ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕОПРЕДЕЛЁННЫМИ ФАКТОРАМИ

И.В.Коннов

Казань, эл.почта: konn-igor@ya.ru

Для задач оптимизации с неопределёнными факторами предлагается новый подход, связанный со сведением исходной задачи к многокритериальной задаче оптимизации. Для решения предлагается комбинация метода последовательных уступок и линейной свертки критериев. Описано применение метода к простейшим экстремальным задачам на графах.

Ключевые слова: Задачи оптимизации, неопределённые факторы, многокритериальные задачи оптимизации, задача о кратчайшем связывающем дереве, задача о кратчайшем пути.

1 Постановка задачи

Для задач оптимизации с неопределёнными факторами разработано достаточно много подходов, связанных с той или иной интерпретацией неопределённых факторов. В частности, они могут считаться как случайными, имеющими заданное распределение, так и полностью неизвестными. С учётом этих свойств обычно выбирается принцип замены исходной задачи на полностью детерминированную задачу оптимизации. В настоящей работе предлагается новый подход к учету неопределённых факторов, связанный со сведением исходной задачи к многокритериальной задаче оптимизации.

Пусть дана задача оптимизации с неопределёнными факторами

$$\min_{x\in D} \to \mu(x,\alpha), \tag{1}$$

где D – допустимое множество, α – набор неопределенных величин, множество которых обозначим через $\mathbb{A}$. Для упрощения будем считать, что допустимое множество D задано в конечномерном пространстве E, при этом множество D не содержит неопределенных факторов, в отличие от целевой функции μ. Требуется указать принцип оптимальности для определения понятия решения и затем найти это решение с помощью подходящего метода. Предлагается определить две функции – максимального и минимального значения и таким образом получить задачу векторной оптимизации с двумя критериями.

Определяем

$$f_1(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{A}} \mu(x, \alpha)$$

и

$$f_2(x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} \mu(x, \alpha).$$

Переходим к задаче векторной оптимизации

$$\min_{x \in D} \to f(x),\ \ f(x) = (f_1(x), f_2(x)). \tag{2}$$

Эту задачу можно решить, опираясь на подходящий принцип оптимальности, используемый в задачах векторной оптимизации. Наиболее популярным является принцип оптимальности по Парето; см., например, [1]. В данном случае критерии достаточно близки по типу, но основным, очевидно, является здесь первый (гарантированный результат), который следует учитывать в первую очередь. Поэтому использовать только Парето-оптимальные решения вряд ли целесообразно, но они могут послужить основой для более точного подбора решения. Но и лексикографический подход здесь также является слишком жестким. Удобным представляется принцип, основанный на применении контрольных показателей, точнее, на методе последовательных уступок; см. [2]. Немного ухудшив значение первого критерия, можно получить вариант, который даёт лучшее значение по второму критерию. Предлагается именно этот вариант взять в качестве решения исходной задачи. Основным вопросом является построение эффективного метода вычисления такого решения.

2 Свойства свертки критериев

Определим функцию свертки критериев

$$\varphi(x, \theta) = (1 - \theta) f_1(x) + \theta f_2(x)$$

для $\theta \in [0, 1]$ и скалярную задачу оптимизации

$$\min_{x \in D} \to \varphi(x, \theta), \tag{3}$$

ее множество решений обозначим $D^*(\theta)$. Применение задачи (3) для решения задачи (1) соответствует известному критерию Гурвица. Недостатком линейной свертки критериев и здесь является трудность назначения веса θ, хотя и всегда дает

Парето-минимальные точки при $\theta \in (0,1)$. Для двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^2$ обозначим $a \prec b$ (a меньше, чем b в смысле Парето), если $a_i \leq b_i$ для $i = 1, 2$ и $a \neq b$. Напомним, что точка $x^* \in D$ называется *Парето-минимальной* для задачи (3), если

$$\overline{\exists} x \in D,\ f(x) \prec f(x^*).$$

Множество Парето-минимальных точек обозначим D_P^*. В то же время линейная свертка не позволяет определить многие Парето-минимальные решения в невыпуклом случае. Отметим, что применение обобщенного решения на основе поиска точки, ближайшей по расстоянию до идеального решения в пространстве критериев, здесь также нецелесообразно из-за неравенства критериев, т.е. возникает снова проблема с весами. Поэтому предлагается лишь использовать задачу (3) как инструмент решения исходной задачи методом последовательных уступок. Для этого нужны дополнительные свойства задачи (3).

