А.Парфенов

# Ещё раз о доказательстве Гёделя

Цитирование важных для понимания моментов логики построения доказательства «Теоремы Геделя о неполноте» по-прежнему представлено по книге:
Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя. Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.), далее по тексту именуемой «Первоисточник».
Цитаты выделены синим цветом.

*Далее собственно моя попытка еще раз изложить взгляд на данную тему в несколько ином ракурсе.*
*Начнем с цитаты со стр. 97-98 :*
«Гёдель далее показал, что некоторый частный случай этой формулы *(имеется в виду частный случай формулы« ∀x ~ Dem(x, z)»)* является формально недоказуемым. Чтобы получить формулу, мы будем исходить из следующей формулы:
∀ *x* ~ Dem(*x*, sub(*y*, 13, *y*)) (1)
Эта формула, принадлежащая формальному арифметическому исчислению, представляет некоторое метаматематическое высказывание. Какое же именно? Читатель должен помнить, что выражение «sub(*y*, 13, *y*)» обозначает некоторое число, которое есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер *y*, подстановкой вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13, (т. е. переменной *y*) цифры, обозначающей число *y*. Отсюда видно, что формула (1) представляет метаматематическое высказывание: «формула, имеющая в качестве гёделевского номера число *sub*(*y*, 13, *y*), недоказуема».
Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число *n*. Подставим в (1) вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо переменной «*y*»), цифру, обозначающую это число *n*. В результате подстановки мы получим некоторую формулу, которую назовем (в честь Гёделя) «*G*»:
∀ *x* ~ Dem(*x*, sub(*n*, 13, *n*)). (*G*)
Формула G и есть тот частный случай формулы (1), который мы хотели построить.» (1)
*И еще одной цитаты со стр.93-94.*
«Заметим, наконец, что выражение «sub(*y*, 13, *y*)» не является *формулой* нашей арифметической системы в том смысле, в каком, например, являются формулами выражения «∃ *x* (*x* = *sy*)» или «Dem(*x*, *z*)», и вот почему. Выражение «0 = 0» мы называем формулой; такая запись *утверждает* наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение. Аналогично, когда вместо переменных, входящих в выражение «Dem(*x*, *z*)», подставляются некоторые цифры, то получающееся выражение оказывается записью некоторого утверждения (о том, что два числа находятся в некотором отношении), о котором опять-таки имеет смысл ставить вопрос, истинно оно или ложно. То же самое можно сказать и о выражении «∃ *x* (*x* = *sy*).»» (1) (стр. 93-94).

*Обратим наше внимание на то, что Гёдель утверждает, что: запись/выражение*

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$ (1)

