Анализ гипотезы Коллатца методами теории последовательностей

Еникеев Руслан Ренатович

ruslan.enkeev@gmail.com

Самарский государственный технический университет

Резюме

Предлагается решение для так называемой гипотезы Коллатца, она же «проблема $3n+1$». Идея доказательства заключается в представлении работы алгоритма в виде бесконечной последовательности чисел, для которой рассматриваются гипотезы о сходимости или расходимости в рамках теории последовательностей и пределов, соответствующие гипотезам о выходных значениях алгоритма.

Ключевые слова

проблема $3n+1$; гипотеза Коллатца; сходимость последовательностей

Введение

Проблема $3n+1$, она же гипотеза Коллатца – очень известная математическая проблема, связанная со свойствами натуральных чисел. Полноценный обзор проблемы и связанных задач, включая существующие подходы к анализу и решению, можно найти в работах Д. Лагариаса (Lagarias) [1-3].

Следует заметить, что задача вызывает интерес и у людей, только начинающих изучать математику, в связи с предельной простотой формулировки. Интерес подогревают популяризаторы науки; этой проблеме посвящены ролики на YouTube, в частности [4]. Вполне уместен и оправдан скепсис по отношению к многочисленным «доказательствам», зачастую размещаемых на нерецензируемых платформах.

Вместе с тем, считаем данную задачу скорее мотивирующим феноменом к изучению математики. Любопытен призыв по отношению в том числе и к рассматриваемому вопросу: Don’t try to solve these problems! [5] – по признанию автора статьи (R. Guy), ожидаем как раз противоположный результат.

Данное изложение является попыткой сформулировать доказательство гипотезы посредством языка теорий последовательностей и пределов.

1. Форма представления алгоритма

Задачей данного параграфа является формулировка наиболее удобной формы выражения работы алгоритма на некотором произвольном натуральном числе, первоначально переданному алгоритму, n_0.

Обозначать операции алгоритма мы будем следующим образом:

$$n_1 \xrightarrow{3n+1} 3n_1 + 1,$$

$$n_2 \xrightarrow{n/2} \frac{1}{2}n_2; \tag{1.1}$$

где n – натуральное число на любой итерации алгоритма, $n \in \mathbb{N}[1;\infty)$; n_1 – то же самое, только отмечается, что число нечетное; n_2 – число четное. Совершенно очевидно, что число, выражаемое как $3n_1 + 1$ является четным, в то время как $\frac{1}{2}n_2$ может быть как четным, так и нечетным.

Определение 1.1

Любое начальное нечетное натуральное число может быть выражено следующей формулой:

$$n_0 = a_0 2^{m_0}; \tag{1.2}$$

где a_0 – рациональное положительное число, $a_0 \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2};1\right]$; m_0 – натуральное число, соответствующее предложенной формуле, $m_0 \in \mathbb{N}[0;\infty)$. Например, $5 = \frac{5}{8} \cdot 2^3$, $6 = \frac{3}{4} \cdot 2^3$, $27 = \frac{27}{32} \cdot 2^5$, $1 = 1 \cdot 2^0$ и т.д.

В случае, если начальное число четное, оно может быть представлено в виде:

$$n_0 = a_0 2^{m_0+k};$$

где k – натуральное число, соответствующее количеству начальных операций $\frac{1}{2}n_2$, приводящих к нечетному числу, выраженному формулой $a_0 2^{m_0}$. Такое представление для удобства изложения опустим, будим исходить из того, что на вход в алгоритм поступает нечетное число.

Для однозначного определения преобразования числа к форме (1.2) определим рекурсивные функции $a_0(n)$ и $m_0(n,x)$; в качестве аргумента n функциям передается число n_0 и $x = 0$:

$$a_0(n) = \begin{cases} a_0(n/2) & \text{if } n > 1, \\ n & \text{if } n \le 1; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$m_0(n,x) = \begin{cases} m_0(n/2\,, x+1) & \text{if } n > 1, \\ x & \text{if } n \le 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Рассмотрим результат применения операции $3n+1$ к начальному числу:

$$a_0 2^{m_0} \xrightarrow{3n+1} 3a_0 2^{m_0} + 1 = \frac{3}{4} a_0 2^{m_0+2} + 1 = 2^{m_0+2}\left[\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}}\right]. \tag{1.5}$$

В предложенной формулировке выражение в квадратных скобках не превышает единицы: $\left[\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}}\right] \le 1$, что соответствует применяемым ограничениям для параметров: $a_0 \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}; 1\right]$, $m_0 \in \mathbb{N}[0; \infty)$.

Определение 1.2

Применение операции $3n+1$ мы равносильно определяем, как применение алгоритма f_{3n+1}:

$$f_{3n+1}(n) = \begin{cases} 3n+1\,\cdot & \text{if } n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ n\,\cdot & \text{if } n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{1.6}$$

Так что для любого натурального n, $f_{3n+1}(n) = n_2$, где n_2 – четное натуральное число, что очевидно. Здесь мы используем нотацию, характерную для формы марковского алгорифма, но в контексте алгебраических преобразований над числовыми переменными; точка здесь означает конечную операцию схемы алгорифма.

После реализации операции (1.5), исходя из определения алгоритма, следует операция деления. Мы будем ее рассматривать в виде следующего представления:

$$2^{m_0+2}\left[\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}n} 2^{m_0+1}\left[\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}}\right]. \tag{1.7}$$

Для произвольного числа мы не можем сказать, сколько потребуется операций деления для получения нечетного числа, поэтому мы скажем, что число два в формуле (1.7) приобретает некоторую степень m_1. Дадим оценку этому числу: $0 \le m_1 \le m_0 + 1$, – а на произвольном шаге алгоритма: $0 \le m_{i+1} \le m_i + 1$.

Определение 1.3

Аналогичным образом, применение данной операции мы определяем, как применение алгоритма $f_{n/2}$:

$$f_{n/2}(n) = \begin{cases} n \cdot & \text{if } n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ f_{n/2}(n/2) & \text{if } n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \quad (1.8)$$

Результатом применения данного алгоритма к произвольному натуральному числу является нечетное число: $f_{n/2}(n) = n_1$.

Определение 1.4

Введем функцию c, которая при передаче ей произвольного числа выдает нечетное число, получаемое в результате реализации одной итерации исследуемого алгоритма, так что:

$$c(n_0) = 2^{m_1}\left[\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}}\right]. \quad (1.9)$$

Будем использовать общепринятое обозначение для соответствующих рекурсивных преобразований:

$$c^1(n_0) = c(n_0),\ c^{k+1}(n_0) = c\left(c^k(n_0)\right). \quad (1.10)$$

Эту самую функцию, как и соответствующий алгоритм, мы можем рассматривать как композицию ранее определенных алгоритмов: $c = f_{n/2} \circ f_{3n+1}$, что аналогичным образом можно записать, как $c(n) = f_{n/2}\big(f_{3n+1}(n)\big)$.

Последовательное применение функции c к числу мы будем рассматривать как математическую последовательность. Таким образом, последовательное применение k итераций исследуемого алгоритма к начальному нечетному числу n_0 даст соответствующую последовательность нечетных чисел $\{c^k(n_0)\}$.

