# Векторный потенциал и локальные вращающиеся системы отсчета

Зафар Туракулов

1 февраля 2024 г.

**Аннотация**

Термин «вращение» используется для обозначения различных явлений и его смысл выбирается в зависимости от контекста, заданного областью науки, в которой он применен в данном конкретном случае. Показано, что во всем разнообразии своих проявлений вращение может быть как локальным, так и глобальным. Локальные вращения могут формировать неголономные поля локальных систем отсчета и в этом качестве они интересны с точки зрения понятия гравимагнитного заряда. Показана также взаимосвязь между такими полями и понятием векторного потенциала как выражением такого неголономного поля локальных вращающихся систем. В качестве источников векторного и ко-векторного потенциалов рассмотрены вращающиеся электрический заряд масса, а также гипотетические магнитный и гравимагнитный заряды, называемые также монополями. Решение одной из задач движения частиц в них, а именно – поле магнитного монополя, полученное в XIX в., приведено, из трех остальных решаются только три, их решения приведены.

## 1 Введение

Термин «вращение» используется в различных значениях в зависимости от контекста. Так, в геометрии он обычно означает поворот на определенный угол в определенном направлении. В механике – он означает собственно вращение какого-либо объекта собычно с определенной угловой скоростью. В физике он часто связан с вращающейся системой отсчета и проявляется в динамике, поэтому ассоциируется с полем, генерирующем какие-то силы. Это последнее значение особенно важно в астрофизике, особенно если учитывется эффект увлечения систем отсчета гравитационным полем вращающейся материи, поэтому в данном случае оно действительно представляет собой в некотором смысле силовое поле. Таким образом, в геометрии вращение никакого поля не представляет, в механике – всвязи с ним можно для упрощения учета вращения вводить некоторое вспомогательное поле, а в физике оно в некоторых случаях действительно представляет собой вполне определенное силовое поле, выражающее геометрию пространства-времени, как это происходит в пространстве-времени Тауба-НУТ и Керра. В настоящей работе оно рассматривается именно в этом контексте. Необходимость в таком рассмотрении возникает всвязи с нашими новыми подходами к задачам теории гравитации и астрофизики. Однако, начнем с простейших понятий.

Согласно самым естественным представлениям, вращение задано осью и угловой скоростью. Ось вращения – это прямая, точки которой данное вращение оставляет неподвижными, кроме них инвариантными относительно денного вращения являются плоскости, ортогональные ей. Таким образом, вращение – это движение всего пространства, т.е. глобальное. Возможно, формулируя свой принцип, Э. Мах представлял себе именно такое вращение. Однако, если, согласно этому принципу, инерциальность или неинерциальность данной системы определяется вращением удаленных масс, то в этом смысле интересно рассмотреть вращение галактики как средоточие таких удаленных масс. Поскольку ее вращение дифференциально, неясно, какую именно угловую скорость для какой-либо своей точки оно задает. Какой бы она ни была, она явно не одна и та же на всем галактическом диске. Это означает, что для разных малых участков диска можно ввести только локальные инерциальные системы, которые в то же время вращаются относительно друг друга. Так появляется понятие локальной вращающейся системы.

Пока гравитационное поле представлялось физикам скалярным, как в теории Г. Нордстрема [1], никакой связи между ним и понятием локальной вращающейся системой отсчета усмотреть было невозможно. Однако после того, как А. Эйнштейн показал, что оно не может быть выражено одним скаляром и составил свой уравнение [2], такая связь появилась в форме предположения о существовании грвитационого аналога магнитного поля. Его подтвердили Й. Лензе и Х. Тирринг, построив приближенное решение уравнения Эйнштейна для поля локализованной вращающейся массы [3]. Оказалось, что ее вращение вносит эффект, похожий на появление такого аналога. Точное решение для такого же источника было найдено значительно позже и оно здесь обсуждаться не будет, поскольку в настоящей работе речь идет прежде всего о нерелятивистской гравитации. До того, как это решение было найдено, тема получила важное развитие в рамках обычных классических представлений.

Следует отметить, что порождение поля движением масс само по себе еще не делает его аналогом магнитного, которое порождено движением зарядов. Поле, появившееся в решении Лензе-Тирринга явно отличается от магнитного прежде всего тем, что действует на покоящуюся частицу, вовлекая ее во вращение, в котором участвуеи его источник, тогда как магнтное на покоящийся заряд не действует. Таким образом, гравимагнитное поле прежде всего вовлекает частицу во вращение и только во вторую очередь порождает силу Кориолиса, похожую на магнитную. А это, в свою очередь, означает, что оно задается не ко-векторным, как магнитное, а векторным потенциалом. Иными словами, если без него система отсчета, в которой находится точка, координаты которой постоянны, была бы инерциальной, в ее присутствии законы механики в не таковы, как если бы она двигалась с в некотором поле скоростей $\vec{V}$, соответствующем некоторой вращающейся системе отсчета. Собственно это поле и есть векторный потенциал которым задано гравимагнитное поле.