*а) является не просто записью, а ФОРМУЛОЙ, принадлежащей арифметическому исчислению; т.е. записью, утверждающей некое отношение (между числами, или не только?), в отношении которого имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение;*
*б) имеет некоторый Гёделевский номер, который можно фактически вычислить.*
*При этом Гёдель номер «формулы (1)» ни где явно не называет.*
*Что ж, позволим себе усомниться в наличии у записи - «формулы (1)» именно тех свойств, которые поименованы в пунктах (а) и (б), и продолжим наше рассмотрение вопроса, с целью понять, а так ли это?*
*Но вначале маленькое «лирическое» отступление о термине «ФОРМУЛА». Следует осознать, что в системе исчисления Гёделя под ним понимается нечто совершенно иное, чем системе исчисления, изложенной в разделе «Один пример абсолютного доказательства непротиворечивости» стр. 49-64. В том исчислении то, какая комбинация (последовательность) символов базового алфавита, является формулой исчисления, а какая не является, определено строго-формально, и не требуют ее (т.е. комбинации символов) «семантического декодирования».*
«Правила образования указывают, какие именно комбинации элементарных символов алфавита мы будем считать формулами нашего исчисления. Прежде всего формулой, по определению, является каждая пропозициональная переменная. Далее, если «S» обозначает некоторую формулу, то ее «формальное отрицание» «$\sim (S)$» также есть формула. Аналогично, если «$S_1$» и «$S_2$» суть обозначения некоторых формул, то выражения «$(S_1) \vee (S_2)$», «$(S_1) \supset (S_2)$» и «$(S_1)\cdot(S_2)$» также суть формулы.
Примеры формул:
«$p$», «$\sim p$», «$(p) \supset (q)$», «$((q) \vee (r))\ ) \supset p)$».
Однако выражения «$(p)(\sim q)$» или «$((p)\supset(q))\vee$» формулами не являются, так как они не удовлетворяют приведенному здесь определению формулы.» (1) стр 51-52.
*В отличие от этого, в системе исчисления, предложенной Гёделем, не указаны формальные правила образования формул, как комбинаций (последовательностей) элементарных символов базового алфавита (далее по тексту - СБА). И напротив, имеется ссылка на необходимость декодирования семантики (смыслового содержания) комбинации элементарных СБА, для решения вопроса, относить ли данную комбинацию СБА к формулам, или же нет.*
« Выражение «0 = 0» мы называем формулой; такая запись *утверждает* наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение.» (1) стр. 93.
*И что очень важно, формализованные правила кодирования (причем, желательно, однозначного) смыслового содержания утверждения-формулы в виде комбинации элементарных символов алфавита, как и правила обратного действия - декодирования (причем, желательно, так же однозначного), в предложенной Гёделем системе исчисления также не определены.*
*Кроме того, с чисто формальной точки зрения, в этой системе не определены аксиомы и правила вывода.*

*А теперь продолжим поиск ответа на выше поставленный вопрос. И начнем с отношения «Dem».*

*Формула*

*Dem(x, z)*

*означает по введенному Гёделем определению: последовательность формул с Гёделевским номером (G№), равным x, является доказательством формулы с G№, равным z. Или равнозначно: Гёделевские номера (G№) x и z находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem. (Dem, таким образом является арифметическим соотношением **натуральных чисел**, являющихся к тому же **Гёделевскими номерами**(G№). И это важно.) Цитата, подтверждающая это, приведена ниже.*

«Мы будем записывать отношение между числами x и z посредством формулы « Dem(x, z) (От англ. demonstration (доказательство)) напоминающей нам самим своим обликом о том метаматематическом утверждении, которому она соответствует (а именно, об утверждении «Последовательность формул, имеющая гёделевский номер x, является доказательством формулы, имеющей гёделевский номер z » ).

Читатель должен твердо уяснить себе, что хотя « Dem(x, z) » кодирует некоторое метаматематическое утверждение, сама эта запись является формулой арифметического исчисления. Формула эта в более привычных обозначениях может быть записана в виде f(x, z) = 0, где буква f обозначает некоторый довольно-таки сложный комплекс арифметических операций над числами. Однако эта более привычная запись не «подсказывает» сразу своей метаматематической интерпретации, почему мы и предпочли запись, приведенную в тексте.» (1) (Стр. 88-89).

*На самом деле арифметическое отношение Dem чисел x и z (по крайней мере на уровне семантики) выразить не так уж и сложно. Звучать оно должно примерно так: «Последовательность формул, начинающаяся с аксиомы, построенная в соответствии с правилами вывода, и имеющая G№, равный x, является доказательством формулы с G№, равным z, тогда и только тогда, когда число x, при разложении его на простые сомножители, имеет максимальный по величине простой сомножитель (назовем его, к примеру, m), входящий в это разложение ровно z раз».*

*Или более строго, перечисляя все свойства (атрибуты) чисел x и z, отношение Dem(x, z) можно сформулировать ниже следующим образом:*