Замечание 1.1

Обозначим алгоритм Коллатца символом $\mathbb{C}$, в смысле объекта теории марковских нормальных алгорифмов. Тогда справедлива следующая формулировка, относящаяся к упомянутой теории: $\mathbb{C}\colon n_0 \vdash c^1(n_0) \vdash c^2(n_0) \cdots \vdash c^k(n_0)$. Можно считать, что проблема заключается в нахождении справедливости $\mathbb{C}\colon n_0 \vDash 1$ для любого n_0.

Пример 1.1

Для начального числа $n_0 = 19$ мы получим следующую последовательность: $c^1(19) = 29$, $c^2(19) = c^1(29) = 11$, $c^3(19) = c^2(29) = c^1(11) = 17$, $c^4(19) = 13$, $c^5(19) = 5$, $c^6(19) = 1$, $c^7(19) = 1$ и т.д.. Таким образом, начиная с шестого члена последовательности $\{c^k(19)\}$, все последующие члены равны единице.

Определение 1.5

Введем функцию $C(n_0)$, которая выводит значение предела последовательности $\{c^k(n_0)\}$ при количестве итераций алгоритма Коллатца, стремящегося к бесконечности, так что:

$$C(n_0) = \lim_{k\to\infty} c^k(n_0). \tag{1.11}$$

Замечание 1.2

Сама запись $C(n_0) = \lim\limits_{k\to\infty} c^k(n_0)$ по формуле (1.11) никаким образом не содержит в себе предположение о существовании самого предела в понимании теории пределов. В самом деле, если бы было бы сказано: «$C(n_0) = \lim\limits_{k\to\infty} c^k(n_0) = g$, где $g \in \mathbb{N}$», – это было бы ошибкой. Однако, определение 1.5 данного высказывания не содержит. Так что, обращаясь к записи $C(n_0)$ или $\lim\limits_{k\to\infty} c^k(n_0)$ мы не вводим себя в заблуждение относительно заведомо принятого представления о существовании натурального числа, соответствующего записи $C(n_0)$.

Для явного выражения функции C предварительно рассмотрим последовательное применение итераций алгоритма к произвольному числу:

$$c^2(n_0) = 2^{m_2}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^{m_0+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\frac{1}{2^{m_1+2}}\right)\right];$$

и затем:

$$c^3(n_0) = 2^{m_3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3 a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2^{m_0+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\frac{1}{2^{m_1+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\frac{1}{2^{m_2+2}}\right)\right].$$

В результате, выразим произвольный k-ый член последовательности:

$$c^k(n_0) = 2^{m_k}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2^{m_0+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\frac{1}{2^{m_1+2}} + \cdots\right. \\ \left.\ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{-k+0}\frac{1}{2^{m_{k-2}+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-k+1}\frac{1}{2^{m_{k-1}+2}}\right)\end{array}\right]. \tag{1.12}$$

Данная формула может быть записана, как содержащая числовой ряд:

$$c^k(n_0) = 2^{m_k}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1}\frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}\right]. \tag{1.13}$$

Пример 1.2

Шестой член последовательности из примера 1.1 с использованием формулы (1.13) может быть выражен следующим образом:

$$c^6(19) = 2^3\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\frac{19}{32} + \left(\frac{3}{4}\right)^{6-1}\left(\frac{1}{2^{5+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2+1}\frac{1}{2^{6+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-3+1}\frac{1}{2^{5+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-4+1}\frac{1}{2^{6+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-5+1}\frac{1}{2^{6+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-6+1}\frac{1}{2^{5+2}}\right)\right] = 1.$$

Из данного представления следует, что исследование алгоритма Коллатца тождественно исследованию возможных значений функции $C(n_0)$, представляющей собой предел последовательности $\{c^k(n_0)\}$:

$$C(n_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{m_k}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1}\frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}\right]. \tag{1.14}$$

Высказательная форма гипотезы Коллатца в контексте предлагаемой интерпретации может быть выражена следующим образом: $\forall n_0(C(n_0) = 1)$. Заметим, что мы ведем рассуждение, относительно преобразования нечетных чисел. Для четных чисел, при подтверждении гипотезы для нечетных, доказательство выводится по простой схеме: $c^1(n_2) = n_0$, где n_2 – произвольное четное натуральное число, так что $\forall n_0\big(c^k(n_0) = 1\big) \supset \forall n_2\big(c^{k+1}(n_2) = 1\big)$, и в пределе $\forall n_0(C(n_0) = 1) \supset \forall n_0(C(n_2) = 1)$. Это также оправдывается тем, что любое четное число конструктивно можно получить из советующего нечетного кратным умножением на два.

Определим значение предела последовательности, выраженного формулой (1.14), путем высказывания следующей теоремы о пределе последовательности: если все члены последовательности равны одному и тому же числу, то последовательность сходится к этому числу. Это высказывание находится в строгом соответствии с определением понятия предела последовательности. Таким образом, высказывание $C(n_0) = 1$ означает, что для последовательности, определенной как $\{c^k(n_0)\}$ существуют отрезки этой последовательности, все члены которых равны единице. Данная аргументация позволяет нам рассматривать результат работы алгоритма Коллатца в рамках формальных определений теории последовательностей. Заметим также, поскольку последовательность $\{c^k(n_0)\}$ определена на натуральных числах, бесконечно приближать некоторое натуральное число она не может, т.е. необходимым условием для существования предела $C(n_0) = 1$ является принятие значения единицы для всех членов последовательности, начиная с некоторого члена.

Саму последовательность чисел $\{c^k(n_0)\}$ в свете теорем о последовательностях мы можем рассматривать, как результат алгебраических преобразований других последовательностей, т.е.:

$$\{c^k(n_0)\} = \{2^{m_k}\}\left[\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0\right\} + \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}\right\}\right]. \tag{1.15}$$

Для удобства изложения мы также будем использовать запись:

$$\{c^k(n_0)\} = \{2^{m_k}\}\left[\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0\right\} + \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s_k\right\}\right], \tag{1.16}$$

где s_k – частичная сумма ряда $S = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{i-1}+2}$.

Замечание 1.3

В определении числового ряда S содержится параметр m_{i-1}. Под этим параметром мы будем понимать функцию, задаваемую посредством числа n_0, передаваемому алгоритму Коллатца и определяющему поэтому сам параметр m_{i-1}, как функцию: $m_{i-1} = f(n_0, i)$. Полагаем, что данное замечание устранит возражения формального характера относительно определения числового ряда; данный ряд можно рассматривать как функциональный. Более того, ряд считается заданным, поскольку имеется однозначный алгоритм определения $m_{i-1} = f(n_0, i)$ на каждой итерации посредством рассматриваемого алгоритма Коллатца.

