - \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}(-m)^i$$

Тогда уравнение (1.2) можно написать так

$$\begin{aligned} (x-m)^p &= \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}((n+m)^i - n^i) + \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}(-m)^i = \sum_{i=1}^{p} C_p^i x^{p-i}((n+m)^i - n^i + (-m)^i) = \\ &= \sum_{i=2}^{p} C_p^i x^{p-i}((n+m)^i - n^i + (-m)^i) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Используя формулу сокращенного умножения многочленов, получим

$$(n+m)^i - n^i + (-m)^i = (n+m)^i - (n^i - (-1)^i m^i) = (n+m)^i - (n+m)\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j n^{i-1-j} m^j =$$

$$= (n+m)\left(\sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j n^{i-1-j} m^j - \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j n^{i-1-j} m^j\right) = w\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^j =$$

$$= \left| npu \quad j=0 \Rightarrow C_{i-1}^0 - (-1)^0 = 0\right| = w\cdot m\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^{j-1}$$

Тогда x из (5.7) будет таким

$$x = m + \sqrt[p]{\sum_{i=2}^{p}\left(C_p^i x^{p-i} w\cdot m\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^{j-1}\right)} =$$

$$m + \sqrt[p]{w\cdot m\cdot\sum_{i=2}^{p}\left(C_p^i x^{p-i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^{j-1}\right)} =$$

$$m + \sqrt[p]{wm}\cdot\left[\sum_{i=2}^{p-1}\left(C_p^i x^{p-i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{p-1}\left(C_{p-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{p-1-j} m^{j-1}\right]^{\frac{1}{p}} = \qquad (5.8)$$

$$m + \sqrt[p]{wm}\cdot\left[\sum_{i=2}^{p-1}\left(C_p^i x^{p-i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(C_{i-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{i-1-j} m^{j-1}\right) + \sum_{j=2}^{p-1}\left(C_{p-1}^j - (-1)^j\right)\cdot n^{p-1-j} m^{j-1} + p\cdot n^{p-2}\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$m + \sqrt[p]{wm}\cdot\sqrt[p]{m_1\cdot\Phi(x',m',n) + p\cdot n^{p-2}}$$

Проведя аналогичные выкладки для y, получим

$$y = w + \sqrt[p]{wm}\cdot\left[\sum_{i=2}^{p-1}\left(C_p^i y^{p-i}(-1)^i\sum_{j=0}^{i-2}\left(1+(-1)^{i+j}C_{i-1}^j\right)w^{i-2-j}n^j\right) + (-1)^p\sum_{j=0}^{p-3}\left(1+(-1)^{p+j}C_{p-1}^j\right)w^{p-2-j}n^{j-1}\right.$$

$$\left. + (-1)^p\, p\cdot n^{p-2}\right]^{\frac{1}{p}} = w + \sqrt[p]{wm}\cdot\sqrt[p]{w_1\cdot F(y',w',n) + (-1)^p\, p\cdot n^{p-2}} \qquad (5.9)$$

Проверим наличие решений при различных сочетаниях m_1 и w_1.

	$w_1 = \sqrt[p]{w}$	$w_1 = \sqrt[p]{pw}, w_1 = p$	$w_1 = w = 1$	$w_1 = w = 2$	$w = p = 4$ $w_1 = 2$
$m_1 = \sqrt[p]{m}$	1-1 нет решения	2-1 нет решения	3-1 нет решения	4-1 нет решения	5-1 нет решения
$m_1 = \sqrt[p]{pm}, m_1 = p$	1-2 нет решения	2-2 нет решения	3-2 нет решения	4-2 нет решения	5-2 нет решения
$m_1 = m = 1$	1-3 нет решения	2-3 нет решения	3-3 нет решения	4-3 нет решения	5-3 нет решения
$m_1 = m = 2$	1-4 нет решения	2-4 нет решения	3-4 нет решения	4-4 нет решения	5-4 нет решения
$m = p = 4$ $m_1 = 2$	1-5 нет решения	2-5 нет решения	3-5 нет решения	4-5 нет решения	5-5 нет решения

[1-1] Из (5.8) видно, что

$$x = m + \sqrt[p]{mw}\cdot\sqrt[p]{m_1\Phi(x',m',n) + pn^{p-2}} = m + m_1\cdot w_1\cdot q$$

Но нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[1-2] Из (5.8) получим

$$x = m + \sqrt[p]{mw}\cdot\sqrt[p]{m_1\Phi(x',m',n) + pn^{p-2}} = m + \sqrt[p]{pm\cdot w}\cdot\sqrt[p]{\Phi(x',m',n) + n^{p-2}} = m + m_1\cdot w_1\cdot q$$

Видно, что $q > 1$, но уравнение (1) может иметь решение только при $q = 1$, а значит решения (1) в данном случае нет.