*Натуральное число x, являющееся G№ и при этом номером вывода=доказательства (т.е. номером последовательности последовательностей символов базового алфавита, каждая из которых является формулой, при этом первая формула является аксиомой, а каждая из последующих получается из пред идущих строго по правилам вывода), при разложении на простые сомножители имеет максимальный по величине сомножитель, входящий в это разложение ровно z раз; при этом натуральное число z так же является G№. Натуральное число является G№, если сопоставляемая ему в соответствии с процедурой, предложенной в Первоисточнике (стр. 78-87), строго определенная последовательность символов базового алфавита, кодирует семантически состоятельное утверждение о наличии некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение.*

*Присмотримся теперь внимательнее к записи (выражению) «sub(y, 13, y)».*

«через « sub(y, 13, y) » мы будем обозначать теперь арифметическую формулу, выражающую внутри арифметического исчисления метаматематическую характеристику: «гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер y, подстановкой вместо входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13, цифры, обозначающей число " y"».» *(1) (стр. 91)*.

*В соответствии со сказанным в приведенной цитате перед, нами классическое определение однозначного отображения из подмножества натуральных чисел – Гёделевских номеров в это же самое подмножество натуральных чисел – Гёделевских номеров (или в иных терминах: функция с одним аргументом, заданная на множестве чисел – Гёделевских номеров; понятно при этом, что меняя аргумент y на какой то иной аргумент, например w, мы можем задать иную функцию, и таких функций может быть сколь угодно много). Т.е. sub(y, 13, y) мы можем с полным правом воспринимать как функцию f(y) (f(y)=sub(y, 13, y)). И sub(y, 13, y) это вовсе не число (сравните:* «число *sub(y,* 13, *y)*» (1) (стр. 93)*), а именно функция (отношение, отображение).*

*Перед тем как продолжить, пара слов о соотношении кванторов всеобщности ∀ и существования Ǝ.*

*Формула ∀x ~ (B(x)) кодирует утверждение: «Для всех x не верно утверждение B(x)».*

*Формула ~ Ǝx (B(x)) кодирует утверждение: «Не существует x, для которых верно утверждение B(x)».*

*Эти два утверждения (с поправкой на закон «Исключенного третьего») являются, очевидно, почти равносильными.*

*Рассмотрим далее запись:*

*∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))*

*именуемую в доказательстве «формулой (1)», и почти равносильную ей запись:*

*~ Ǝ x Dem(x, sub(y, 13, y)).*

*Первая из них кодирует утверждение: «Для всех чисел x – Гёделевских номеров, являющихся номерами выводов=доказательств, не верно, что число x, при разложении его на простые сомножители, имеет максимальный по величине простой сомножитель, входящий в это разложение ровно ….????sub(y, 13, y) раз, … или f(y) раз».*

*Вторая из них кодирует утверждение: «Не существует, являющегося Гёделевским номером, и при этом номером вывода=доказательства, числа x, такого, что при разложении этого числи на простые сомножители, максимальный по величине простой сомножитель, входящий в это разложение, входит в него ровно ….????sub(y, 13, y) раз, … или f(y) раз».*

*(В тексте Первоисточника это опущено, но из контекста следует четко понимать, что здесь числами x являются не любые натуральные числа, а только G№, причем не все, а только те, которые сопоставлены выводам=доказательствам (т.е. последовательностям последовательностей символов базового алфавита, каждая из которых является формулой, при этом первая формула является аксиомой, а каждая из последующих формул получается из пред идущих строго по правилам вывода)).*

*Надеюсь, подумав вы спросите меня: « Сколько,… сколько раз должен входить максимальный по величине сомножитель в разложение числа x на простые сомножители???»*

*И я снова отвечу,- «f(y) раз». И продолжу,- «поскольку f(y)=sub(y, 13, y) в данный момент (до подстановки значения аргумента y) не задает некоего определенного натурального числа, являющегося Гёделевским номером, то утверждение, кодируемое «формулой (1)»,*

