

Волны вероятности в классическом эксперименте.

Наблюдать квантовые интерференционные свойства у макроскопических объектов сложно, поскольку размер дифракционной решетки должен иметь такой же порядок, как длина волны де-Бройля. В статье показан простой способ экспериментального наблюдения и теоретического описания интерференционной картины в опыте с макроскопическими телами. Полученные результаты совпадают с решениями уравнения Шредингера для квантовых частиц и могут дополнять эти решения для макроскопических объектов.

1. Введение

Интерференционные эффекты играют важную роль в квантовой механике, а принцип суперпозиции является одним из базовых квантовых постулатов. Волновые функции де-Бройля не имеют физического смысла, но хорошо описывают поведение микрочастиц на квантовом уровне. Волновые свойства микрочастиц подтверждены многими экспериментами. Одним из самых известных экспериментов — это наблюдение интерференции у электронов, проходящих через экран с двумя щелями [1][2].

Поведение макроскопических частиц в двухщелевом эксперименте отличается от поведения электронов. Такое несоответствие приводит к тому, что у объектов с большой массой, волновыми свойствами, как правило, пренебрегают и пользуются понятием траектории тела. Считается, что тело, которое имеет траекторию, не может показывать интерференционных эффектов в эксперименте и наоборот [3]. Можно показать, что для макроскопических частиц, использование корпускулярного и волнового подхода, возможно одновременно, для одних и тех же физических тел.

Рассмотрим несколько мысленных экспериментов в которых футболист пинает мяч внутри некоторого помещения. В этом же помещении есть наблюдатель, который может поймать мяч в некоторый, точно заданный момент времени t_i . Во всех экспериментах будем считать известной начальную координату мяча $(0,0)$. Также будем считать известной абсолютную величину начальной скорости V_0 , с которой футболист может ударить по мячу. Для простоты будем считать, что у нас есть единственный

способ что-то узнать про координату и скорость мяча – это визуальное наблюдение.

2. Мысленные эксперименты

Эксперимент 1. Если в комнате есть освещение, то наблюдатель может измерить любую координату в произвольный момент времени (x_1, y_1) , затем вычислить направление скорости и траекторию мяча.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \\ \vec{V} &= V_0 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \\ \vec{r}(t) &= \vec{V}t = V_0 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} t \end{aligned} \quad (1)$$

В этом эксперименте можно максимально точно поставить ворота в нужное время в правильное место, чтобы вероятность поймать мяч была максимально высокой.

$$P(\vec{r}, t) = \begin{cases} 1 & \vec{r} = V_0 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} t \\ 0 & \vec{r} \neq V_0 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} t \end{cases} \quad (2)$$

Эксперимент 2. Если в комнате нет освещения, но известно точное время удара по мячу $t_0 = 0$. Наблюдатель никаким образом не может узнать начальное направление скорости, вычислить точную траекторию $\vec{r}(t)$ в этом