Теорема 1 *Пусть $D^*(\theta) \neq \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$. Выберем любые точки $x' \in D^*(\theta')$, $x'' \in D^*(\theta'')$, $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 1$. Тогда выполняются соотношения:*

$$f_2(x'') - f_2(x') \leq f_1(x'') - f_1(x') \tag{4}$$

и

$$f_2(x'') - f_2(x') \leq 0,\ f_1(x'') - f_1(x') \geq 0. \tag{5}$$

Доказательство. По определению имеем

$$f_1(x') + \theta'[f_2(x') - f_1(x')] \leq f_1(x'') + \theta'[f_2(x'') - f_1(x'')]$$

и

$$f_1(x'') + \theta''[f_2(x'') - f_1(x'')] \leq f_1(x') + \theta''[f_2(x') - f_1(x')].$$

Отсюда

$$(\theta'' - \theta')[f_2(x'') - f_1(x'')] \leq (\theta'' - \theta')[f_2(x') - f_1(x')],$$

или

$$f_2(x'') - f_2(x') \leq f_1(x'') - f_1(x'),$$

т.е. выполняется (4).

Если теперь $f_1(x'') < f_1(x')$, то $f_2(x'') < f_2(x')$. Умножая неравенства на $1-\theta'$ и θ', затем складывая их, получим

$$(1-\theta')f_1(x'') + \theta' f_2(x'') < (1-\theta')f_1(x') + \theta' f_2(x'),$$

противоречие. Если же $f_2(x'') > f_2(x')$, то $f_1(x'') > f_1(x')$. Умножая неравенства на $1-\theta''$ и θ'', затем складывая их, получим

$$(1-\theta'')f_1(x'') + \theta'' f_2(x'') > (1-\theta'')f_1(x') + \theta'' f_2(x'),$$

противоречие. Значит, возможен лишь случай (5). □

Таким образом, изменение θ влечет монотонность изменений значений функций f_1 и f_2, которые противоположны по знаку.

Следствие 1 *Пусть $D^*(\theta) \neq \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$. Если $\bar{x} \in D^*(\theta')$ и $\bar{x} \in D^*(\theta'')$ для некоторых θ' и θ'', таких что $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 1$, то $\bar{x} \in D^*(\theta)$ для всех $\theta \in [\theta', \theta'']$.*

Доказательство. Выберем любое $\theta \in (\theta', \theta'')$, а также $\tilde{x} \in D^*(\theta)$. Из (5) следует

$$f_1(\bar{x}) \leq f_1(\tilde{x}) \leq f_1(\bar{x})$$

и

$$f_2(\bar{x}) \leq f_2(\tilde{x}) \leq f_2(\bar{x}).$$

Отсюда

$$\varphi(\tilde{x}, \theta) = \varphi(\bar{x}, \theta)$$

и $\bar{x} \in D^*(\theta)$. □

Обозначим

$$f_i^* = \min_{x \in D} f_i(x),\ i = 1, 2.$$

Следствие 2 *Пусть $D^*(\theta) \neq \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$.*

а) *Если $\bar{x} \in D^*(0)$ и $\bar{x} \in D^*(\theta')$ для некоторого $\theta' \in (0,1]$, то $\bar{x} \in D^*(\theta)$ и $f_1(x) = f_1^*$ для всех $x \in D^*(\theta)$ и $\theta \in [0, \theta')$;*

