УДК 517

В.А. Чуриков

ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ

E-mail: vachurikov@list.ru.

Аннотация. Даётся обобщение алгебраических уравнений на основе полиномов, порядками которых могут быть любые вещественные числа. Такие полиномы являются элементарными функциями в дробном анализе, в основе которого лежит d-оператор дробного интегродифференцирования. Приводится способ решения таких алгебраических уравнений. При этом формулируется и доказывается теорема, обобщающая основную теорему алгебры.

Ключевые слова. Основная теорема алгебры, полиномы дробных порядков, алгебраические уравнения порядка s степени n.
Keywords. The Fundamental Theorem of Algebra, polynoms fractional order, algebraic equations of the order s degree n.

Обобщением классического анализа на случай производных и интегралов любых конечных вещественных порядков является дробный анализ, в котором введено большое количество операторов дробного интегродифференцирования [1–4].

В d-анализе [5], т. е. в дробном анализе, который строится на основе d-оператора дробного интегродифференцирования, получены обобщения многих элементарных функций для любых вещественных и комплексных порядков [5–6]. В классическом анализе важными элементарными функциями являются полиномы, обобщением которых в дробном анализе являются следующие функции вещественной переменной x:

Определение. Функции вида

$$\begin{gathered} P_{s|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^{s(i+1)-1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}x^{sk-1}=a_0x^{s-1}+a_1x^{2s-1}+\ldots+a_{n-1}x^{sn-1}+a_nx^{s(n+1)-1}; \\ s,a_i\in\mathbb{R};\ s,a_i=\mathrm{const};\ a_n\neq 0,\ n=0,1,2,3\ldots,\ n<\infty, \end{gathered} \tag{1}$$

будем называть *алгебраическими полиномами вещественного порядка s степени n*, или просто — *полиномами дробных порядков*.

Определение. Полином дробного порядка $P_{s|n}(x)$ будем называть *полным полиномом*, если все его коэффициенты a_i отличны от нуля, а если, хотя бы один из коэффициентов a_i (i=1, …, n–1) равен нулю, будем называть *неполным полиномом*.

В частном случае для порядка s=1 степени n полиномы $P_{s|n}(x)$ являются классическими алгебраическими полиномами $P_n(x)$, т. е. $P_n(x)\equiv P_{1|n}(x)$ [7].

Полиномы $P_{s|n}(x)$ можно рассматривать как частичные суммы первых n+1 элементов *дробностепенных рядов порядка s* [5]

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^{s(i+1)-1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^{sk-1}.$$

Такие ряды имеют большое значение для d-анализа. Например, через них выражаются многие элементарные функции d-анализа [5].

Особенностью полиномов $P_{s|n}(x)$ является то, что для порядков s<1, в общем случае, имеются слагаемые с отрицательным показателем степени.

Рассмотрим вопрос о множестве корней полиномов дробных вещественных порядков $P_{s|n}(x)$, который эквивалентен вопросу о числе решений уравнения

$$P_{s|n}(x)=0. \tag{2}$$

Уравнение типа (2) будем называть *алгебраическим уравнением порядка s степени n*.

Для нахождения решений уравнения (2), полином $P_{s|n}(x)$ удобно представить в виде произведения

$$P_{s|n}(x)=x^{s-1}\rho_{s|n}(x). \tag{3}$$

Здесь x^{s-1} – *степенной коэффициент* полинома $P_{s|n}(x)$, а $\rho_{s|n}(x)$ – *внутренний полином порядка* s степени n полинома $P_{s|n}(x)$

$$\rho_{s|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^{si}=a_0+a_1x^s+a_2x^{2s}+...+a_{n-1}x^{(n-1)s}+a_nx^{ns}. \tag{4}$$

В начале предположим, что полиномы дробных порядков $P_{s|n}(x)$ полные.

Корни полиномов $P_{s|n}(x)$ будут определяться первым x^{s-1} и вторым $\rho_{s|n}(x)$ сомножителями из (3).

Равенство нулю первого сомножителя $x^{s-1}=0$ возможно для различных вещественных порядков s:

1. Если $s>1$, то значение $x=0$ будет корнем, который будем называть *тривиальным корнем* порядка s–1.

2. Если $s<1$, то в этом случае будет один корень уравнения, который в пределе $x\to\pm\infty$ совпадает с несобственной точкой на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, который можно выразить через предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^{s-1}=(\pm1)^{s-1}\lim_{x\to\infty}|x|^{s-1}=0.$$

Такой корень будем называть *асимптотическим тривиальным корнем порядка s*–1.