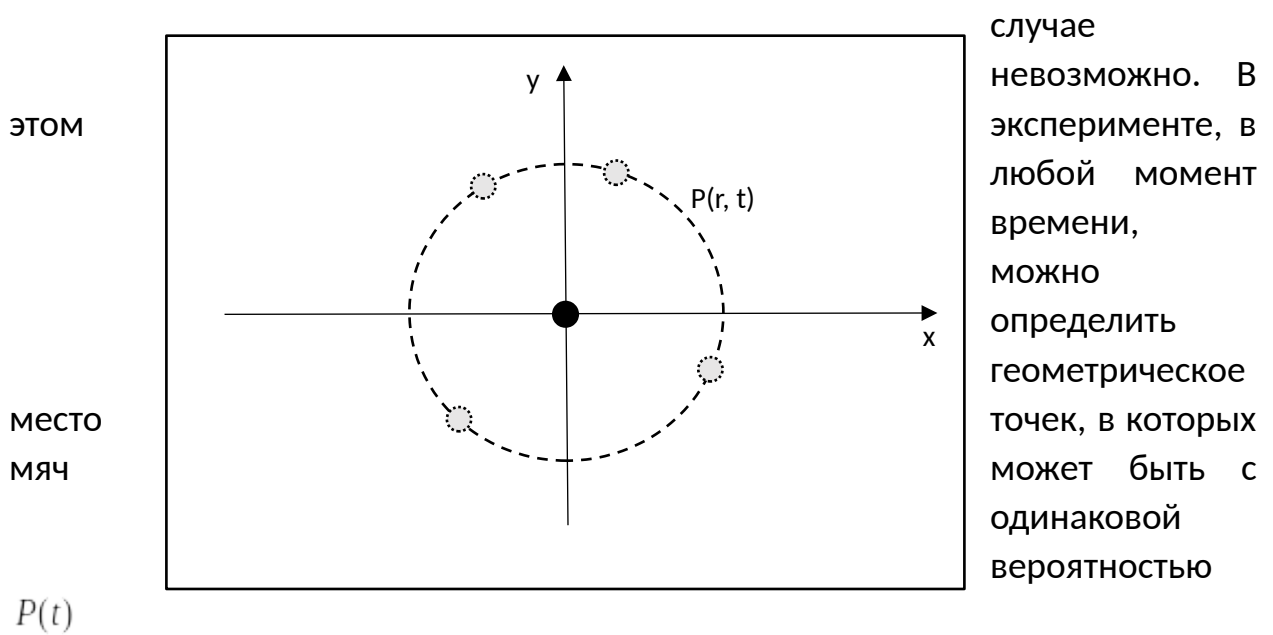


Рисунок 1

Это волна вероятности, но волна с единственным максимумом. Наблюдатель может вычислить в какой окрестности нужно установить ворота, но не может узнать конкретную точку в каждый момент времени, если не включать освещение. Использовать понятие траектории в этом эксперименте бессмысленно. Однако вероятность поймать мяч все еще остается высокой, эту вероятность можно посчитать.

$$\begin{aligned} |r(t)| &= V_0 t \\ P(r, t) &\sim \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

С увеличением времени, волну вероятности в малой окрестности можно будет считать плоской, тогда вероятность обнаружить тело в этой окрестности можно считать положительной вещественной константой, меньше единицы.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(r, t) = \begin{cases} P_0 = \text{const} & r = V_0 t \\ 0 & r \neq V_0 t \end{cases} = P_0 \int_0^{\infty} \delta(r - V_0 t) dr \quad (4)$$

Далее не будем везде подразумевать, что волна плоская и предел писать не будем.

Эксперимент 3. В комнате нет освещения, к мячу бегут футболисты, один за одним, с равным интервалом $\Delta t = \text{const}$ и пытаются по нему в темноте ударить. Ударяет только один, но кто именно – неизвестно. В этом случае у наблюдателя нет точного времени удара. От места удара расходится волна вероятности с многими максимумами. Максимумов будет столько, сколько футболистов участвуют в эксперименте. По аналогии можем записать формулу для вероятности:

$$\begin{aligned} |r_n| &= V_0 t + V_0 n \Delta t \quad n = 1, 2, 3... \\ P(r_n, t) &= \begin{cases} P_0 & r = V_0 t + V_0 n \Delta t \\ 0 & r \neq V_0 t + V_0 n \Delta t \end{cases} = P_0 \int_0^{\infty} \delta(r - V_0 t - V_0 n \Delta t) dr \end{aligned} \quad (5)$$