# 2 Об используемом математическом аппарате

Абсолютному большинству физиков-теоретиков известен только один математический аппарат, оперирующий понятием вектора и подобными ему, является тензорный анализ, в котором никакого различия между вектором и ко-вектором не проводится. В рамках этого построения в таком различении никакой необходимости нет, поскольку в действительности, в нем ни тот ни другой ни фигурирует, вместо них используются только их компоненты. Все операции над ними и вобщем случае над тензорами, проводятся только в компонентной форме и определяются метрическим тензором. Достоинства тензорного анализа всегда демонстрируются в декартовых координатах, в которых его недостатки не видны; в криволинейных координатах он практически непригоден, т.к. операции векторного анализа такие, как ротор, принимают безнадежно сложный вид и из-за этого векторы приходится подменять скалярами, просто отождествляя их компоненты со скалярами. Так, уравнение магнитостатики

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J}$$

подменяется ошибочным

$$\Delta A^i = J^i,$$

в котором компоненты и векторного потенциала и плотности тока привязаны к глобальному поля реперов, заданному какой-либо декартовой системой координат, даже если само построение проводится, скажем, в сферических [4]. Ошибочное уравнение влечет ошибочные следствия, такие, как прежде всего, «закон Био-Савара-Лапласа», к которому ни один из них никакого отношения не имеет [5]. Ошибочность этого «закона» не разоблачена до сих пор только потому, что интеграл, входящий в этот «закон», еще никому не удалось взять, хотя разоблачить ее можно было и без этого.

Такое грубое искажение действительности – дань господству тензорного векторного и анализа и, возможно, неспособностью большинства физиков-теоретиков представлять себе векторы в пространстве, тогда как тензорный анализ, не требуя никакой способности что-либо себе представлять, дает им единственную возможность участвовать в деле. Вернуться к действительности можно только одним путем – отказаться от тензорного анализа в пользу другого математического аппарата, в основе которого лежат именно эта способность, и понятие ортонормированного репера. В рамках этой конструкции не отличать вектор от ко-вектора уже невозможно и единственной формой выражения и тех и других оказывается внешнее дифференциальное исчисление, которое и используется во всех наших работах. Оно же естественным образом содержит операции, знакомые всем из векторного анализа либо в виде безкоординатных обозначений, либо только в декартовых координатах, но без ограничения на этот тривиальный случай. Таким образом, исчисление внешних дифференциальных форм, примененное к полям ортогональных реперов, является единственным математическим аппаратом, пригодным для использования в теории поля.

Хотя внятных изложений этого исчисления в литературе нет, излагать его в статье чисто исследовательского содержания тоже неуместно, хотя какие-то отдельные пояснения будут даны. Поэтому ее содержание несколько выпадает из привычного контекста публикаций по теории поля и из-за этого неясно, кому оно адресована. В действительности, все не так однозначно, или, как говорили в прошлом, «читатель не должен смущаться тем, что у него не хватает предварительных знаний для того, чтобы читать предварительные сведения». Если «человеческий разум способен понять то, чего не может себе представить», то уж тем более он сможет постриить для себя учение, видя, как оно применяется на практике. Этот путь к его освоению приходится предлагать еще и потому, что отсутствие внятных изложений этого изложить его в виде текста предмета – совсем непростое дело ввиду его чисто спекулятивной природы и в настоящее время он остается основным. Необходимые предварительные сведения, приведены ниже.

Векторы и ко-векторы принадлежат разным пространствам, т.е. касательному и ко-касательному, в которых вводятся в каждом – свой репер. Пусть $\{x^i\}$ –какая-либо система координат в пространстве. Тогда локальные естественные реперы задаются как векторный $\{\mathrm{d}x^i\}$ и ко-векторный $\{\partial_i\}$, где $\mathrm{d}x^i$ – это градиент координаты $x^i$, а $\partial_i$ – это оператор дифференцирования по ней. Таким образом локально вектор – это направленный отрезок, а ко-вектор – это в общем случае градиент какой-либо функции, умноженный на какую-либо другую функцию. В обоих пространствах определено скалярное произведение $\langle , \rangle$. Так, в касательном и кокасательном пространствах они задают компоненты метрического тензора данной системы координат:

$$\langle \mathrm{d}x^i, \mathrm{d}x^j \rangle = g^{ij}, \quad \langle \partial_i, \partial_j \rangle = g_{ij}.$$