Стремление к нулю в случае асимптотического корня проходит на расширенной комплексной плоскости под разными углами $\varphi_k=2\pi(s-1)k$ к вещественной оси, которые определяются коэффициентами $(\pm1)^{s-1}$, которые в общем случае многозначны и выражаются

$$(\pm1)^{s-1}=\exp\left(i(s-1)\left(\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{0}{1}\right)+2\pi k\right)\right)=\exp i(2\pi(s-1)k);\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

Если порядок s – число рациональное, т. е. представимо как $s=r/p$; $r,p\in\mathbb{N}$, числа r и p не равны между собой и не имеют общих делителей, кроме единицы. Тогда число коэффициентов $(\pm1)^{s-1}$ будет равно p для значений $k=0,1,2,...,p-1$. Для других значений, когда $k<0$ или $k>p-1$, коэффициенты будут совпадать с одним из p приведённых коэффициентов в силу периодичности аргумента, которая определяется знаменателем в соотношении с $s-1=(r/p)-1=(r-p)/p$.

Если порядок s число иррациональное, тогда коэффициентов $(\pm1)^{s-1}$ будет бесконечное счётное множество.

Точку $x=0$, когда $s<1$, степенной коэффициент x^{s-1} будет обращаться в бесконечность, будем называть *полюсом порядка s*–1.

$$\lim_{x\to\pm0}x^{s-1}=(\pm1)^{s-1}\lim_{x\to0}|x|^{s-1}=(\pm1)^{s-1}\infty=\infty.$$

3. Если $s=1$, что соответствует случаю классических полиномов, тогда степенной коэффициент равен единице $x^{1-1}=x^0=1$, поэтому для классических полиномов отсутствуют тривиальные корни, асимптотический корень и полюсы.

Корни полинома $P_{s|n}(x)$, даваемые вторым сомножителем в (3), будем называть *нетривиальными корнями*, которые находятся как решения уравнения

$$\rho_{s|n}(x)=a_0+a_1x^s+a_2x^{2s}+...+a_{n-1}x^{(n-1)s}+a_nx^{ns}=0. \tag{5}$$

Сделав здесь замену $x^s=\theta$, перейдём к алгебраическому уравнению степени n

$$a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+...+a_{n-1}\theta^{n-1}+a_n\theta^n=0. \tag{6}$$

Данное уравнение в соответствии с основной теоремой алгебры [7] относительно переменной θ имеет n решений, θ_q, (q=1, 2, …, n). Решения уравнения (5) относительно переменной x легко выразить через корни θ_q, т. е. $x_{q(k)}=(\theta_q)^{1/s}$, где k пробегает конечное или бесконечное счётное множество значений.

Если корни θ_q комплексно сопряженные $\theta_q=\chi_q\pm i\gamma_q$ $(\gamma_q>0)$, тогда корни относительно x будут

$$x_{q(k)}=(\theta_q)^{1/s}=(\chi_q\pm i\gamma_q)^{1/s}=|\theta_q|^{1/s}\exp\left(\frac{i}{s}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_q}{\chi_q}\right)+L_q+2\pi k\right)\right). \tag{7}$$

Здесь k=±1, ±1, ±2, ±3, …; L_q – константы, которые зависят от расположения точки на комплексной плоскости [8]

$$
\begin{aligned}
&L_q = 0 \quad (\chi_q > 0),\\
&L_q = \pi \quad (\chi_q < 0; \gamma_q \ge 0),\\
&L_q = -\pi \quad (\chi_q < 0; \gamma_q < 0),\\
&L_q = \pi/2 \quad (\chi_q = 0; \gamma_q > 0),\\
&L_q = -\pi/2 \quad (\chi_q = 0; \gamma_q < 0).
\end{aligned}
$$

Когда корни θ_q вещественные, которые обозначим $\theta_q^0 = \chi_q$, тогда корни относительно переменой x будут

$$
\begin{gathered}
x_{q(k)}^0 = (\theta_q^0)^{1/s} = |\,\theta_q^0\,|^{1/s} \exp\left(\frac{i}{s}(L_q + 2\pi k)\right);\\
L_q = \text{const}; \quad L_q = 0 \;\; (\theta_q^0 \ge 0); \quad L_q = \pi \;\; (\theta_q^0 < 0); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots
\end{gathered} \tag{8}
$$

Все нетривиальные корни алгебраического порядка s степени n разбиваются на n множеств, имеющих одинаковую мощность.