[1-3] Из (5.8) видно, что

$$x = 1 + \sqrt[p]{w} \cdot \sqrt[p]{\Phi(x,n) + pn^{p-2}} = 1 + w_1 \cdot q$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[1-4] Согласно 4.3 при $m = 2$ решение таково $x = m^s \cdot x'$, где $s > 1$. Просуммируем все члены (кроме первого) с возрастанием степени при m в (5.8). Учтём, что n и m взаимно просты, а значит n нечётное. Тогда получим

$$x = m + \sqrt[p]{wm \cdot \left(C_p^2 x^{p-2}\left(C_1^1 - (-1)\right) + m^t\right)} = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m \cdot \left((p-1)px^{p-2} + m^t\right)} =$$
$$m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m \cdot \left((p-1) \cdot p'm^d \cdot \left(m^s x'\right)^{p-2} + m^t\right)}$$

- Пусть $t = d + (p\text{-}2)s$, тогда под радикалом будет так

$$x = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+1}\left((p-1)p'(x')^{p-2} + 1\right)} = \left|(p-1)p'(x')^{p-2} + 1 = 2X\right| = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+1} \cdot 2X} =$$
$$m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+2} X} = m + m_1 w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+2-p} X} = m + m_1 w_{1m} \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)\cdot(s-1)} X} = m + m_1 \cdot w_1 \cdot q$$

Как видим при минимальном значении $s = 2$, будет выполняться $q > 1$, более того оно [q] не взаимно просто с m, а значит в данном случае решение (1) отсутствует.

- Пусть $t > d + (p\text{-}2)s$, тогда под радикалом будет так

$$x = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m \cdot \left((p-1) \cdot p'm^d \cdot \left(m^s x'\right)^{p-2} + m^t\right)} = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+1} \cdot \left((p-1)p'(x')^{p-2} + m^{t-d-(p-2)s}\right)} =$$
$$m + m_1 w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+1-p} \cdot \left((p-1)p'(x')^{p-2} + m^{t-d-(p-2)s}\right)}$$

Уже при минимальном значении $s = 2$, получим

$$x = m + m_1 w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+(p-2)s+1-p} \cdot \left((p-1)p'(x')^{p-2} + m^{t-d-(p-2)s}\right)} = m + m_1 w_1 \cdot \sqrt[p]{m^{d+p-3} X} = m + m_1 w_1 \cdot q$$

Как видим при минимальном d = 1 и $p > 2$, будет выполняться $q > 1$, более того оно [q] не взаимно просто с m, а значит в данном случае решение (1) отсутствует.

- Если у нас $d + (p\text{-}2)s > t = p - 1$, то мы получим

$$x = m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m \cdot \left((p-1) \cdot p'm^d \cdot \left(m^s x'\right)^{p-2} + m^t\right)} =$$
$$m + w_1 \cdot \sqrt[p]{m \cdot \left((p-1) \cdot p' \cdot m^{d+(p-2)s} \cdot (x')^{p-2} + m^{p-1}\right)} =$$
$$m + w_1 m \cdot \sqrt[p]{(p-1) \cdot p' \cdot m^{1+d+(p-2)s-p} \cdot (x')^{p-2} + 1} = m + m \cdot w_1 q$$

Как видим член с радикалом всегда будет больше 1 (при $s > 1$) и значит решение уравнения (1), в данном случае тоже отсутствует.

[1-5] Из (5.8) видно, что

$$x = m + \sqrt[4]{mw\left(12x^2 + 12xn + 2m^2 + 2nm + 4n^2\right)} = m + w_1\sqrt[4]{4m\left(3x^2 + 3xn + 2m + 2n + n^2\right)} =$$
$$= m + w_1\sqrt[4]{16\left(3x^2 + 3xn + 2m + 2n + n^2\right)} = m + w_1 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 3xn + 2m + 2n + n^2} = m + w_1 \cdot m_1 \cdot q \Rightarrow$$
$$q = \sqrt[4]{3x^2 + 3xn + 2m + 2n + n^2}$$

Как видим член с радикалом всегда будет больше 1 и значит решение уравнения (1), в данном случае тоже отсутствует.

[2-1] Из (5.9) получим

$$y = w + \sqrt[p]{mw} \cdot \sqrt[p]{w_1 F(y', w', n) + (-1)^p p \cdot n^{p-2}} = w + \sqrt[p]{m \cdot pw} \cdot \sqrt[p]{F(y', w', n) + (-1)^p n^{p-2}} = w + m_1 w_1 q$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[2-2] Как мы ранее показали m и n взаимно просты, а значит, взаимно просты m и w, но в нашем случае $m = w$, что противоречит взаимной простоте. Следовательно, решение уравнение (1) отсутствует.

[2-3] Если $m = 1$ и $w = p^{p-1}$, то из (5.9) получим

$$y = w + \sqrt[p]{w} \cdot \sqrt[p]{w_1 F(y', w', n) + (-1)^p p \cdot n^{p-2}} = w + w_1 q$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[2-4] Т.к. $w = p^{p-1}$ и $m \in p$, то из этого следует, что $m \in p \in w$, но нами установлено, что m и w взаимно просты, а значит для данного случая решения уравнения (1) нет.