б) *если $\bar{x} \in D^*(1)$ и $\bar{x} \in D^*(\theta'')$ для некоторого $\theta'' \in [0,1)$, то $\bar{x} \in D^*(\theta)$ и $f_2(x) = f_2^*$ для всех $x \in D^*(\theta)$ и для всех $\theta \in (\theta'', 1]$.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in D^*(0)$ и $\bar{x} \in D^*(\theta')$ для некоторого $\theta' \in (0,1]$, тогда $\bar{x} \in D^*(\theta)$ для всех $\theta \in [0, \theta']$ согласно следствию 1. Выберем любое $\theta \in [0, \theta')$, а также $x \in D^*(\theta)$. Из (5) следует

$$f_1^* = f_1(\bar{x}) \leq f_1(x) \leq f_1(\bar{x}) = f_1^*,$$

т.е. утверждение а) справедливо. Обоснование утверждения б) проводится аналогично. □

Отсюда следует, что при получении решения частной задачи из решения возмущенной приближение параметра возмущения будет далее давать только решения частной задачи.

Теорема 2 *Пусть $D^*(\theta) \neq \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$. Выберем любую последовательность чисел $\{\theta_k\} \searrow 0$, $\theta_k \in (0,1)$, а также выберем $x^k \in D^*(\theta_k)$. Тогда для последовательности $\{x^k\}$ выполняется соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} f_1(x^k) = f_1^*. \tag{6}$$

Доказательство. По определению,

$$(1-\theta_k)f_1(x^k)+\theta_k f_2(x^k) \le (1-\theta_k)f_1(x^*)+\theta_k f_2(x^*)$$

для $x^* \in D^*(0)$. Кроме того, из (5) имеем $f_1(x^*) \le f_1(x^k)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1(x^*) \le f_1(x^k) \le f_1(x^*) + [f_2(x^*) - f_2(x^k)]\theta_k/(1-\theta_k) \\ &\le f_1^* + [f_2(x^*) - f_2^*]\theta_k/(1-\theta_k). \end{aligned}$$

При $k \to \infty$ получим (6). □

Отсюда также можно получить, что при конечности множества D достаточно большое значение индекса k (или достаточно малое значение θ_k) будет давать точку $x^k \in D^*(0)$. Действительно, тогда найдется такое число $\varepsilon' > 0$, что $f_1(x) \ge f_1^* + \varepsilon'$ для любого $x \in D^*(\theta)\backslash D^*(0)$ при $\theta \in (0,1]$. Если θ_k достаточно мало, то $f_1(x^k) < f_1^* + \varepsilon'$, значит, $x^k \in D^*(0)$. Такое же свойство справедливо и для некоторых более общих классов задач, например, когда множество D многогранное, а функции f_1 и f_2 линейные. Тогда множество D можно заменить вначале множеством его угловых точек, число которых конечно, а значит, при достаточно малом θ_k получим угловую точку x^k из $D^*(0)$. Возвращаясь к полному множеству D, определяем, что та же точка x^k будет находиться в $D^*(0)$. Условия получения точки из $D^*(0)$ с помощью точек из $D^*(\theta)$ при конечном значении параметра θ установлены многими авторами; см., например, [3, 4, 5].

Для точки $x \in D$ обозначим через

$$h(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

наибольший разброс значений функции $\mu(x,\alpha)$ в этой точке. Уменьшение величины $h(x)$ может служить удобным способом отбора решений при большом числе вариантов, например, среди Парето-минимальных точек. Предыдущие свойства позволяют указать наилучшие и наихудшие точки по этому значению. Для числа $\varepsilon \ge 0$ обозначим

$$D_1(\varepsilon) = \{z \in D \mid f_1(z) \le f_1^* + \varepsilon\},$$

а также пусть $D_1^*(\varepsilon)$ обозначает множество решений задачи оптимизации

$$\min_{x \in D_1(\varepsilon)} \to f_2(x).$$

Теорема 3 *Пусть $D^*(\theta) \ne \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$.*

a) *Если $x' \in D^*(0)$ и $x'' \in D^*(1)$, то*

$$h(x') \le h(\tilde{x}),\ \forall \tilde{x} \in D^*(\theta),\ \theta \in (0,1]$$

и

$$h(x'') \ge h(\tilde{x}),\ \forall \tilde{x} \in D^*(\theta),\ \theta \in [0,1);$$

б) *если* $x' \in D^*(0)$ *и* $x'' \in D^*(1)$, *то*

$$h(x') \le h(\tilde{x}) \le h(x'')$$

для любой Парето-минимальной точки $\tilde{x} \in D$.