Для последующих рассуждений также будет удобным представление выражения последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s_k\right\}$, внеся коэффициент в сумму многочлена:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s_k = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}. \tag{1.17}$$

Определение 1.6

По своему определению формулировка $C(n_0) = 1$ тождественна $\mathbb{C}: n_0 \vDash 1$. Однако для соответствия формальному определению марковского алгорифма введем дополнительный формальный алгоритм, осуществляющую остановку работы алгоритма Коллатца:

$$f_1(n) = \begin{cases} n \cdot & \text{if } n \neq 1, \\ \Lambda \cdot & \text{if } n = 1; \end{cases} \tag{1.18}$$

где Λ – символ, не входящий в левую часть формул подстановки $\mathbb{C}$.

Определим алгоритм Коллатца, как композицию: $\mathbb{C} = f_1 \circ c$. Тогда справедливо будет $\mathbb{C}: \Lambda \sqsupset$, что позволяет делать предположения относительно алгоритма Коллатца, определенного по форме марковского алгорифма: $\mathbb{C}(n_0) = \Lambda$. Поскольку $\mathbb{C}: n_0 \vDash 1 \vdash \Lambda$, то будем считать $\mathbb{C}(n_0) = 1$ тождественной формулировкой.

Таким образом, мы связали формулировку $C(n_0) = 1$, относящуюся к теории пределов последовательностей, с формулировкой $\mathbb{C}(n_0) = 1$ теории нормальных алгорифмов; причем, первую можно интерпретировать, как высказывание о существовании бесконечной последовательности единиц $\{1\}$ в качестве отрезка последовательности $\{c^k(n_0)\}$, в то время как вторая формулировка заявляет о конечности последовательности $\{c^k(n_0)\}$, обрывая ее на единице.

В рамках настоящей работы будем использовать язык теории последовательностей для исследования объекта, описываемого как некий алгоритм. Выбор метода исследования считаем вполне аргументированным.

Предложение 1.1

Опровержением гипотезы Коллатца будет доказательство истинности какого-либо из следующих двух высказываний: (1) для некоторого особого числа n'_0 последовательность $\{c^k(n'_0)\}$ ограничена, но при этом не сходится на единице, или $\exists n'_0(C(n'_0) \neq 1) \wedge (C(n'_0) \neq \infty)$; (2) для некоторого особого числа n''_0 последовательность $\{c^k(n''_0)\}$ расходится к бесконечности, или $\exists n''_0(C(n''_0) = \infty)$.

Для первого высказывания мы можем рассматривать не единичный сценарий; последовательность может как иметь предел, отличный от единицы, т.е. $C(n'_0) = g$, $g \neq 1$, так и быть расходящейся, т.е. не иметь предела. Второе высказывание обязательно предполагает отсутствие предела.

Опровержение данных высказываний повлечет доказательство гипотезы Коллатца, т.е. $\neg\exists n'_0\big((C(n'_0) \neq 1) \wedge (C(n'_0) \neq \infty)\big) \wedge \neg\exists n''_0(C(n''_0) = \infty) \supset \forall n_0(C(n_0) = 1)$. Данное утверждение следует из анализа области интерпретации.

Исследование определенного нормального алгорифма $\mathbb{C}$ не позволит различать эти высказывания, относящиеся к пределам; мы получим, что $\mathbb{C}$ не применим как к n'_0, так и n''_0 без их различения.

2. Исследование предположения о существовании ограниченной последовательности не сходящейся к единице

Рассмотрим предел ограниченной последовательности $\{c^k(n'_0)\}$, удовлетворяющей высказыванию (1) предложения 1.1. Гипотетическое число n'_0 мы определяем по общей формуле (1.2), так что $n'_0 = a'_0 2^{m'_0}$. В данном случае последовательность $\{2^{m'_k}\}$ является ограниченной по определению гипотетического числа n'_0, поскольку выражение в квадратных скобках не может превышать единицу. Отсюда мы получаем отношение:

$$\{c^k(n'_0)\} < \{2^{m'_k}\} \leq \{2^M\}, \tag{2.1}$$

где M – число, определяемое как максимальное значение параметра m'_k, т.е. $M = \max\limits_k(\{m'_k\})$, так что последовательность $\{c^k(n'_0)\}$ можно рассматривать, как ограниченную числом 2^M. Свяжем максимальную оценку параметра с непосредственным его значением путем введения ошибки: $\Delta_{(M)k} = M - m'_k$.

Тогда для частичной суммы числового ряда s'_k мы получим следующую нижнюю оценку:

$$\underline{s'}_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2}, \tag{2.2}$$

нижнюю, поскольку $m_{i-1} \leq M$ – по определению, а $M + 2$ является степенью числа, меньшего единицы, так что $s'_k \geq \underline{s'}_k$.

Заметим, что получаемая частичная сумма $\underline{s}'_k$ является геометрической прогрессией; преобразуем запись к более удобной форме по формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$\underline{s}'_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^k - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right) \qquad (2.3)$$

Найдем предел последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \underline{s}'_k\right\}$:

$$\lim_{k\to\infty} \left({}^4/_3\right)^{-k+1} \underline{s}'_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \lim_{k\to\infty} \frac{\left({}^4/_3\right)^{k-k+1} - \left({}^4/_3\right)^{-k+1}}{\left({}^4/_3\right) - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \lim_{k\to\infty} \left(4 - 3 \cdot \left({}^3/_4\right)^{k-1}\right) =$$
$$4\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M}. \qquad (2.4)$$

Аналогичные рассуждения приведем и для верхней оценки, $\overline{s}'_k$. В этом случае мы полагаем, что параметр m'_k принимает минимальное возможное значение равное нулю. Получаем:

$$\overline{s}'_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{0+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^k - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right), \qquad (2.6)$$

$$\lim_{k\to\infty} \left({}^4/_3\right)^{-k+1} \overline{s}'_k = \lim_{k\to\infty} \left({}^4/_3\right)^{-k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^k - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1. \qquad (2.7)$$

Вполне очевидно, что предел последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$, если он существует, заключен в отрезке $\mathbb{Q}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{M}; 1\right]$, определенном на рациональных числах.

Сама же частичная сумма может быть выражена следующей формулой, принимая, что $m'_i = M - \Delta_{(M)i}$:

$$s'_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m'_{i-1}+2}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{M-\Delta_{(M)i-1}+2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} 2^{\Delta_{(M)i-1}}. \qquad (2.8)$$

Значение, принимаемое параметром m'_k, мы можем рассматривать, как значение некоторой функции, определенной на натуральных числах, т.е. $m'_k = f(n'_0, k)$. Мы не имеем явного значения этой функции, так как рассматриваем число о существовании которого делаем лишь предположение; тем не менее, последовательность $\{m'_k\}$ следует считать заданной, поскольку имеется закон нахождения произвольного ее члена, если будет предоставлено n'_0. Вместе с тем, можно использовать некоторые приближения, для которых значения этого параметра постоянны: $m'_k = f(n'_0, k)$ подменяется $m'_k(p) = f(n'_0) = const$. Приближение s'_k будем обозначать через $s'_k(p)$, так что параметр m'_k на любой итерации подменяется некоторым приближением в виде числа $p = \mathbb{N}[0, M]$. Очевидно, что в данном представлении $s'_k(0) = \overline{s}'_k$ и $s'_k(M) = \underline{s}'_k$, т.е. соответствуют верхней и нижней оценкам, определенных ранее.