*не искажая смысла, можно продолжит, и в совокупности изложить ниже следующим образом:*
*«Для всех чисел x – Гёделевских номеров, являющихся номерами выводов=доказательств, не верно, что число x, при разложении его на простые сомножители, имеет максимальный по величине простой сомножитель, входящий в это разложение ровно ….????sub(y, 13, y) раз, … или f(y) раз,* ***т.е. неопределенное число раз.*** *»»*

*Вы мне возразите: «Это бред. Об истинности или ложности такого высказывания говорить бессмысленно!»*
*И вот тут я буду с Вами полностью солидарен. Да, и запись ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)),и запись ~ ∃x Dem(x, sub(y, 13, y)) формулами не являются, в том смысле, что говорить об истинности или ложности утверждений, кодируемых ими, смысла не имеет.* (Вообще то, разговор о не формализованном определении «имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение» (1) (стр.93) не такой простой, как на первый взгляд представляется, и его, наверное, следует провести отдельно и в рамках уже другого текста. Наше же принципиальное расхождение с Первоисточником в ответе на вопрос: «Можно ли считать, что запись ∀ x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)) кодирует утверждение о числах, в отношении которого имеет смысл ставить вопрос,- «Истинно ли оно?»», можно считать наглядным подтверждением того, что вопрос действительно не так прост.)
*Следующим вопросом, на который мы обратим наше внимание, будет вопрос: «А имеет ли вообще запись ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)), или почти равносильная ей запись ~ ∃x Dem(x, sub(y, 13, y)) Гёделевский номер?»*
*Еще раз возвратимся к цитате со стр. 94 :*
«Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить.» (1)
*Данное утверждение представляется весьма некорректным. И вот почему.*
*Очевидно, что любая последовательность элементарных символов системы алфавита, приведенных на стр. 79-80 Первоисточника, как и последовательность последовательностей символов, причем даже «семантически ничтожная» = «семантически не состоятельная», будет иметь номер, вычисляемый по процедуре, изложенной на стр. 78-87 (1). (Давайте его (этот номер), для удобства, называть процедурным номером - P№.) Причем номер, вычисляемый однозначно. Кроме того, очевидно, что номер, вычисляемый по этой процедуре будут иметь только те утверждения, которые представимы (могут быть закодированы) в СБА. Вполне понятно при этом, что не всякая последовательность символов является «семантически состоятельной», т.е. кодирует «*запись*», которая «*утверждает наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение.» (1) (стр.93). *И, соответственно является ФОРМУЛОЙ. Т.е. не всякий P№ является G№, а только P№ той последовательности символов алфавита, которая кодирует ФОРМУЛУ.*
*Поэтому более корректным было бы утверждение: «запись (1) однозначным образом кодируется комбинацией элементарных символов алфавита, и, в силу этого, она имеет некоторый процедурный номер P№, который можно фактически вычислить». (Выше мы уже показали, что запись (1) ФОРМУЛОЙ не является, и в силу этого, соответствующий ей P№, если таковой вычислим, G№, вообще говоря, не является.)*