Доказательство. Утверждение а) следует из теоремы 1. Пусть имеется точка $\tilde{x} \in D_P^*$, такая что

$$h(x') > h(\tilde{x}).$$

Поскольку $x' \in D^*(0)$, то по определению

$$f_1(x') \le f_1(\tilde{x}).$$

Отсюда следует

$$f_2(x') < f_2(\tilde{x}) + f_1(x') - f_1(\tilde{x}) \le f_2(\tilde{x}),$$

т.е. $f(x') \prec f(\tilde{x})$. Аналогично, пусть имеется точка $\tilde{x} \in D_P^*$, такая что

$$h(x'') < h(\tilde{x}).$$

Поскольку $x'' \in D^*(1)$, то по определению

$$f_2(x'') \le f_2(\tilde{x}).$$

Отсюда следует

$$f_1(x'') < f_1(\tilde{x}) + f_2(x'') - f_2(\tilde{x}) \le f_1(\tilde{x}),$$

т.е. $f(x') \prec f(\tilde{x})$. Утверждение б) справедливо. □

Отметим, что не все точки из $D^*(0)$ и $D^*(1)$ являются Парето-минимальными. Поскольку $D_1^*(0)$ есть множество решений задачи последовательной или лексикографической оптимизации, то точки из $D_1^*(0)$ Парето-минимальные. Таковыми же будут решения задачи

$$\min_{x \in D^*(1)} \to f_1(x).$$

Поэтому в качестве решений задачи (1) целесообразно брать точки, близкие к множеству $D^*(0)$. Установим простое, но полезное свойство задачи (3).

Лемма 1 *Пусть* $f_1(\bar{x}) = f_1^* + \varepsilon$ *для* $\bar{x} \in D^*(\theta)$ *и* $\theta \in (0, 1]$. *Тогда* $\bar{x} \in D_1^*(\varepsilon)$.

Доказательство. По определению имеем $\varepsilon \ge 0$ и

$$(1-\theta)f_1(\bar{x}) + \theta f_2(\bar{x}) \le (1-\theta)f_1(x) + \theta f_2(x) \quad \forall x \in D.$$

Отсюда для любого $x \in D_1(\varepsilon)$ получаем

$$\theta f_2(\bar{x}) \le \theta f_2(x) + (1-\theta)[f_1(x) - f_1(\bar{x})] \le \theta f_2(x),$$

т.е. $\bar{x} \in D_1^*(\theta)$. $\square$

В более общем виде такие свойства, которые связывают решения различных скалярных задач, использующихся в векторной оптимизации, подробно изучаются в [6, Section 4.3]. Теперь можно установить свойство точек из $D^*(0)$, полученных при малом параметре $\theta > 0$.

Теорема 4 *Пусть $\bar{x} \in D^*(0)$ и $\bar{x} \in D^*(\theta')$ для некоторого $\theta' \in (0,1]$. Тогда $\bar{x} \in D_1^*(0)$ и $\bar{x} \in D^*(\theta)$ для всех $\theta \in [0,\theta']$.*

Первое соотношение следует из леммы 1 при $\varepsilon = 0$. Второе соотношение получаем из следствия 2, п. а).

В общем случае точку из $D_1^*(0)$ можно найти в пределе при $\{\theta_k\} \searrow 0$, это свойство известно как метод регуляризации в различных вариантах. Для полноты картины приведем один вариант здесь при дополнительных предположениях. Напомним, что функция $\varphi : E \to \mathcal{R}$ называется *коэрцитивной* на множестве $X \subseteq E$, если для любой последовательности $\{x^k\} \subset X$, где $\|x^k\| \to \infty$, выполняется $\varphi(x^k) \to +\infty$. Функция $\varphi : E \to \mathcal{R}$ называется *полунепрерывной снизу* на множестве $X \subseteq E$, если для любой последовательности $\{x^k\} \to \bar{x} \in X$, $x^k \in X$ выполняется $\varphi(\bar{x}) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \varphi(x^k)$.