Не представляет проблемы нахождение предела последовательности приближений $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k(p)\right\}$ по аналогии с верхней и нижней оценками:

$$\lim_{k\to\infty} \left({}^4/_3\right)^{-k+1} s'_k(p) = \lim_{k\to\infty} \left({}^4/_3\right)^{-k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{p+2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^k - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p. \quad (2.9)$$

Найдем для последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k(p)\right\}$ отношение соседних членов:

$$q_{s'_k(p)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k(p)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1-1} s'_{k-1}(p)} = \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^k - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2} \left(\frac{\left({}^4/_3\right)^{k-1} - 1}{\left({}^4/_3\right) - 1}\right)} = \frac{\left({}^4/_3\right)^{k-1} - \frac{3}{4}}{\left({}^4/_3\right)^{k-1} - 1} = 1 + \frac{1}{4\left(\left({}^4/_3\right)^{k-1} - 1\right)}. \quad (2.10)$$

Полученный результат показывает, что для всех приближений отношение соседних членов есть одна функция, зависящая от количества членов последовательности, однако последовательность в пределе можно рассматривать как геометрическую прогрессию:

$$\lim_{k\to\infty} q_{s'_k(p)} = 1. \quad (2.11)$$

Особо отметим, что полученный результат относится к функции приближений последовательности. Теперь же найдем отношение членов рассматриваемой последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$:

$$q_{s'_k} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k}{\left(\frac{3}{4}\right)^{(k-1)-1} s'_{k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}}{\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1-i} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}}} = 1 + \frac{2^{\Delta(M)k-1}}{\sum_{i=1}^{k-1} 2^{\Delta(M)i-1}}. \quad (2.12)$$

Иначе говоря, можно представить k-ый член последовательности посредством отношения к первому члену следующим образом:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} s'_1\right) \prod_{i=2}^{k} q_{s'_k}. \quad (2.13)$$

Полученное отношение указывает на монотонность последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$, она является неубывающей по (2.12); учитывая ее ограниченность по определению выражения в квадратных скобках, согласно условию Коши, мы делаем вывод об обязательной сходимости последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$, то есть, она имеет предел.

Однако это еще не дает противоречия гипотезе о свойстве n'_0, мы лишь исключили сценарий отсутствия предела для последовательности, образуемой числом n'_0. Но теперь мы можем воспользоваться теоремой о сумме пределов:

$$\lim_{k\to\infty} c^k(n'_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a' + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right] = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left(\frac{3}{4}\right)^k a' +$$
$$\lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k. \qquad (2.14)$$

Замечание 2.1

Вообще, сходимость последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$ можно также обосновать сходимостью последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \overline{s}'_k\right\}$, образованной мажорантным рядом, поскольку $\forall k(s'_k \leq \overline{s}'_k)$.

Считаем, что установление факта сходимости по формуле (2.14) вместе с функцией предела оценок ряда по (2.9) может быть достаточным для заключения о пределе, сходящимся к единице. Поскольку предел для $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$ существует, то данная последовательность может сходиться только к какой-либо своей оценке, т.е. $\exists p\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k(p)\right)$, поскольку множество значений $\{n'_k\}$ дискретно и ограничено по определению, оно конечно. Тогда:

$$\lim_{k\to\infty} c^k(n'_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a' + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right] = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\left(\frac{3}{4}\right)^k a' +$$
$$\lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k(p) = 0 + \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)}k-p}, \qquad (2.15)$$

что демонстрирует сходимость n'_0 к числу два в некоторой степени. Поскольку, по определению, число n'_k должно быть нечетным, то допустимая степень числа два равняется нулю, т.е. $n'_k = 2^0$, что дает противоречие определению такого рода числа по предложению 1.1.

Тем не менее, более демонстративным, полагаем, будет последующий путь рассуждений.

Предложение 2.1

Свойство гипотетического числа n'_0 можно интерпретировать, как наличие цикла длиной, или периодом, t в последовательности $\{c^k(n'_0)\}$, не содержащим единицы. Это свойство обусловлено определением данного числа, такого, что образует ограниченную последовательность. Иначе говоря, начиная с некоторого r получаем: $n'_0, c^1(n'_0), \cdots, c^r(n'_0), \cdots, c^{r+t}(n'_0), \cdots;$ – причем $c^r(n'_0) = c^{r+t}(n'_0), c^{r+1}(n'_0) = c^{r+t+1}(n'_0), \cdots$ и т.д. Формально, мы не будем исключать также минимальную длину цикла $c^r(n'_0) = c^{r+1}(n'_0)$, при $c^k(n'_0) \neq 1$, т.е. при $t = 1$. Подытожим, высказывание (1) предложения 1.1 может быть заменено семантически эквивалентной формой: $\exists t \exists r \forall k \left(c^{r+k}(n'_0) = c^{r+k+t}(n'_0)\right)$.

Определение 2.1

Частичную сумму ряда s'_k мы формально относим к самой сумме ряда S'. Пусть начиная с члена $c^r(n'_0)$ последовательность образует цикл, так что остаток ряда, начиная с этого члена мы обозначим S'_t. Возможную конечную последовательность частичных сумм ряда S', не содержащую циклов, мы обозначим S'^*. Исходя из данного определения очевидно отношение: $S' = S'^* + S'_t$.

Анализируя предел последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$, мы можем отбросить любое конечное количество начальных членов ряда:

$$\lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)k}} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{M-\Delta_{(M)i-1}+2}} = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)k}} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{M-\Delta_{(M)i-1}+2}} + \sum_{i=r}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{M-\Delta_{(M)i-1}+2}}\right) = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)k}} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=r}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{M-\Delta_{(M)i-1}+2}}.$$

Этот же результат мы можем получить и в интерпретации теории нормальных алгорифмов. Пусть $c^r(n'_0)$ число с которого происходит зацикливание алгоритма, $\mathbb{C}: n'_0 \models c^r(n'_0) \models c^{r+t}(n'_0) \cdots$, $c^r(n'_0) = c^{r+t}(n'_0)$; так что мы можем отбросить конечное число итераций, приводящих от n'_0 к $c^r(n'_0)$ и сразу приписать числу n'_0 свойство цикличности. Единственность цикла следует из ограниченности последовательности, определяемой на дискретном множестве натуральных чисел, образованной числом n'_0.

Промежуточные рассуждения о частичных суммах ряда

Нам приходится обращаться к замечательной формуле о сумме членов геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия задается в виде следующей рекурсивной формулы: $q^{k+1} = qq^k$. Обычно, для формулы суммы приписывают некоторый постоянный коэффициент, так что рассматривается сумма членов $\{aq^k\}$; в нашем упрощенном рассуждении мы примем $a = 0$ и $q \neq 1$.