*И если хотя бы P№ запись (1) имеет, и его можно будет подставить в нее в качестве значения переменной* y.
*Соответственно наш вопрос трансформируется в равноценный ему: «Возможно ли запись* $\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$, *или почти равносильную ей запись* $\sim \exists x\, Dem(x, sub(y, 13, y))$ *представить исключительно в виде комбинации (последовательности) элементарных символов алфавита системы исчисления, приведенных на стр. 79-80 ? (Что в Первоисточнике, вообще то, произведено не было.)*
*Начнем опять с достаточно пространной цитаты, по существу полностью исчерпывающей логические заключения на эту тему, содержащиеся в Первоисточнике:*
«Теперь уже полная «арифметизация» нашего формального исчисления не представит никакого труда. Такая «арифметизация» попросту сводится к установлению некоторого взаимно-однозначного соответствия между выражениями, входящими в исчисление, и некоторым подмножеством натурального ряда.
Если нам дано какое-нибудь выражение, мы без труда напишем его гёделевский номер. Это, однако, лишь полдела. Важно то, что когда нам дано какое-либо натуральное число, то мы можем установить, является ли это число гёделевским номером, а если да — то можем точно «восстановить» обозначаемое этим номером выражение. Если данное число не превосходит 10, то это, как мы знаем, просто номер некоторой константы. Если же данное число больше 10, то его можно разложить, причем единственным образом (в этом состоит так называемая основная теорема арифметики), на простые сомножители. Если оно оказалось простым, квадратом простого или кубом простого числа, то это — гёделевский номер переменной.
Если данное число оказалось произведением степеней первых последовательных простых чисел, то оно может (хотя, конечно, и не обязано) быть гёделевским номером формулы или последовательности формулы.
И в таком случае выражение, которому соответствует данный номер, может быть точно определено.
Следуя намеченной программе, мы можем для любого данного числа совершенно единообразным методом («как машина») проверить, является ли оно гёделевским номером, а если да — то какого выражения.» (1) стр. 84-85 .
*Прочитав внимательно этот текст, мы с удивлением обнаружим, что никакого обоснования возможности представления «формулы (1)»:*
$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$
***исключительно*** *в виде комбинации (последовательности) элементарных символов алфавита он не содержит. Что ж, попробуем сами ответить на этот вопрос.*
*Как мы уже упоминали, отношение* Dem (x, z),- *это арифметическое отношение (равенство) между неким числом, получаемым при разложении числа* x *на простые сомножители, и числом* z, *и замена* ***числа*** z *на* ***функцию*** sub(y, 13, y) *в этом отношении семантически, мягко говоря, не корректна. Но сейчас мы абстрагируемся от этого обстоятельства, и сосредоточимся сугубо на возможности представления «формулы (1)» исключительно в виде комбинации (последовательности) элементарных символов алфавита.*
*Исходя из того, что возведение в степень можно представить через произведение, произведение,- через сложение, сложение,- через последовательное прибавление единицы, следует предполагать принципиальную возможность реализации алгоритмов*

*арифметических действий сложения (вычитания), умножения (деления), возведения в степень (извлечения корня) через алгоритм последовательного прибавления (вычитания) единицы. Это вселяет некий оптимизм в вопросе о возможности представления «формулы (1)» исключительно в виде комбинации (последовательности) элементарных символов алфавита.*
*Тоже касается и представления функции sub(y, 13, y): алгоритм сопоставления некоему P№ (числу), соответствующему комбинации элементарных символов алфавита, некоей последовательности символов алфавита, и соответственно ее P№ (числа), описан в ней достаточно конструктивно, что предполагает возможность представления этой процедуры в символах алфавита.*
*Но засада кроется в неожиданном месте. Отношение Dem и функции sub задаются не на всем множестве натуральных чисел, а только на множестве Геделевских номеров G№. Причем числами x являться могут не все G№, а только* ***сопоставленные выводам=доказательствам (т.е. последовательностям последовательностей символов базового алфавита, каждая из которых является формулой, при этом первая формула является аксиомой, а каждая из последующих получается из пред идущих строго по правилам вывода).*** *То есть перед тем как проверять, находятся ли два числа в отношении Dem, нам надо четко определить хотя бы область чисел x, на которых проверяется существование отношения Dem. А вот с этим проблема. И состоит она в том, что у нас отсутствует конструктивное определение того, что (т.е. какая комбинация элементарных символов алфавита) является формулой, а что ей не является. Вместо этого наличествует неконструктивная отсылка к семантическому содержанию записи, и наличию смысла говорить об истинности этого семантического содержания (если оно, т.е. семантическое содержание, все же обнаружится). Вполне понятно, что такую отсылку алгоритмизировать не получится, как не получится и представить ее исключительно в символах алфавита. (Следует напомнить так же об отсутствии формализованных правил вывода и аксиом. Данный факт так же не способствует алгоритмизации определения области чисел x, на которых проверяется отношение Dem.)*
*То же касается и функции sub. Перед тем как подставить в нее значение переменной y, мы должны четко убедиться, что это число является G№. И здесь у нас возникает та же самая проблема.*
*И наконец в качестве завершающих замечаний еще «два штриха к портрету» доказательства Гёделя.*
*Штрих первый.*
*Функция sub(y, 13, y) в том виде, как она определена в Первоисточнике, в реальности отнюдь не всегда является отображением из множества чисел G№ в множество чисел G№. Следует полагать, что существуют случаи, когда она числу – Гёделевскому номеру G№ ставит в соответствие натуральное число, которое G№ не является. Для примера рассмотрим формулу:*
*Ǝ y (y= s x)*