Теорема 5 *Предположим, что множество D замкнуто и непусто, функции f_1 и f_2 полунепрерывны снизу на множестве D, функция f_1 коэрцитивна на множестве D. Выберем любую последовательность чисел $\{\theta_k\} \searrow 0$, $\theta_k \in (0,1)$, а также выберем $x^k \in D^*(\theta_k)$. Тогда последовательность $\{x^k\}$ корректно определена, имеет предельные точки, и все они находятся в множестве $D_1^*(0)$.*

Доказательство. Поскольку функция f_1 коэрцитивна на множестве D, то такова же и функция f_2. Поэтому $D^*(\theta) \neq \varnothing$ для $\theta \in [0,1]$, последовательность $\{x^k\}$ корректно определена и ограничена, значит, она имеет предельные точки. Из теоремы 2 следует, что выполняется соотношение (6). Поэтому все предельные точки последовательности $\{x^k\}$ находятся в множестве $D^*(0)$. По определению,

$$(1-\theta_k)f_1(x^k) + \theta_k f_2(x^k) \leq (1-\theta_k)f_1(x^*) + \theta_k f_2(x^*) \leq (1-\theta_k)f_1(x^k) + \theta_k f_2(x^*)$$

для $x^* \in D^*(0)$. Отсюда следует

$$f_2(x^k) \leq f_2(x^*).$$

Если x' – любая предельная точка для $\{x^k\}$, то

$$f_2(x') \leq f_2(x^*) \quad \forall x^* \in D^*(0),$$

т.е. $x' \in D_1^*(0)$. $\square$

3 Метод и его приложения

Напомним, что исходная задача оптимизации с неопределенными факторами (1) заменяется на задачу векторной оптимизации (2) с двумя критериями. Для сравнения вначале вычисляется величина f_1^*, т.е. точка из $D^*(0)$. Далее, в качестве решения предлагается взять точку из множества $D_1^*(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – подходящее значение уступки по первому критерию. Из теоремы 2 следует, что требуемую точку можно найти за конечное число вычислений решения задачи (3) при уменьшении значения параметра $\theta \in [0, 1]$. Таким образом можно избежать трудности назначения веса и при этом получить Парето-оптимальную точку. Ясно, что на реализацию этого метода будет влиять учет особенностей конкретной задачи оптимизации. Поэтому проиллюстрируем применение метода к простейшим экстремальным задачам на графах.

Обычно граф задается множеством вершин V, которое будет считаться конечным, множеством дуг и отображением $\mathcal{A}$, ставящим в соответствие паре вершин i и j элемент $a \in \mathcal{A}$. Если значение отображения для i и j непусто, то определена дуга (i, j), для которой вершина i является исходящей (начальной), а j – входящей (конечной). Если значение отображения для i и j пусто, то вершины i и j не связаны дугой. Последовательность дуг

$$a_1, a_2, ..., a_{k-1},$$

где $a_l = (i_l, i_{l+1})$ или (i_{l+1}, i_l) и любые две соседние дуги имеют смежную вершину, называется *цепью*, соединяющей вершины i_1 и i_k, если $i_1 \notin a_2$ и $i_k \notin a_{k-2}$. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью. *Циклом* называется замкнутая цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают. *Путем* называется цепь, которую можно пройти от начальной до конечной вершины в направлении дуг. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью. Граф называется *связным по путям*, если любые две его вершины можно соединить путем. *Деревом* называется связный граф без циклов. Для определения экстремальных задач на графах их элементам приписывают значения, называемые весами. Пусть каждой дуге графа $a = (i, j) \in \mathcal{A}$ приписан вес (длина) $c_a = c_{ij}$. Тогда можно определить хорошо известные задачи о кратчайшем связывающем дереве графа и о кратчайшем связывающем пути для заданной пары вершин; см., например, [7]. В такой задаче вариант x можно задать как матрицу значений булевских переменных