Представленные формулы будут справедливы для всех рациональных чисел больше нуля, кроме единицы. Мы будем выражать формулы в виде конечных сумм. Формально, запишем формулу для суммы членов конечной геометрической прогрессии:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \sum_{i=1}^{k} q^{i-1} = \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

В качестве знаменателя прогрессии мы можем представить число в некоторой произвольной степени t, так что получим равносильную запись:

$$(q^t)^0 + (q^t)^1 + (q^t)^2 + \cdots + (q^t)^{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (q^t)^{(i-1)} = \frac{(q^t)^k - 1}{q^t - 1}.$$

В случае рассмотрения рядов, то есть бесконечных сумм, мы можем обратиться к теореме, согласно которой, от перестановки членов сходящегося положительного ряда сходимость его не нарушается, а сумма не меняется. Поскольку мы можем подразумевать также несходящиеся в пределе последовательности частичных сумм, мы выскажем, что коммутативный закон относительно операции сложения для рассматриваемых последовательностей не нарушается при переходе к пределам. Формулировку, тем не менее, будем осуществлять на конечных частичных суммах.

Произведем группировку членов суммы геометрической прогрессии особым образом и произведем довольно подробные преобразования:

$$\left(q^0 + q^{0+t} + q^{0+2t} + \cdots + q^{0+(k-1)t}\right) + \left(q^1 + q^{1+t} + \cdots + q^{1+(k-1)t}\right) + \cdots + \left(q^{(t-1)} + q^{(t-1)+t} + \cdots + q^{(t-1)+(k-1)t}\right) = \sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} + \sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)+1} + \sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)+2} + \cdots + \sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)+(t-1)} =$$
$$\sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} + q\sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} + q^2\sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} + \cdots + q^{(t-1)}\sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} =$$
$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)+(j-1)} = \sum_{i=1}^{k} q^{t(i-1)} \sum_{j=1}^{t} q^{(j-1)} = \frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1} + q\frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1} + q^2\frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1} + \cdots +$$
$$q^{t-1}\frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1} = \frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1}\sum_{j=1}^{t} q^{(j-1)} = \frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1}\frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Нетрудно убедиться, для того чтобы получить конечный результат, изначально мы взяли $n = k \cdot t; n, k, t \in \mathbb{N}$ членов простейшей геометрической прогрессии для суммирования. Таким образом, мы можем записать для любых натуральных $k, t > 0$:

$$\sum_{i=1}^{kt} q^{i-1} = \frac{(q^t)^k - 1}{(q^t) - 1} \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Данные отношения нам потребуется для оправдания преобразований над рассматриваемой последовательностью частичных сумм.

Вернемся к обсуждению предела последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k\right\}$. Возьмем циклический отрезок последовательности $\{s'_k\}$ и произведем группировку одинаковых членов. Поскольку длина цикла есть конечное число, мы получим конечное число рядов. Исходя из понятия цикла и его длины t, мы можем считать одинаковыми коэффициенты $2^{\Delta_{(M)(i-1)+nt}}$, $n \in \mathbb{N}$. Но, а поскольку эти коэффициенты одинаковые, мы можем сократить их наименование, ограничившись лишь конечным возможным количеством: $2^{\Delta_{(M)(i-1)+nt}} = 2^{\Delta_{(M)(t)}}$. Формально это можно обосновать применением правила обобщения: высказывание $\left(2^{\Delta_{(M)}}(t) \equiv 2^{\Delta_{(M)}}(t)\right)$ является тавтологией, $\left(\forall i \forall n 2^{\Delta_{(M)}}(t, i, n) \equiv 2^{\Delta_{(M)}}(t)\right)$ по правилу обобщения (Gen). В нашей интерпретации это высказывание истинно, поскольку члены цикла, отстоящие друг от друга на расстояние периода цикла равны по определению: количество взаиморазличных членов бесконечной циклической последовательности ограничено длиной цикла. Возьмем частичную сумму ряда, кратную периоду изменения $2^{\Delta_{(M)(i-1)}}$ и произведем преобразования, рассмотренные ранее:

$$s'_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{i=1}^{kt} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} 2^{\Delta_{(M)i-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{t(i-1)+(j-1)} 2^{\Delta_{(M)(i-1)j}} =$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{t(i-1)+(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{t(i-1)} \sum_{j=1}^{t} \left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}} =$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2} \frac{\left({}^4/_3{}^t\right)^k - 1}{\left({}^4/_3{}^t\right) - 1} \sum_{j=1}^{t} \left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}}. \qquad (2.16)$$

Запишем выражение для предела последовательности $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2}\frac{\left({}^{4}/_{3}{}^{t}\right)^{k}-1}{\left({}^{4}/_{3}{}^{t}\right)-1}\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}} =$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2}\frac{\left({}^{4}/_{3}{}^{t-1}\right)^{k}-{}^{3}/_{4}{}^{k}}{\left({}^{4}/_{3}{}^{t}\right)-1}\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}}. \tag{2.17}$$

Значение предела мы получили в виде функции от параметра t: $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = f(t)$. Считаем очевидным, что единственное допустимое значение t, которое обеспечивает сходимость предела, является $t = 1$. Но поскольку мы уже выяснили ранее, что последовательность должна сходиться, мы подставим данное значение для получения значения предела:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \lim_{k\to\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2}\frac{\left({}^{4}/_{3}{}^{t-1}\right)^{k}-{}^{3}/_{4}{}^{k}}{\left({}^{4}/_{3}{}^{t}\right)-1}\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}}\Bigg|_{t=1} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{M+2}\frac{(1)^{k}-{}^{3}/_{4}{}^{k}}{{}^{1}/_{3}}\sum_{j=1}^{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{(j-1)} 2^{\Delta_{(M)j}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{M}\left((1)^{k}-{}^{3}/_{4}{}^{k}\right)2^{\Delta_{(M)1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M} 2^{\Delta_{(M)1}}. \tag{2.18}$$

Здесь $\Delta_{(M)1}$ означает следующее: мы представляем, что мы не знаем, к какому числу стремится отклонение от максимальной оценки M, только знаем, что это число должно быть единственное.

Теперь мы можем явно определить предел последовательности $\{c^k(n'_0)\}$, что, собственно, является целью настоящего параграфа:

$$\lim_{k\to\infty} c^k(n'_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)k}}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s'_k = \lim_{k\to\infty} 2^{M-\Delta_{(M)k}}\left(\frac{1}{2}\right)^{M} 2^{\Delta_{(M)1}} = 1, \tag{2.19}$$

где $\Delta_{(M)k} = \Delta_{(M)1}$, поскольку мы выяснили, что при значении k (количество итераций алгоритма Коллатца), стремящимся к бесконечности, $\Delta_{(M)i-1}$ может принимать единственное значение.

Мы получили противоречие высказыванию (1) предложения 1.1. Такого числа, как n'_0, с соответствующими свойствами не существует, поскольку по определению, оно должно опровергать гипотезу Коллатца, но при этом оно дает последовательность, сходящуюся к единице.

3. Исследование предположения о существовании расходящейся к бесконечности последовательности

Запишем последовательность, образованную числом n''_0 с определенными, согласно предложению 1.1, свойствами:

$$\{c^k(n''_0)\} = \{2^{m''_k}\}\left[\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k} a''_0\right\} + \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}\right], \tag{3.1}$$

где $n''_0 = a''_0 2^{m''_0}$ по формуле (1.2); s''_k – частичная сумма числового ряда, соответствующая числу n''_0.