*представляющую собой несколько видоизмененную формулу со стр. 80 Первоисточника, которую «можно прочесть» (вообще то говоря, здесь должно стоять не «можно прочесть», а «следует читать») как «существует такое натуральное число y, что y непосредственно следует за натуральным числом x» и которая выражает то* *обстоятельство, что для каждого натурального числа есть непосредственно следующее за ним натуральное число. Утверждение это «семантически состоятельно», т.е. формула, при этом истинная, имеющая Гёделевский номер, равный*

*Ǝ y ( y = s x )*

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

*4 13 8 13 5 7 11 9*

$2^4 * 3^{13} * 5^8 * 7^{13} * 11^5 * 13^7 * 17^{11} * 19^9$

*Для определенности дальнейших рассуждений обозначим это достаточно большое число как G№1 ( G№1=*$2^4 * 3^{13} * 5^8 * 7^{13} * 11^5 * 13^7 * 17^{11} * 19^9$*).*

*Рассмотрим комбинацию элементарных символов алфавита, имеющую процедурный номер, равный величине, задаваемой функцией f(y)= sub(y, 13, y), при y= G№1 ( т.е. номер, соответствующий sub(G№1, 13, G№1)). Вполне понятно, что это будет номер ниже следующей записи*
*Ǝ sss…s0 ( sss…s0 = s x )*
*где символ* <u>*s*</u> *присутствует в каждой из двух последовательностей ровно G№1.*
*Вполне понятно, что такая запись является семантически не состоятельной (если у Вас есть сомнения в этом, попробуйте сами изложить семантически состоятельную словесную формулировку, соответствующую этой записи, так, чтобы имело смысл ставить вопрос о ее истинности), и, следовательно, формулой не является. Это подтверждает наше предположение, что функция sub(y, 13, y) некоторым числам, являющимся G№, ставит в соответствие числа, являющиеся P№, но G№ не являющиеся. И, соответственно, последовательностям символов алфавита, являющимся формулами (семантически состоятельным), ставит в соответствие последовательности символов алфавита, формулами не являющиеся (семантически не состоятельные).*

<u>*Штрих второй*</u>*.*
*Еще раз обратимся к цитате на стр. 97-98:*
«Гёдель далее показал, что некоторый частный случай этой формулы является формально недоказуемым. Чтобы получить формулу, мы будем исходить из следующей формулы:

∀ *x* ~ Dem(*x*, sub(*y*, 13, *y*)) (1)

Эта формула, принадлежащая формальному арифметическому исчислению, представляет некоторое метаматематическое высказывание. Какое же именно? Читатель должен помнить, что выражение «sub(*y*, 13, *y*)» обозначает некоторое число, которое есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер *y,* подстановкой вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13, (т. е.

переменной *y*) цифры, обозначающей число *y.* Отсюда видно, что формула (1) представляет метаматематическое высказывание: «формула, имеющая в качестве гёделевского номера число *sub*(*y*, 13, *y*), недоказуема».

Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число *n*. Подставим в (1) вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо переменной «*y*»), цифру, обозначающую это число *n*. В результате подстановки мы получим некоторую формулу, которую назовем (в честь Гёделя) «*G*»:

$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$. (*G*)

Формула *G* и есть тот частный случай формулы (1), который мы хотели построить. Формула *G* принадлежит арифметическому исчислению и должна иметь некоторый гёделевский номер. Каков же этот номер? Нетрудно показать, что таким номером задается число sub(*n*, 13, *n*). В самом деле, вспомним, что sub(*n*, 13, *n*) есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер *n*, подстановкой вместо переменной «*y*» (имеющей гёделевский номер 13) цифры, обозначающей число *n.* Но ведь формула *G* как раз и получена из формулы, имеющей гёделевский номер *n* (т. е. из формулы (1)), подстановкой цифры для числа n вместо входящей в формулу переменной *y*. Таким образом, действительно sub(*n*, 13, *n*) есть гёделевский номер формулы *G.*

Однако формула *G* — *арифметическая формула,* которая представляет в арифметическом исчислении *математическое высказывание*

«формула „$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$“ недоказуема».

Можно, следовательно, сказать, что формула *G* утверждает свою собственную недоказуемость.»

*И попробуем доказать, что «*sub(*n*, 13, *n*)*» все же не «* есть гёделевский номер формулы *G*».

1. *В предложенной Геделем системе исчисления для числа n не предусмотрено никаких иных способов записи в СБА, кроме как*
   *sss…s0*
   *(где символ s входит в запись ровно n раз).*
2. *Число n, записанное в СБА, имеет номер (натуральное число), однозначно сопоставляемый ему в соответствии процедурой, изложенной на стр. 78-87 Первоисточника, вычисляемый по формуле:*
   $2^{«s»} * 3^{«s»} * 5^{«s»} \ldots *$ *(n+1 простое число)*$^{«0»}$
   *где* $^{«s»}$ *и* $^{«0»}$ *натуральные числа - номера символов s и 0 в нашей системе исчисления.*

*И этот номер всегда будет больше самого числа n.*

3. *Запись*
   $\forall x \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$
   *именуемая в Первоисточнике «G – формулой, G – утверждением», должна содержать в себе (в своем теле) запись числа sub(n, 13, n), представленную в СБА. А также, помимо нее, еще некоторые СБА. Тогда становится очевидным, что номер (натуральное число), сопоставляемый записи* $\forall x \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$, *представленной в СБА, в соответствии с процедурой, изложенной на стр. 78-87 Первоисточника, будет больше числа sub(n, 13, n).*
4. *Номер (натуральное число), сопоставляемый записи* $\forall x \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$ *(«G– утверждению») в соответствии с процедурой, изложенной на стр. 78-87 Первоисточника, ни при каких условиях не может быть равен числу sub(n, 13, n).*
5. *За четыре выше приведенных логических шага мы получаем заключение, принципиально противоречащее заключению, о том, что G№ «G-формулы»* $\forall x \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$ *равна величине sub(n, 13, n), полученному в Первоисточнике. Причиной, приводящей логическое построение доказательства «Теоремы о неполноте» к данному не верному (в нашем понимании) заключению является, следует полагать, использованное в Первоисточнике необоснованное предположение (допущение) существования у записи*
   $\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$
   *номера, вычисляемого в соответствии с процедурой, изложенной на стр. 78-87 Первоисточника, что скрыто и необоснованно предполагает возможность представления этой записи в СБА.*

***Вывод.***

*Подводя итог всего выше сказанного, можно констатировать, что при более пристальном и внимательном рассмотрении в логике построения доказательства «Теоремы о неполноте», представленной в Первоисточнике», выявляется ряд нестыковок и противоречий, делающих весьма схематичную процедуру доказательства невыполнимой. Самым главной «нестыковкой», наверное, следует считать то, что запись*