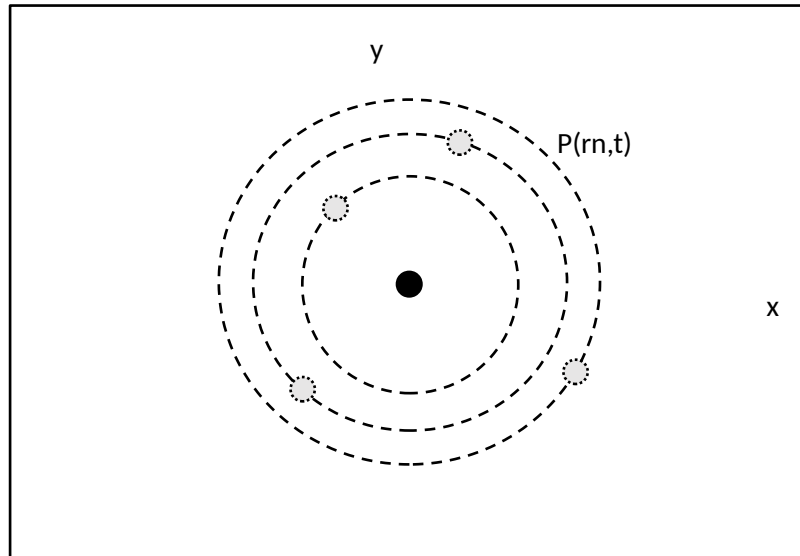


Рисунок 2

Перейдем в систему отсчета, в которой плоская волна неподвижна, тогда $V_0 t = 0$, вероятность нахождения частицы в точках $r_n = V_0 n \Delta t$ будет постоянной P_0 , как указано на рис. 3.

$P(r_n)$

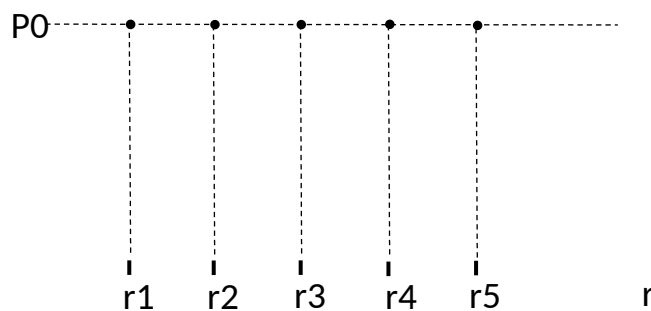
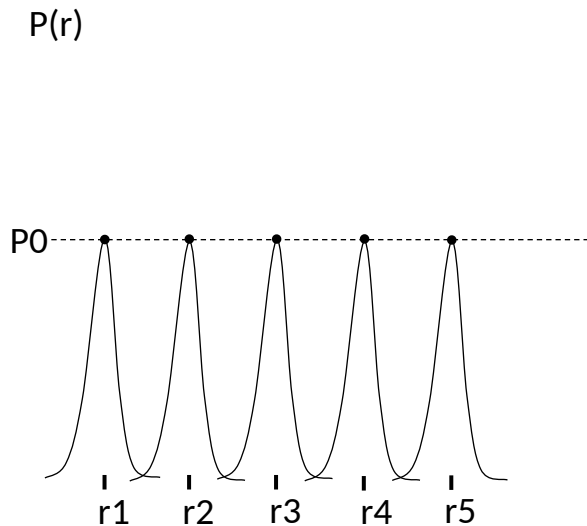


Рисунок 3

Представление функции вероятности в виде набора отдельных точек неудобно математически и лишено физического смысла, поскольку любой реальный эксперимент содержит ненулевые погрешности. Можно учесть, что

в неидеальном опыте, образующиеся максимумы должны быть размыты. Действительно, если считать, конечным время на взмах ноги, время на удар по мячу, время на разгон и отрыв мяча от ноги и т.п., то волну вероятности правильной описывать нормальным распределением:

$$P(r_n) = P_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r - V_0 n \Delta t}{\sigma} \right)^2} \quad (6)$$



В реальности можно подобрать условия эксперимента так, чтобы распределение (6) приближенно описывалось функцией косинуса. Для этого среднеквадратичное отклонение должно удовлетворять условию:

$$\sigma = \frac{V_0 \Delta t}{k \pi} \quad (7)$$

Рисунок 4

Где k – это коэффициент, зависящий от условий эксперимента. Чем больше величина k , тем меньше среднеквадратичное отклонение (7). Подставляя (7) в (6), получим:

$$\left(\frac{r - V_0 n \Delta t}{\sigma} \right)^2 = k^2 \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} - \pi n \right)^2$$

$$P(r, n) = P_0 e^{-\frac{k^2}{2} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} - \pi n \right)^2} \approx P_0 \left(1 - \frac{k^2}{2} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} - \pi n \right)^2 \right)$$

$$\cos^{k^2} x \approx \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^{k^2} \approx 1 - \frac{k^2}{2} x^2 \quad (8)$$

Таким образом, для волн вероятности можно использовать простую приближенную формулу:

$$P(r) = P_0 \cos^{k^2} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \quad (9)$$

Чтобы правая часть (9) была всегда положительной, коэффициент k^2 должен быть целым четным числом.