Для обеспечения выполнения условий высказывания (2), а именно $C(n''_0) = \infty$, необходимо принятие следующего отношения:

$$\lim_{k\to\infty} 2^{m''_k} = \infty, \tag{3.2}$$

так как выражение в квадратных скобках не может превышать единицы по определению, т.е. ограничено.

Дадим верхнюю оценку последовательности $\{2^{m''_k}\}$. Поскольку по определению для m_k вытекает свойство $0 \le m_{k+1} \le m_k + 1$, то можно сказать, что $\{2^{m_k}\}$ ограничена последовательностью $\{2^{m_0+k}\}$, что также применимо к гипотетической последовательности, образованной числом m''_0; получается, что $\{2^{m''_k}\} \le \{2^{m''_0+k}\}$.

Определим нижнюю оценку частичной суммы ряда s''_k, заменив параметр m''_{i-1} его верхней оценкой $(m''_0 + i - 1)$:

$$\underline{s}''_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{(m''_0+i-1)+2}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{2^{(i-1)}} \frac{1}{2^{m''_0+2}} = \frac{1}{2^{m''_0+2}} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{2^{m''_0+2}} \left(\frac{({}^2/_3)^k - 1}{({}^2/_3) - 1}\right) = \frac{1}{2^{m''_0+2}} 3\left(1 - ({}^2/_3)^k\right); \tag{3.3}$$

выражение ряда приведено к его сумме по формуле для суммы геометрической прогрессии. Данная оценка является нижней, поскольку максимальная оценка параметра m''_{i-1} стоит в знаменателе.

Для последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ мы можем получить соответствующую оценку посредством нижней оценки ряда:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \underline{s}''_k = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{2^{m''_0+2}} 3\left(1 - ({}^2/_3)^k\right) = \frac{1}{2^{m''_0}}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - ({}^2/_3)^k\right) = \frac{1}{2^{m''_0}}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right). \tag{3.4}$$

Согласно условию существования n''_0, параметр m''_{i-1} должен стремиться к бесконечности; пока мы ограничили этот процесс верхней оценкой, $\overline{m}''_{i-1} = m''_0 + i - 1$. Вместе с тем мы можем усматривать и иной характер; для этого введем параметр $p_{(m)} \in \mathbb{N}$: $m''\left(p_{(m)}\right)_{i-1} = m''_0 + \left\lfloor \frac{i-1}{p_{(m)}} \right\rfloor$, – где $\left\lfloor \frac{i-1}{p_{(m)}} \right\rfloor$ – целочисленное округление выражения $\frac{i-1}{p_{(m)}}$ в меньшую сторону. Верхнюю оценку мы можем интерпретировать, как: $\overline{m}''_{i-1} = m''(1)_{i-1}$. Вместе с тем, рассмотрение параметра m''_{i-1} как функции позволит получить функцию оценок последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ посредством замены ряда на $s''_k\left(p_{(m)}\right)$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m''\left(p_{(m)}\right)_{i-1}+2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{m''_0+2}} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{2^{\left\lfloor\frac{i-1}{p_{(m)}}\right\rfloor}}. \quad (3.5)$$

Будем считать очевидным:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\left\lfloor\frac{i-1}{p_{(m)}}\right\rfloor}{\frac{i-1}{p_{(m)}}} = 1, \quad (3.6)$$

так что при предельном рассмотрении меньшее округление может быть заменено на округляемое выражение. Причем, постановка задачи также позволяет нам заменять сам ряд любым его остатком, так что получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{m''_0+2}} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{2^{\frac{i-1}{p_{(m)}}}} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{m''_0+2}} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{\left(2^{\frac{1}{p_{(m)}}}\right)^{i-1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{m''_0+2}} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)^{i-1} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{m''_0+2}} \left(\frac{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)^{k} - 1}{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right) - 1}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{m''_0}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right) - 1} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)^{k} - \left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right) = 0. \quad (3.7)$$

Данный результат также означает, что любые оценки сходимости числа m''_k дают единственный предел, равный нулю. Можно сказать иначе: можно взять такое число $p_{(m)}$, что последовательность $\left\{m''\left(p_{(m)}\right)_{i-1}\right\} \leq \{m''_{i-1}\}$, т.е. будет являться нижней оценкой последовательности $\{m''_{i-1}\}$.

Если мы предположим, что не сможем подобрать $p_{(m)}$, чтобы $\left\{m''\left(p_{(m)}\right)_{i-1}\right\} \leq \{m''_{i-1}\}$, – это даст противоречие определению свойств числа n''_0, поскольку тогда последовательность, образованная числом n''_0, не будет расходиться к бесконечности.

Таким образом, мы можем сделать заключение о сходимости к нулю последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ для произвольного n''_0 на основании теоремы, что рассматриваемая последовательность заключена между двумя последовательностями, сходящимися к одному пределу.

Замечание 3.1

Вполне аналогичным будет также следующее рассуждение: для последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_{k'}\right\}$, где k' – какое-либо натуральное число из тех значений, которое принимает k, которая будет монотонно убывающей и имеющая ограничение, что наделяет эту подпоследовательность свойством сходимости по теореме. Однако сходимость подпоследовательности еще не означает сходимости самой рассматриваемой последовательности. Но учитывая, что в рассматриваемой последовательности мы не можем каким-либо образом выделить неубывающую подпоследовательность, поскольку это приведет к противоречию определения n''_0, то исходную последовательность нам следует рассматривать, как состоящую только из монотонно убывающих ограниченных подпоследовательностей. Противоречие обусловлено требованием (3.2), или $\lim_{k\to\infty} m''_k = \infty$. Так что последовательность $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ однозначно должна рассматриваться как сходящаяся.

Очевидно, что однозначно сходится и последовательность $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k} a''_0\right\}$ для любого n''_0, запишем формально:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} a''_0 = 0. \tag{3.8}$$

Исходя из теоремы о сумме пределов сходящихся последовательностей, предел последовательности выражения в квадратных скобках для любого n''_0 сходится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{k} a''_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right] = 0. \tag{3.9}$$

В результате, рассматривая последовательность $\{c^k(n''_0)\}$, мы приходим к неопределенности типа $\infty[0]$ в контексте формулы разложения (1.13). Задачей предшествующего рассуждения можно считать выяснение именно этого факта.

Определение 3.1

Перепишем формулу предела (1.13) с включением параметра z_k:

$$C(n_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{m_k - z_k} \left[\!\left[2^{z_k} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}} \right] \right]\!\right]. \tag{3.10}$$

Выражение в двойных квадратных скобках есть параметр a для некоторого k-го нечетного числа последовательности – n_k, образованного n_0; для удобства рассуждений приведем поясняющие записи:

$$c(2^{m_0}[\![a_0]\!]) = 2^{m_1} 2^{-z_1} \left[\!\left[2^{z_1} \left(\frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}} \right) \right]\!\right] = 2^{m_1 - z_1} [\![a_1]\!]; \tag{3.11}$$

$$C(n_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{m_k - z_k} [\![a_k]\!]. \tag{3.12}$$

Данный параметр задан конструктивно для любого n_0, передаваемого в алгоритм; на каждой итерации алгоритма он определяется вполне очевидным образом. Заметим, что данное представление действительно для произвольного n_0, что также очевидно в интерпретации работы нормального алгорифма $\mathbb{C}$: $a_0 2^{m_0} \vdash a_1 2^{m_1 - z_1} \vDash a_k 2^{m_k - z_k}$.