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

*в СБА не представима, а, следовательно, вычислимого по процедуре, представленной на стр. 80-83 (1) номера P№ не имеет, а, следовательно, и G№ не имеет. И, таким образом, все действия, описанные в первоисточнике со стр. 98, связанные с использованием этого номера, осуществлены быть не могут. В связи с этим, предложенная Гёделем процедура доказательства Малой и Большой теорем о неполноте является невыполнимой.*

***Небольшое послесловие.***

*Как мы видим, способом, предложенным Гёделем, G-формулу построить невозможно и «Теорема о неполноте» при помощи данного построения не может быть доказана. Но это не отрицает принципиальной возможности построения G-формулы неким иным способом. Зададимся вопросом: «Что будет, если кому-то такое построение все же* *удастся ?» Чтобы оценить последствия обратим наше внимание собственно на семантику G-высказываний Гёделя.*

*Завораживающие, почти магические манипуляции Гёделя с нумерацией утверждений и формированием G-высказываний через систему нумерации, на столько смещают центр внимания при изложении доказательства Малой и Большой теорем о неполноте, что оказывается что нужна почти вечность (по крайней мере для меня) чтобы осознать в общем то простую вещь: G-высказывание всего лишь высказывание, семантически тождественное утверждению «данное утверждение ложное» (парадоксу лжеца). А следовательно, построено по принципу самореферентности и грубо нарушает мои интуитивные представления о мета высказываниях ( «базовое высказывание, в отношении которого мы строим мета высказывания, должно существовать: а) до возникновения, формирования, формулирования любого из мета высказываний о нем, и б) независимо от любого из мета высказываний о нем»).*

*Соответственно, любое G-высказывание, - это высказывание, семантически и логически не связанное с остальными высказываниями в системе (оно говорит только о себе самом; истинность, как и ложность его никак не влияет на <u>установление статуса истинности = доказательстве</u> иных высказываний в рамках данной логической системы). Можно сказать – «любое G-высказывание семантически ничтожное». Обособление и удаление G-высказываний из логической системы, интуитивно, не должно обеднять или искажать информационное и семантическое содержание логической системы. Т.е., опять же интуитивно, мы имеем полное право «конвенционально» запретить, сделать невозможными, недопустимыми G-высказывания, сохраняя при этом семантическую полноту системы…*

*Кроме того, смущают рассуждения о «правдивости G-высказываний». Нам подспудно, не определяя термина «правдивость», пытаются «продать» на ряду с понятием «истинности как выводимости» некое иное понятие «правдивости», не совпадающее с ним, и, в тоже время, имеющее нечто общее. Такое действие является замаскированным покушением на **логический Закон фундировония**, и его всеобщность. Выстраивая формально-логическую систему мы пытаемся, в той или иной мере последовательно, полно и строго (= формализовано), отобразить нашу неформальную, только нам одним внутренне понятную, систему построения логических заключений. Если же мы допускаем параллельное существование несовпадающих понятий: «истинно» и «правдиво», мы негласно признаем ущербность, ограниченность выстраиваемый формально-логической системы, не вмещающей в себя наше не формализуемое, «трансцедентальное» представление о «правдивости» высказываний, которое оказывается недоступным формализации и включению (имплементации) в выстраиваемую систему.*

*При «конвенциональном» запрещении использования G-высказываний (если вдруг появился бы некий действительно работающий способ построения G-высказываний, отличный от предложенного Гёделем, и у нас действительно возникла возможность, отсутствующая на данный момент, их построить), мы получили бы формально-логическую систему, семантически столь же полную, как и исходная система, допускающая G-высказывания. Но при этом систему, в которой доказательство Гёделя становится вновь неработающим в виду отсутствия основного инструмента доказательства - G-высказываний…*

*И, вуаля, мы получаем старый вопрос на новый лад:*

*«Можно ли доказать непротиворечивость логической системы включающей арифметику (теорию чисел) и не содержащей G-высказываний (в силу подпадания их под «конвенцию» о запрете)) логическими средствами (в рамках) самой системы?*

*Или доказать, что это невозможно…?»*

Литература:

1. Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя : Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.