$$k^2 = 2s$$

$$P(r) = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right)$$

$$s = 1, 2, 3 \dots$$

(10)

$P(r)$

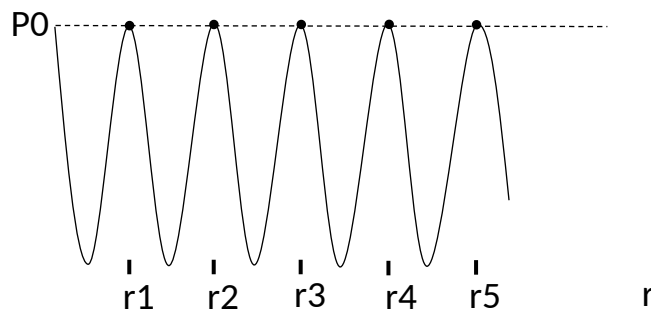


Рисунок 5

В третьем эксперименте все еще можно попытаться определить вероятность того, в каком месте в конкретное время будет мяч. Максимумы волны вероятности дадут геометрическое место точек, куда нужно поставить ворота, чтобы иметь хоть какой-то шанс на успех.

Эксперимент 4. Модифицируем третий эксперимент. Поставим на пути мяча непроницаемое препятствие с двумя щелями. Через щели мяч может пролетать, через препятствие – не может. Если мяч пролетает через щель, то его траектория меняется случайным образом. Наблюдатель, находящийся за щелями, может предсказать точки, где вероятность обнаружить мяч станет максимальной, а где эта вероятность будет минимальной. Волна вероятности будет накладываться сама на себя, давая картину, похожую на интерференционную картину световой волны.

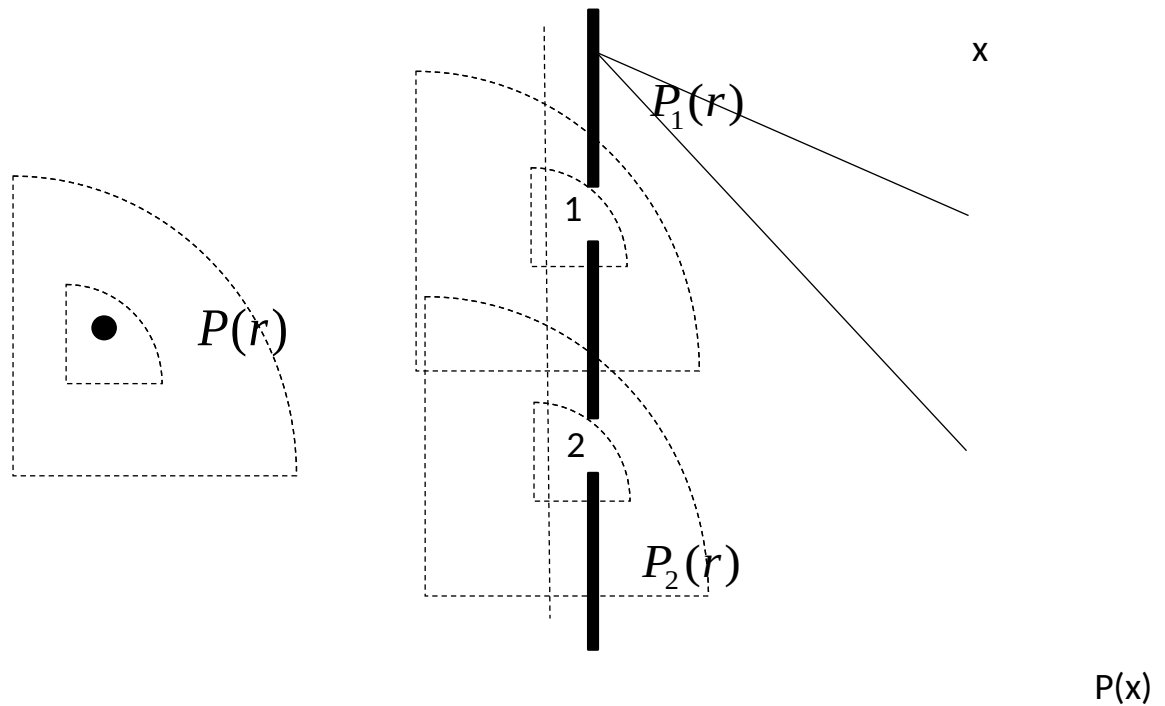


Рисунок 6

Найдем вероятность попадания мяча в точку x (рис.6). Плоская волна вероятности, проходя через щели 1 и 2, распадается на две одинаковые волны, потому что мяч, после прохождения щели, может продолжить движение в любую сторону с одинаковой вероятностью.