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вариант включает дугу } (i, j), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

тогда D определяет допустимое множество всех вариантов задачи, а значение целевой функции

$$\mu(x) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij}.$$

Пусть веса дуг заданы неточно, для каждой дуги графа $a = (i,j) \in \mathcal{A}$ известен отрезок $[c'_{ij}, c''_{ij}]$ возможных значений веса, $c'_{ij} \le c''_{ij}$. Тогда

$$f_1(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c''_{ij} x_{ij}$$

и

$$f_2(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c'_{ij} x_{ij},$$

а также

$$\varphi(x,\theta) = (1-\theta) f_1(x) + \theta f_2(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} [(1-\theta) c''_{ij} + \theta c'_{ij}] x_{ij}.$$

Пример 1 (Задача о кратчайшем связывающем дереве графа) В этой задаче требуется найти дерево, содержащее все вершины графа, причем оно должно иметь минимальный суммарный вес дуг среди всех таких связывающих деревьев. Если граф связный, то (кратчайшее) связывающее дерево существует. Решение задачи при единственных весах находится с помощью очень простого алгоритма Прима-Краскала.

Алгоритм 1. Выбираем любую вершину $i_0 \in V$, полагаем $V' = \{i_0\}$, $D' = \emptyset$, $f = 0$. На очередной итерации рассматриваем все дуги, у которых одна вершина находится в V', и среди них выбираем дугу с наименьшим весом. Пусть это дуга $a = (i,j)$, $i \in V'$ и $j \notin V'$. Тогда полагаем $V' = V' \bigcup \{j\}$, $D' = D' \bigcup \{a\}$, $f = f + c_{ij}$. Построение дерева завершается, когда $V' = V$, тогда его дуги находятся в D', а длина дана числом f.

Для решения исходной задачи (1) или (2) предложенным методом вначале применяется алгоритм 1 с $c_{ij} = c_{ij}(0)$ и вычисляется величина f_1^*, т.е. точка (связывающее дерево) из $D^*(0)$. Здесь и далее для краткости обозначим

$$c_{ij}(\theta) = (1-\theta) c''_{ij} + \theta c'_{ij}.$$

Затем выбирается подходящее значение уступки $\varepsilon > 0$ по первому критерию и проводится подбор подходящего значения $\theta \in [0,1]$, т.е. применяется алгоритм 1 с $c_{ij} = c_{ij}(\theta)$, вычисляется точка (связывающее дерево) $x(\theta)$ из $D^*(\theta)$ и величина

$$f_1(x(\theta)) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c''_{ij} x_{ij}(\theta).$$

Из теоремы 2 следует, что за конечное число проб можно найти точку такую, что

$$f_1(x(\theta)) \le f_1^* + \varepsilon.$$

Согласно лемме 1, тогда получаем $x(\theta) \in D_1^*(\varepsilon)$. Самый простой способ состоит в последовательном увеличении значения θ, пока сохраняется указанное выше неравенство. При необходимости можно провести более точную настройку. Отметим, что количество связывающих деревьев конечно. Согласно замечанию к теореме 2 тогда достаточно малое значение θ будет давать точку из $D^*(0)$, а значит, из $D_1^*(0)$.

При реализации для каждой дуги $a = (i, j) \in \mathcal{A}$ и текущего значения θ удобно запоминать отрезок значений $[\theta', \theta'']$, при которых выбор этой дуги не меняется. Это позволит уточнить пробные значения θ и сократить объем вычислений.