[2-5] Т.к. $w = p^{p-1}$ и $m = p$, то из этого следует, что $m = p \in w$, но нами установлено, что m и w взаимно просты, а значит для данного случая решения уравнения (1) нет.

[3-1] Из (5.8) видно, что

$$x = m + \sqrt[p]{m} \cdot \sqrt[p]{m_1 \Phi(x', m', n) + pn^{p-2}} = m + m_1 \cdot q$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[3-2] Если $w = 1$ и $m = p^{p-1}$, то это тогда из $w = m + n = 1$ последует, что $n = 1 - p^{p-1}$. Т.к. мы ищем решения для $p > 2$, то значит $n < 0$. Такое значение n противоречит условию $n, m \in \mathbf{N}$, а значит решения уравнения (1) при таких значениях m и w нет.

[3-3] Если $m = 1$ и $w = 1$ то, следовательно, $n = 0$. Доказательство отсутствия решения при $0 = n < m$ приведено в п. 5.4.2

[3-4] Если $w = 1$ и $m = 2$, то это тогда из $w = m + n = 1$ последует, что $n = -1$. Такое значение n противоречит условию $n, m \in \mathbf{N}$, а значит решения уравнения (1) при таких значениях m и w нет.

[3-5] Если $w = 1$ и $m = 4$, то это тогда из $w = m + n = 1$ последует, что $n = -3$. Такое значение n противоречит условию $n, m \in \mathbf{N}$, а значит решения уравнения (1) при таких значениях m и w нет.

[4-1] и [4-2] В данном случае возможны три варианта значений n и m для $2 = w = n + m$.
Вариант 1 : $n = 1$; $m = 1$
Вариант 2: $n = 2$; $m = 0$
Вариант 3: $n = 0$; $m = 2$
все эти варианты противоречат условию п. 5.4.5 $1 < n$, $1 < m$, а значит решение уравнения (1) отсутствует.

[4-3] Если $m = 1$ и $w = 2$ то, следовательно, $n = 1$. Доказательство отсутствия решения при $m = n = 1$ приведено в п. 5.4.4

[4-4] Как мы ранее показали m и n взаимно просты, а значит, взаимно просты m и w, но в нашем случае $m = w$, что противоречит взаимной простоте. Следовательно, решение уравнения (1) отсутствует.

[4-5] Если $w = 2$ и $m = 4$, то это тогда из $w = m + n = 2$ последует, что $n = -2$. Такое значение n противоречит условию $n, m \in \mathbf{N}$, а значит решения уравнения (1) при таких значениях m и w нет.

[5-1] Так как $w = 4^3$ из (5.9) получим

$$y = w + \sqrt[4]{mw \cdot \left(12y^2 - 12yn + 2w^2 - 2wn + 4n^3\right)} = w + \sqrt[4]{m \cdot 16 \cdot \left(3y^2 - 3yn + 2w4^2 - 2n4^2 + n^3\right)} =$$
$$= w + m_1 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{3y^2 - 3yn + 2w4^2 - 2n4^2 + n^3} = w + m_1 w_1 q \Rightarrow q = \sqrt[4]{3y^2 - 3yn + 2w4^2 - 2n4^2 + n^3}$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[5-2] Т.к. $m = 4^3$ и $w = 4$, то из этого следует, что $w = 4 \in m$, но нами установлено, что m и w взаимно просты, а значит для данного случая решения уравнения (1) нет.

[5-3] Если $m = 1$ и $w = 4$, то из (5.9) получим

$$y = w + \sqrt[4]{w \cdot \left(12y^2 - 12yn + 2w^2 - 2wn + 4n^3\right)} = w + \sqrt[4]{16 \cdot \left(3y^2 - 3yn + 2w - 2n + n^3\right)} =$$
$$= w + 2 \cdot \sqrt[4]{3y^2 - 3yn + 2w - 2n + n^3} = w + 2q \Rightarrow q = \sqrt[4]{3y^2 - 3yn + 2w - 2n + n^3}$$

Нами установлено, что решение уравнения (1) можно искать только при $q = 1$, а в данном варианте $q > 1$. Из этого противоречия следует, что при таких значениях m_1 и w_1 решения уравнения (1) нет.

[5-4] Т.к. $m = 2$ и $w = 4$, то из этого следует, что $m \in w$, но нами установлено, что m и w взаимно просты, а значит для данного случая решения уравнения (1) нет.

[5-5] Как мы ранее показали m и n взаимно просты, а значит, взаимно просты m и w, но в нашем случае $m = w$, что противоречит взаимной простоте. Следовательно, решение уравнения (1) отсутствует.

Как видим при любых значениях m_1 и w_1 для $p > 2$ для уравнения $x^p + y^p = z^p$ решения отсутствуют.

6 Вывод

Анализ разрешимости показал, что для уравнения $x^p + y^p = z^p$ есть решения только при $p = 1$ и $p = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике, 1954. 412 с.