Если порядок s – число рациональное, т. е. $s=r/p$; $r, p \in \mathbb{N}$. Тогда число нетривиальных корней $x_{q(k)}$ для каждого q конечно и будет равно p, а общее число нетривиальных корней уравнения (5) будет np, где n – число корней соответствующего алгебраического уравнения степени n относительно переменной $\theta = x^s$.

Если порядок s число иррациональное, то нетривиальных корней уравнения (5) будет бесконечное счётное множество, которое разбивается на n подмножеств корней, в каждом из которых содержится бесконечное счётное множество корней для каждого значения q=1, 2, …, n, …

Важным частным случаем полиномов дробных порядков (1) степени n, являются полиномы целочисленных порядков m>0 степени n, которых будет m типов, один *главный полином* и m–1 *дополнительных полиномов*. Главный полином уравнения порядка m и степени n будет

$$
P_{m|n}^{(1)}(x) \equiv a_0^{(1)} x^{m-1} + a_1^{(1)} x^{2m-1} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x^{mn-1} + a_n^{(1)} x^{m(n+1)-1}. \tag{9}
$$

В частном случае, когда m=1, данный полином является классическим полиномом степени n.

Интересно будет рассмотреть корни полиномов с целочисленными порядками, но как частный случай полиномов дробных порядков.

Алгебраическое уравнение на основе полинома $P_{m|n}^{(1)}(x)$ будет иметь порядок $mn+m-1$ и его можно представить в виде произведения *степенного коэффициента* x^{m-1} и внутреннего полинома $\rho_{m|n}^{(1)}(x)$

$$
\begin{gathered}
P_{m|n}^{(1)}(x) = x^{m-1} \rho_{m|n}^{(1)}(x);\\
\rho_{m|n}^{(1)}(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i^{(1)} x^{im} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x^m + a_2^{(1)} x^{2m} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x^{(n-1)m} + a_n^{(1)} x^{mn}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Внутренние полиномы $\rho_{m|n}^{(1)}(x)$ для m>1 также является неполными классическими полиномами $P_n(x)$.

Перепишем равенство (9) в соответствии с произведением (3)

$$
x^{m-1}(a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x^m + a_2^{(1)} x^{2m} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} x^{(n-1)m} + a_n^{(1)} x^{mn}) = 0\,. \tag{11}
$$

Данное уравнение имеет тривиальный корень порядка m–1, или *m–1-кратный тривиальный корень* в точке x=0, за счёт степенной функции x^{m-1}. Далее, заменив в полиноме $\rho_{m|n}^{(1)}(x)$ степенную функцию x^m, на новую переменную φ, получим алгебраическое уравнение степени n

$$
a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \varphi + a_2^{(1)} \varphi^2 + \ldots + a_{n-1}^{(1)} \varphi^{n-1} + a_n^{(1)} \varphi^n\,,
$$

которое, в соответствии с основной теоремой алгебры [7], имеет n решений φ_i, (i=1, 2, …, n). Решения уравнения (11) относительно переменной x легко выразить через корни φ_i

$$
x_{j(i)} = (\varphi_i)^{1/m}; \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{12}
$$

Всего будет mn *нетривиальных корней*, которые можно находить по формуле (7) для комплексно сопряжённых корней и по (8), для вещественных корней φ_i, если порядок s заменить на m.

У полиномов целочисленных порядков нет полюсов и асимптотического корня, в силу того, что m≥1.

Рассмотрим решение алгебраических уравнений для дополнительных полиномов целочисленных порядков m, степени n. Для этого вначале рассмотрим дополнительные полиномы.

Если взять последовательно m–1 производных первого порядка от полинома $P_{m|n}^{(1)}(x)$, тогда получим m–1 *дополнительных полиномов* порядка m степени n, что является следствием, так называемого сдвигового вырождения у полиномов порядков m>1. Сдвиговое вырождение является особенностью полиномов целочисленных порядков больше единицы [5]. Сдвиговое вырождение полинома $P^{(1)}_{m|n}(x)$, это такое его свойство, что если брать производные порядка 1 последовательно m–1 раз, то получим m полиномов порядка m–1 степени n

$$\frac{d}{dx}P^{(1)}_{m|n}(x)=P^{(2)}_{m|n}(x);\qquad \frac{d}{dx}P^{(2)}_{m|n}(x)=P^{(3)}_{m|n}(x);\qquad \ldots\qquad \frac{d}{dx}P^{(m)}_{m|n}(x)=P^{(1)}_{m-1|n}(x). \tag{13}$$