$$P_1(r) = P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right)$$

$$P_2(r) = P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right)$$
(11)

В произвольную точку x , волны вероятности могут прийти либо с одинаковой фазой, либо в противофазе. Полная вероятность нахождения мяча в точке x найдется как сумма:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$$
(12)

Если волны придут в точку x с одинаковой фазой, то средняя вероятность найдется по формуле:

$$P(x_{\max}) = P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) + P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} + 2\pi n \right) = 2P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right)$$

$$\langle P(x_{\max}) \rangle = P_0$$
(13)

Если волны придут в точку x с противоположными фазами, то в первом приближении получим следующую вероятность:

$$\begin{aligned}
P(x_{\min}) &= P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) + P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} + \frac{\pi n}{2} \right) \\
\cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) &= \frac{1}{2^s} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \right]^s \approx \frac{1}{2^s} \left[1 + s \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \right] \\
\sin^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) &= \frac{1}{2^s} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \right]^s \approx \frac{1}{2^s} \left[1 - s \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \right] \\
P(x_{\min}) &\approx \frac{1}{2^{s+1}} P_0
\end{aligned} \tag{14}$$

То есть при уменьшении среднеквадратичного отклонения, в эксперименте с двумя щелями, будет наблюдаться все более отчетливая интерференционная картина. Можно заметить, что есть минимальное значение s , при котором может наблюдаться интерференционная картина:

$$s_{\min} = 2 \tag{15}$$

3. Волновое уравнение

Пользуясь формулой (10), в первом приближении, можно получить волновое уравнение для вероятности.

$$\begin{aligned}
P(r) &= P_0 \cos^{2s} \left(\frac{\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \approx \frac{P_0}{2^s} + s \frac{P_0}{2^s} \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \\
P(r) - \frac{P_0}{2^s} &= s \frac{P_0}{2^s} \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \equiv \phi
\end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= - \frac{2\pi}{V_0 \Delta t} s \frac{P_0}{2^s} \sin \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= - \left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t} \right)^2 s \frac{P_0}{2^s} \cos \left(\frac{2\pi r}{V_0 \Delta t} \right) = - \left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t} \right)^2 \phi \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{2\pi}{V_0 \Delta t} \right)^2 \phi &= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Перейдем в (17) от скорости к кинетической энергии:

$$E_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2m \left(\frac{\pi}{\Delta t} \right)^2 \phi = 0 \tag{18}$$

Перейдем от кинетической энергии к полной и потенциальной:

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{(E - U) \Delta t^2} \phi = 0 \quad (19)$$

Можно заметить, что (19) полностью совпадает со стационарным уравнением Шредингера, если в эксперименте добиться равенства:

$$V_0 \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0} = \lambda_D \quad (20)$$

Где λ_D — это длина волны де-Бройля.

Действительно, объединим (19) и (20):

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{(E - U) \Delta t^2} \phi = 0 \\ \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0^2} = \frac{\pi\hbar}{E_k} = \frac{\pi\hbar}{(E - U)} \end{cases} \quad (21)$$

Отсюда:

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2 (E - U)^2}{(E - U) \pi^2 \hbar^2} \phi = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + (E - U) \phi = 0$$

(22)

Уравнение (22) совпадает с уравнением Шредингера, однако решением здесь будет не комплексная амплитуда, а вещественная функция ϕ , которая связана с вероятностью соотношением (16):

$$P(r) = \phi + \frac{P_0}{2^s}$$

$$s = 2, 3, 4, \dots \quad (23)$$

4. Случай прямоугольной потенциальной ямы

Рассмотрим решение уравнения (19) для эксперимента с макроскопическим телом в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{E \Delta t^2} \phi = 0 \quad (24)$$