Целью настоящего представления является определение ограничения выражения в двойных квадратных скобках тождественным ограничению параметра a_0, т.е. $[\![a_k]\!] \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Будем считать, что на каждой итерации вводится поправка $\Delta_{(z)k}$ в сумме составляющая параметр z_k. Поясним на выводе частичной суммы ряда аналогично выводу (1.12), но с учетом нового введенного параметра. Заметим, что рассуждения мы будем вести в контексте произвольно взятого числа, а не связанного гипотезой. Получаем:

$$c^1(n_0) = 2^{m_1 - z_1} \left[\!\left[2^{z_1} \left[\frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}} \right] \right]\!\right] = 2^{m_1 - \Delta_{(z)1}} \left[\!\left[2^{\Delta_{(z)1}} \left[\frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}} \right] \right]\!\right],$$

$$c^2(n_0) = 2^{m_2 - \Delta_{(z)1} - \Delta_{(z)2}} \left[\!\left[2^{-\Delta_{(z)1} - \Delta_{(z)2}} \left[\frac{3}{4} \left[\!\left[2^{\Delta_{(z)1}} \left[\frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{2^{m_0+2}} \right] \right]\!\right] + 2^{\Delta_{(z)1}} \frac{1}{2^{m_1+2}} \right] \right]\!\right] =$$
$$2^{m_2 - \Delta_{(z)1} - \Delta_{(z)2}} \left[\!\left[2^{-\Delta_{(z)1} - \Delta_{(z)2}} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \frac{1}{2^{m_0+2}} + \frac{1}{2^{m_1+2}} \right] \right]\!\right];$$

и далее для произвольного члена:

$$c^k(n_0) = 2^{m_k} \prod_{i=1}^{k} 2^{-\Delta_{(z)i}} \left[\!\left[\prod_{i=1}^{k} 2^{\Delta_{(z)i}} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}} \right] \right]\!\right] =$$
$$2^{m_k - z_k} \left[\!\left[2^{z_k} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{-i+1} \frac{1}{2^{m_{i-1}+2}} \right] \right]\!\right].$$

Формально запишем:

$$z_k = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{(z)i}. \tag{3.13}$$

В данном выражении не составит труда убедиться в идентичности формулировок, представляющих собой алгебраическую тавтологию; в то же время, вносится новая переменная с некоторой семантической составляющей. Естественным образом вытекают ограничения на нововведенный параметр: $\Delta_{(z)i} \geq 0$. Таким образом, $\forall k(z_k \leq z_{k+1})$; заключаем, что последовательность $\{z_k\}$ является монотонной, а именно, неубывающей.

Пример 3.1

Рассмотрим пример алгоритмических преобразований числа $n_0 = 19$, раскрывающего предлагаемое определение. Данный пример удобно рассматривать в контексте примеров 1.1, 1.2. Приведем последовательность, образованную алгоритмом Коллатца в соответствующем определению 3.1 представлении:

$$\mathbb{C}\text{:}\ 19 = 2^5 \left[\!\left[\frac{19}{32}\right]\!\right] \vdash c^1(19) = 2^{6-1} \left[\!\left[2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^1 \frac{19}{32} + \left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \frac{1}{2^{5+2}}\right)\right]\right]\!\right] \vdash c^2(19) = 2^{5-1} \left[\!\left[2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{19}{32} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \frac{1}{2^{5+2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{1-2} \frac{1}{2^{6+2}}\right)\right]\right]\!\right] \vdash c^3(19) = 2^{6-1} \left[\!\left[2\left[\frac{17}{64}\right]\right]\!\right] \vdash c^4(19) = 2^{6-2} \left[\!\left[2^2\left[\frac{13}{64}\right]\right]\!\right] \vdash c^5(19) = 2^{5-2} \left[\!\left[2^2\left[\frac{5}{32}\right]\right]\!\right] \vdash c^6(19) = 2^{3-3} \left[\!\left[2^3\left[\frac{1}{8}\right]\right]\!\right].$$

Тогда, в контексте определения 3.1 мы можем рассматривать предел последовательности $\{c^k(n''_0)\}$, связанной предложением 1.1, как раскрытие неопределенности вида: $\infty[\![\infty[0]]\!]$. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{m''_k - z''_k} = \infty$, исходя из условий определения n''_0; в то же время, $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{z''_k} = \infty$, поскольку, как было показано, последовательность $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^k a''_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ должна сходиться к нулю, а выражение в двойных квадратных скобках должно принимать отличное от нуля численное значение, ограниченное условием, накладываемым на значения параметра a.

Мы переходим к рассмотрению предела последовательности $\left\{2^{m''_k - z''_k} \left[\!\left[2^{z''_k} \frac{n''_k}{2^{m''_k}}\right]\!\right]\right\}$. Исходя из определения n''_0, очевидны следующие отношения, или высказывания о пределах последовательностей, составляющих выражение в двойных скобках: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^{z''_k}}{2^{m''_k}} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{n''_k}{2^{m''_k}} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{z''_k} = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} n''_k = \infty$.

Напомним, что согласно (3.7) при рассмотрении предела мы можем заменить $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$ оценкой в виде функциональной последовательности $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\big(p_{(m)}\big)\right\}$, которая в зависимости от параметра $p_{(m)}$ является как верхней $(p_{(m)} =$

$p_{(m)max}$: $\forall k\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)max}\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right)$), так и нижней оценкой $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$, т.е. ($p_{(m)} = 1$: $\forall k\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k(1) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right)$); но а поскольку для любого $p_{(m)}$ осуществляется схождение к одному пределу, то к этому же пределу сходится и оцениваемая последовательность $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\right\}$. Акцентируем внимание, что замена $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k$ на $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right)$ осуществляется в контексте нахождения предела, тогда это допустимо по теоремам о пределах.

Нахождение же оценки $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right)\right\}$ осуществлялось, исходя из последовательности параметра $\{m''_k\}$, которая, согласно определению нахождения этого параметра, подменялась на ее оценку $\left\{m''\left(p_{(m)}\right)_k\right\}$, которая также, в зависимости от значения конечного параметра $p_{(m)}$, может являться верхней или нижней оценкой $\{m''_k\}$. Мы можем записать:

$$m''\left(p_{(m)}\right)_k = m''_0 + \left\lfloor\frac{k}{p_{(m)}}\right\rfloor, \tag{3.14}$$

что также означает $\exists p_{(m)} \forall k\left(\left(m''_0 + \left\lfloor\frac{k}{p_{(m)}}\right\rfloor\right) \leq m''_k\right)$ и также $\forall k\left(\left(m''_0 + \left\lfloor\frac{k}{1}\right\rfloor\right) \geq m''_k\right)$; согласно (3.6) в контексте нахождения предела мы можем использовать запись без округления, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} m''\left(p_{(m)}\right)_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(m''_0 + \frac{k}{p_{(m)}}\right)$.