Расписав эти производные первого порядка подробно, получим выражения для m–1 дополнительных полиномов

$$P^{(2)}_{m|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^{(2)}x^{m(i+1)-2}=a_0^{(2)}x^{m-2}+a_1^{(2)}x^{2m-2}+\ldots+a_{n-1}^{(2)}x^{mn-2}+a_n^{(2)}x^{m(n+1)-2};$$

$$P^{(3)}_{m|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^{(3)}x^{m(i+1)-3}=a_0^{(3)}x^{m-3}+a_1^{(3)}x^{2m-3}+\ldots+a_{n-1}^{(3)}x^{mn-3}+a_n^{(3)}x^{m(n+1)-3};$$

$$\ldots$$

$$P^{(m-1)}_{m|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^{(m-2)}x^{mi+1}=a_0^{(m-1)}x^{1}+a_1^{(m-1)}x^{m+1}+\ldots+a_{n-1}^{(m-1)}x^{m(n-1)+1}+a_n^{(m-1)}x^{mn+1};$$

$$P^{(m)}_{m|n}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^{(m)}x^{mi}=a_0^{(m)}+a_1^{(m)}x^{m}+\ldots+a_{n-1}^{(m)}x^{m(n-1)}+a_n^{(m-1)}x^{mn}.$$

Первый элемент главного полинома имеет у переменной x степень m-1. Из полученных равенств видно, что для дополнительных полиномов показатели степеней переменной x будут иметь значения на единицу меньше, чем у соответствующих элементов предыдущих полиномов. Эта особенность называется m-кратным *сдвиговым вырождением* полиномов целочисленных порядков m>1.

Из выражений для дополнительных полиномов видно, что у всех полиномов одного порядка, как у главного полинома, так и у всех дополнительных полиномов будет одинаковое количество слагаемых.

У полиномов порядка s степени m

$$P^{(l)}_{m|n}(x)=x^{m-l}\rho^{(l)}_{m|n}(x);\quad l=1,2,3,\ldots$$

внутренние полиномы

$$\rho^{(l)}_{m|n}(x)\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i^{(l)}x^{im}=a_0^{(l)}+a_1^{(l)}x^{m}+a_2^{(l)}x^{2m}+\ldots+a_{n-1}^{(l)}x^{(n-1)m}+a_n^{(l)}x^{mn}$$

будут отличаться только коэффициентами. Качественное отличие будут иметь только степенные коэффициенты x^{m-l}, а именно, для разных значений l степенные коэффициенты будут

$$x^{m-1}\ (l=1),\qquad x^{m-2}\ (l=2),\quad \ldots,\qquad x^{1}\ (l=m-1),\qquad x^{0}=1\,(l=m).$$

Из сказанного следует, что число тривиальных корней в полиномах $P^{(l)}_{m|n}(x)$ будет определяться степенным коэффициентом x^{m-l} и равно m–l, которых больше всего у главных полиномов $P^{(1)}_{m|n}(x)$, которых будет m–1, а у «последнего» полинома $P^{(m)}_{m|n}(x)$ с номером m тривиальных корней не будет.

Число нетривиальных корней у полиномов $P^{(l)}_{m|n}(x)$ определяется полиномами $\rho_{m|n}(x)$, каждый из l полиномов имеет mn корней $x_j^{(l)}$ (j=1, 2, …, mn) относительно переменной x. Корни $\varphi^{(l)}_{j(i)}$ для переменной φ, которые можно находить по формуле (7) для случая комплексно сопряжённых корней $x_j^{(l)}$ и по формуле (8) для вещественных корней $x_j^{(l)}$, если в них порядок s заменить на m.

Всего полиномы $P^{(l)}_{m|n}(x)$ будут иметь по mn+m–l корней, из которых m–l тривиальные и mn нетривиальные корни.

Для всех уравнений порядка m степени n будет mn *нетривиальных корней*, которые можно находить по формуле (7) для комплексно сопряжённых и по (8) для вещественных корней φ_i, если порядок s заменить на m.

Основной и дополнительные полиномы $P^{(l)}_{m|n}(x)$ целочисленных порядков s=m>1 степени n со всеми номерами можно рассматривать как неполные полиномы порядка 1 степени nm+m–l. Тогда число корней этих полиномов будет так же nm+m–l в соответствии с классической основной теоремой алгебры.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы *о числе корней и полюсов у полиномов вещественных порядков*.

Теорема. Пусть дан полный алгебраический полином $P_{s|n}(x)$ вещественного порядка s степени n, с вещественными коэффициентами a_i, тогда у него имеются комплексные корни (часть из которых могут быть вещественными), множество которых зависит от порядка s, степени n и от коэффициентов a_i.