Будем искать решение в виде экспоненты:

$$\phi = C_1 e^{i \frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r} + C_2 e^{-i \frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r} = a \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r + \varphi \right) \quad (25)$$

Граничные условия накладываем так, чтобы вероятность найти частицу на краях ямы была нулевой:

$$\begin{aligned} P(0) = \phi(0) + \frac{P_0}{2^s} = 0 &\Rightarrow \phi(0) = -\frac{P_0}{2^s} \\ P(l) = \phi(l) + \frac{P_0}{2^s} = 0 &\Rightarrow \phi(l) = -\frac{P_0}{2^s} \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляем (26) в (25):

$$\begin{cases} \phi(0) = a \cos(\varphi) = -\frac{P_0}{2^s} \\ \phi(l) = a \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l + \varphi \right) = -\frac{P_0}{2^s} \end{cases} \quad (27)$$

Полагая начальную фазу равной нулю, находим уровни энергии в потенциальной яме:

$$\begin{cases} a = -\frac{P_0}{2^s} \\ -\frac{P_0}{2^s} \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l \right) = -\frac{P_0}{2^s} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} l = 2\pi n \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{ml^2}{2n^2 \Delta t^2}} \quad (28)$$

Если подставить в (28) время из (20), то получим:

$$\begin{cases} E_n = \frac{ml^2}{2n^2 \Delta t^2} \\ \Delta t = \frac{2\pi\hbar}{mV_0^2} = \frac{\pi\hbar}{E_n} \end{cases}$$

$$E_n = \frac{ml^2 E_n^2}{2n^2 \pi^2 \hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{2n^2 \pi^2 \hbar^2}{ml^2} \quad (29)$$

Как видно, энергии (29) отличаются от уровней энергии квантовой частицы в потенциальной яме. Однако, если вместо (20), выбрать длину волны в два раза меньше:

$$V_0 \Delta t = \frac{\pi \hbar}{m V_0} = \frac{\lambda_D}{2} \quad (30)$$

то получим полное совпадение с классическим результатом, который получается при решении уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} E_n = \frac{m l^2}{2 n^2 \Delta t^2} \\ \Delta t = \frac{\pi \hbar}{m V_0^2} = \frac{\pi \hbar}{2 E_n} \end{cases}$$

$$E_n = \frac{m l^2 4 E_n^2}{2 n^2 \pi^2 \hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m l^2} \quad (31)$$

Найдем распределение вероятностей:

$$P(r) = \phi + \frac{P_0}{2^s} = a \cos \left(\frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{2m}{E}} r + \varphi \right) + \frac{P_0}{2^s}$$

$$P(r) = - \frac{P_0}{2^s} \cos \left(\frac{2\pi n}{l} r \right) + \frac{P_0}{2^s} = \frac{P_0}{2^s} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{l} r \right) \right) = \frac{P_0}{2^{s-1}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) \quad (32)$$

Полученный результат совпадает с решением стационарного уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Постоянную P_0 найдем из условия нормировки:

$$\int_0^l \frac{P_0}{2^{s-1}} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) dr = \frac{P_0}{2^s} \int_0^l \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{l} r \right) \right) dr = \frac{P_0}{2^s} l = 1$$

$$P_0 = \frac{2^s}{l} \quad (33)$$

Тогда окончательно для вероятности получаем:

$$P(r) = \frac{2}{l} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) \quad (34)$$

5. Заключение

Расчеты показывают, что при правильной постановке эксперимента, волновые свойства возможно наблюдать у макроскопических частиц. Распределение вероятности можно получить из решения стационарного уравнения Шредингера напрямую, не прибегая к комплексным амплитудам.

Литература:

1. Feynman, Richard P.; Robert B. Leighton; Matthew Sands. The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3 (неопр.). — Addison-Wesley, 1965. — С. 1.1—1.8. — ISBN 978-0201021189.
2. Donati, O; Missiroli, G F; Pozzi, G (1973). "An Experiment on Electron Interference". *American Journal of Physics*. 41 (5): 639–644. Bibcode:1973AmJPh..41..639D. doi:10.1119/1.1987321.
3. Harrison, David (2002). "Complementarity and the Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics". UPSCALE. Dept. of Physics, U. of Toronto. Retrieved 21 June 2008.