Пример 2 (Задача о кратчайшем связывающем пути в графе) В этой задаче для заданного графа и пары его вершин i_0 и j_0 требуется найти путь с минимальным суммарным весом дуг из i_0 в j_0. Если граф связный по путям и не содержит контуров с суммарным отрицательным весом дуг, то кратчайший связывающий путь существует. Известны достаточно эффективные алгоритмы нахождения кратчайшего пути для различных типов графов. На их основе по указанному методу строятся алгоритмы решения задач с неопределенными весами. Очень простой алгоритм можно построить при единственных весах для графов, в которых отсутствуют контуры. Для таких графов, не ограничивая общности, можно считать, что для любой дуги (i, j) всегда $i < j$, т.е. в таких графах всегда можно перенумеровать вершины, чтобы это свойство выполнялось. Более того, всегда можно считать, что находится кратчайший путь от вершины 1 до вершины n, т.е. $i_0 = 1$, $j_0 = n$. В самом деле, если $i_0 > 1$, то можно исключить из рассмотрения все вершины с номерами, меньшими чем i_0 и связанные с ними дуги, а в случае $j_0 < n$ аналогично исключаются вершины с номерами, большими чем j_0 и связанные с ними дуги, поскольку кратчайший путь из i_0 в j_0 не будет проходить через эту часть графа. Итак, пусть в графе эти преобразования выполнены.

<u>Алгоритм 2.</u> Полагаем $F(1) = 0$ и последовательно для каждого $j = 2, 3, \ldots, n$ вычисляем

$$F(j) = \min_{i<j} \{F(i) + c_{ij}\}.$$

Тогда длина пути равна $F(n)$.

Для решения исходной задачи (1) или (2) предложенным методом вначале применяется алгоритм 1 с $c_{ij} = c_{ij}(0)$ и вычисляется величина f_1^*, т.е. точка (кратчайший путь) из $D^*(0)$. Затем выбирается подходящее значение уступки $\varepsilon > 0$ по первому критерию и проводится подбор подходящего значения $\theta \in [0, 1]$, т.е. применяется алгоритм 1 с $c_{ij} = c_{ij}(\theta)$, вычисляется точка (кратчайший путь) $x(\theta)$ из $D^*(\theta)$ и величина

$$f_1(x(\theta)) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c''_{ij} x_{ij}(\theta).$$

Из теоремы 2 следует, что за конечное число проб можно найти точку такую, что

$$f_1(x(\theta)) \leq f_1^* + \varepsilon.$$

Согласно лемме 1, тогда получаем $x(\theta) \in D_1^*(\varepsilon)$. В принципе подход соответствует предыдущему случаю. Также можно последовательно увеличивать значения θ, пока сохраняется указанное неравенство и при необходимости проводить более точную настройку. Отметим, что количество связывающих путей также конечно. Согласно замечанию к теореме 2 тогда достаточно малое значение θ также будет давать точку из $D^*(0)$, а значит, из $D_1^*(0)$. При реализации для каждой дуги $a = (i, j) \in \mathcal{A}$ и текущего значения θ также можно запоминать отрезок значений $[\theta', \theta'']$, при которых выбор этой дуги в пути не меняется, что позволит уточнить пробные значения θ и сократить объем вычислений.

В имеющейся литературе по векторным задачам о кратчайшем связывающем дереве графа и о кратчайшем связывающем пути основное внимание уделяется выбору Парето-оптимальных вариантов, число которых может экспоненциально зависеть от размерности; см., например, [8]. Применение принципа оптимальности на основе минимизации функции расстояния до идеального решения в пространстве критериев здесь может сократить количество вариантов, но явно назначить веса критериев из-за их неравноправия будет достаточно сложной задачей. В данной работе предлагается принципиально другой подход, связанный с учетом специфики решаемой задачи. Кроме того, комбинация метода уступок и линейной свертки позволяет обойти многие трудности решения задач с векторным критерием.

Список литературы

[1] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М: Наука, 1982.

[2] Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов.радио, 1972.

[3] Еремин И.И. О задачах последовательного программирования // Сибирский матем. журнал. – 1973. – Т. 14, № 1. – С.53–63.

[4] Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М: Сов.радио, 1975.

[5] Федоров В.В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979.

[6] Chankong V., Haimes, Y. Multiobjective decision making: Theory and methodology. – New York: Elsevier, 1983.

[7] Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.

[8] Climaco J., Pascoal M. Multicriteria path and tree problems: discussion on exact algorithms and applications// Intern. Trans. in Operational Research. – 2012. – V.19, № 1-2. – P.63–98.