1. Если порядок s число иррациональное, то общее множество нетривиальных корней образует бесконечное счётное множество, которое представляет сумму n бесконечных счётных множеств нетривиальных корней. Если порядок $s>1$, то будет ещё тривиальный корень порядка $s–1$, а для $s<1$ имеется *полюс порядка* $s–1$ и асимптотический корень.

2. Если порядок число рациональное и $s=r/p$; $r, p \in \mathbb{N}$, а также r и p не имеют общих делителей кроме единицы, то число нетривиальных корней конечно и будет mp, где m – число корней соответствующего алгебраического уравнения степени n относительно переменной $\theta = x^s$; r – число корней уравнения $x_{j(i)} = (\theta_i)^{1/s} = (\theta_i)^{p/r}$; $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., p$, а θ_i - корни соответствующего алгебраического уравнения степени n. Если порядок $s>1$, то будет ещё тривиальный корень порядка $s–1$, а для $s<1$ имеется *полюс порядка* $s–1$ и асимптотический корень.

3. Если порядок число целое, т. е. $s=m$, степень равна n, а сдвиг равен l, то общее число корней будет $mn+m–l$ ($1\leq l\leq m$), из которых mn – число нетривиальных корней и $m–l$ – число тривиальных корней. Тривиальные корни являются кратными корнями кратности $m–l$, т. е. их будет от 0 до $m–1$, что зависит от сдвига l в силу вырождения полиномов целочисленных порядков.

Из данной теоремы имеется важное следствие.

Следствие. Если порядок $s=1$, а степень равна $n\geq 1$, то число корней будет n, а полюсов и нетривиальных корней не будет. Данный случай соответствует классической *основной теореме алгебры* [7].

По поводу теоремы можно сделать замечания:

Замечание 1. Приведённая теорема учитывает как изолированные корни, так и кратные корни, независимо от того, являются эти корни тривиальными или нетривиальными.

Замечание 2. Для неполных полиномов возможны ситуации, когда один или несколько первых коэффициентов a_i полинома равны нулю, то возможны следующие случаи:

1. Если $s>1$, то среди решений могут быть нулевые нетривиальные корни, если элементы полиномов с нулевым показателем степени $a_i x^0$ или вообще отсутствуют, или равны нулю, когда $a_i = 0$. Тогда тривиальные корни будут накладываться на нулевые тривиальные корни, что будет приводить к повышению порядка нулевых корней.

2. Для случая, когда $s<1$ и $ns>1$, возможно наложение полюсов и нетривиальных нулевых корней, что может приводить к разным результатам в зависимости от порядков корней и полюсов. Если порядок полюса больше порядка корня, то в нулевой точке будет полюс, а если меньше – нулевой корень. Если порядки полюса и корня совпадает, то они компенсируют друг друга, давая в результате нулевой порядок аргумента. В этом случае останется только числовой коэффициент у слагаемого дающего корень.

Очевидно, что точные решения алгебраических уравнений, в соответствии с основной теоремой алгебры, можно находить для любых вещественных порядков s вплоть до четвёртой степени, независимо от порядка [7, 9].

Формулировка рассмотренной теоремы аналогична первоначальной формулировке основной теоремы алгебры восходящей к работам *А. Жира́ра* (*Albert Girard*) и *Р. Декарта* (*René Descartes*), в которых устанавливается связь между степенью алгебраического уравнения и числом его корней [9]. Для полиномов дробных порядков такая формулировка представляется более наглядной. Рассмотренную теорему можно переформулировать и в более современном и экономном виде, на основе теоремы *Э. Безу* (*Étienne Bézout*), через разложение полиномов дробных порядка s степени n на произведение полиномов порядка s первой степени и полиномов порядка s степени $n–1$, что может быть предметом дальнейших исследований.

Литература

1. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. – 234 p.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с. (*Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.,* Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. – New York: Gordon and Breach, – 1993).

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-HollandMathematicsStudies. Vol. 204. – Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San-Diego – San-Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo: Elsevier, 2006. – 520 p.

4. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

5. *Чуриков В.А.* Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора: учебное пособие – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

6. *Чуриков В.А.* Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апреля 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – с. 283–289.

7. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

8. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Том I: Начала теории. Изд. 2-е.–М.: Наука, 1967. – 486 с.

9. *Тихомиров В.М., Успенский В.В.* Десять доказательств основной теоремы алгебры // Матем. просв., сер. 3, **1**, МЦНМО, М., 1997. – С. 50–70.