Аналогичным же образом дадим функциональную оценку параметра z''_k. Мы заключаем, что последовательность $\{z''_k\}$, являющаяся частным гипотетическим случаем последовательности $\{z_k\}$, должна также быть монотонной неубывающей. Исходя из этого положения, дадим функциональную оценку на основании некоторого целочисленного параметра $p_{(z)}$:

$$z''_k\left(p_{(z)}\right) = \left\lfloor\frac{k}{p_{(z)}}\right\rfloor. \tag{3.15}$$

Мы приняли во внимание, что по определениям 1.1 и 3.1, $z''_0 = 0$. В предельном переходе мы можем заменять округленное значение округляемым: $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{z''_k\left(p_{(z)}\right)} = \lim\limits_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{p_{(z)}}} = \infty$.

Для оценки значений параметра $p_{(z)}$ учтем требование $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{m''_k - z''_k} = \infty$, которое должно выполняться и для оценок, что можно выразить следующим образом:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left\lfloor\frac{k}{p_{(m)}}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{k}{p_{(z)}}\right\rfloor\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{k\left(p_{(z)} - p_{(m)}\right)}{p_{(m)}p_{(z)}} = \infty, \tag{3.16}$$

что, очевидным образом достигается за счет обеспечения условия $p_{(z)} > p_{(m)}$, так что $p_{(z)}$ может принимать значения $p_{(z)} \geq 2$.

Перепишем формулу предела (3.10) с заменой параметров функциями их оценок:

$$C(n''_0) = \lim_{k\to\infty} 2^{m''_0+\frac{k}{p_{(m)}}-\frac{k}{p_{(z)}}} \left[\!\left[2^{\frac{k}{p_{(z)}}} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a''_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right) \right] \right]\!\right]. \tag{3.17}$$

Исследуем последовательность выражения в двойных квадратных скобках на предмет сходимости:

$$\lim_{k\to\infty} [\![a''_k]\!] = \lim_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{p_{(z)}}} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k a''_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} s''_k\left(p_{(m)}\right) \right] = \lim_{k\to\infty} \left(2^{\frac{k}{p_{(z)}}} \left(\frac{3}{4}\right)^k a''_0 + \right.$$

$$\left. \left(2^{\frac{1}{p_{(z)}}}\right)^k \frac{1}{2^{m''_0}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)-1} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}}} \right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4} \right)^k a''_0 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^{m''_0}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)-1} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}}} \right)^k - \left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4} \right)^k \right) \right). \tag{3.18}$$

Выражение $\left(\frac{1}{2^{m''_0}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(m)}}}}\right)-1} \frac{1}{3} \right)$ мы будем рассматривать просто, как некоторую постоянную, выражаемую через параметры m''_0 и $p_{(m)}$, обозначим $b\left(m''_0, p_{(m)}\right)$. В зависимости от того, какое значение будет принимать $p_{(m)}$, значение выражения может быть как положительным, так и отрицательным; мы же будем писать $\pm b\left(m''_0, p_{(m)}\right)$, акцентируя внимание на этих возможностях.

Последовательность $\left\{ \left(\frac{2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}}} \right)^k \right\}$ сходится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}}} \right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p_{(m)}}-\frac{1}{p_{(z)}}}} \right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{p_{(z)}-p_{(m)}}{p_{(m)}p_{(z)}}}} \right)^k = 0, \tag{3.19}$$

поскольку должно выполняться условие (3.16).

Анализ предела (3.18) может быть упрощен:

$$\lim_{k\to\infty}[\![a''_k]\!] = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k a''_0 \pm \left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k b\big(m''_0, p_{(m)}\big) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k \Big(a''_0 \pm b\big(m''_0, p_{(m)}\big)\Big). \quad (3.20)$$

Здесь мы, наконец-то, приходим к противоречию. Независимо от того, какое допустимое значение принимает параметр $p_{(z)}$, последовательность $\{a''_k\}$ имеет монотонный характер, т.е. она либо невозрастающая, либо неубывающая; в предельном же приближении эта последовательность является убывающей либо возрастающей, соответственно. Согласно теореме о последовательностях, каждая ограниченная монотонная последовательность имеет предел, следовательно, сходится к какому-то определенному числу, обозначим его $\lim_{k\to\infty}[\![a''_k]\!] = a''_{\lim}$. Существование предела последовательности в контексте задачи равносильно утверждению о существовании отрезка последовательности с одинаковыми членами, т.е. $\{a''_{\lim}\}$ есть отрезок последовательность $\{a''_k\}$. Это также означает, исходя из требования существования числа n''_0, что должен образовываться отрезок последовательности $\{2^{m''_k - z''_k} a''_{\lim}\}$, но в контексте алгоритма Коллатца – это одно и то же число, следовательно, последовательность, образованная числом n''_0, не расходится к бесконечности. Это дает противоречие определению n''_0, что означает, что числа со свойством согласно высказыванию (2) предложения 1.1 не существует.

Замечание 3.2

Сценарий, предполагающий бесконечное приближение последовательностью $\{a''_k\}$ значения $a''_{\lim}$, притом не достигая его, несостоятелен.

Рассмотрим предел последовательности $\left\{\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k\right\}$ вне контекста алгоритма Коллатца:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k\Bigg|_{p_{(z)}=2} = \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left.\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{p_{(z)}}}}{4}\right)^k\right|_{p_{(z)}>2} = 0. \tag{3.21}$$

Отсюда видно, что предел (3.20) ме может быть сколь угодно близким к границам определения параметра a_k, следовательно, необходимо либо принятие противоречия определению a_k, либо принятие сходимости предела к ограничению по определению a_k. Если мы предположим, что последовательность $\{a''_k\}$ убывающая, то нижняя граница советует числу $\frac{1}{2}$, однако, согласно определению, такое значение параметр принимать не может. Остается предположить, что последовательность $\{a''_k\}$ возрастает; при этом она ограничивается числом 1, допустимым для параметра, так что $a''_{\lim} = 1$. Но это означает сходимость последовательности и подтверждение гипотезы Коллатца, что противоречит определению n''_0.

Поскольку все утверждения предложения 1.1 сведены к противоречию, предлагаем считать гипотезу Коллатца доказанной методами теории последовательностей.

Список литературы

1. Lagarias J.C. The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem. American Mathematical Soc., 2010, 344 p.
2. Lagarias J.C. The 3x+1 Problem: An Annotated Bibliography (1963-1999). Preprint on arXiv [arxiv.org/abs/math/0309224]
3. Lagarias J.C. The 3x+1 problem and its generalizations Amer. Math. Monthly 92 (1985) 3-23.
4. The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture. Veritasium, YouTube channel. URL: https://www.youtube.com/watch?v=094y1Z2wpJg
5. Guy R. K. Don't try to solve these problems! American Math. Monthly 90 (1983), 35. [Reprinted in pp. 231-239: The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem. Edited by J. C. Lagarias.]