Каждый ко-вектор является линейным функционалом на ко-касаетельном пространстве и наоборот, каждый ко-вектор является линейным функционалом на касательном. Это, в частности, означает, что каждый ко-вектор измеряет векторы. Результат этого измерения называется значением данного ко-вектора на данном векторе. Так, значение ко-вектора $\mathrm{d}x^i$ на векторе $\partial_i$ – это $\delta$-символ Кронекера

$$\mathrm{d}x^i(\partial_j) \equiv \delta^i_j,$$

хотя в общем случае ни ортогональность ни нормированность базисов не предполагается. Пример, значение ко-вектора $\alpha = A_i \mathrm{d}x^i$ на векторе $\vec{v} = v^i \partial_i$ это просто $\alpha(\vec{V}) = A_i V^i$.

# 3 Теорема Якоби

Ниже, при решении задач о движении частицы в векторных потенциалах, будет применяться теорема Якоби. Ниже она приведена, вероятно, в своей оригинальной трактовке, не встречающейся в современной литературе, но, на наш взгляд, более наглядной. Эта теорема позволяет строить в явном виде траектории гамильтоновой системы по известному полному решению уравнениия Гамильтона-Якоби для нее. Условия этой теоремы состоят в следующем. Пусть дана механическая система, имеющая $n$ степеней свободы и пусть для нее определено уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{2m}\langle \mathrm{d}S, \mathrm{d}S\rangle + V(x) = E. \tag{1}$$

Решение этого уравнения называется полным, если оно содержит $n-1$ произвольных постоянных $c_a$. Оно представлено в конфигурационном пространстве размерности $n$, координатами $x^i$ в котором являются обобщенные координаты системы. Метрика в заданной ими системе координат задана формой кинетической энергии. Каждый фиксированный набор интегралов движения $\{c_a\}$ задает в конфигурационном пространстве некоторую конгруэнцию траекторий или динамический поток.

Теорема утверждает следующее. Пусть $S(x^i, c_a)$ – это полное решение уравнения (1). Тогда каждая из поверхностей $\dfrac{\partial S}{\partial c_a} = \mathrm{const}$ обладает следующим свойством. Через каждую ее точку проходит в точности одна траектория потока, и каждая такая траектория лежит на этой поверхности целиком. Доказательство этого утверждения состоит в следующем. Продифференцировав уравнение (1) по какой-либо из постоянных $c_a$, получаем тождество $\langle \mathrm{d}\dfrac{\partial S}{\partial c_a}, \mathrm{d}S\rangle \equiv 0$, которое означает, что ко-вектор $\mathrm{d}S$ всюду ортогонален любой из поверхностей

$$\frac{\partial S}{\partial c_a} = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Поскольку этот ко-вектор коллинеарен скорости частицы, он всюду касателен такой поверхности, следовательно, траектория частицы, имеющей такую скорость, полностью лежит на данной поверхности. Далее, пересечение двух таких поверхностей, заданное системой из двух уравнений $\frac{\partial S}{\partial c_a} = \mathrm{const}$, $\frac{\partial S}{\partial c_b} = \mathrm{const}$, также обладает этим свойством, но имеет более низкую размерность, точнее, их размерности равны соответственно $n-1$ и $n-2$. Тем же свойством обладают пересечения большего количества таких поверхностей. В конечном счете, пересечение всех $n-1$ поверхностей этого виде имеет размерность $n$, т.е. является собственно одной из траекторий системы. Это означает, что каждая траектория системы задается как решение системы $n-1$ уравнений (2). Произвольными постоянными $c_a$, появляющимися при построении полного решения уравнения (1), являются постоянные разделения, они же фигурируют как интегралы движения системы.

# 4 Векторный и ко-векторный потенциалы

Векторный и ко-векторный потенциалы различаются прежде всего тем же, чем вообще различаются векторы и ко-векторы, в частности, тем же, чем скорость и импульс. В декартовых координатах разница между ними никак не проялется, и вводить их как два разных понятия особой необходимости не было, однако во всех остальных системах координат проявляется то, что они имеют разную природу. Ниже излагаются лагранжево и гамильтоново представления теории движения частицы в обоих потенциалах. Несмотря на совпадение терминов, истинный векторный потенциал не идентичен "векторному" потенциалу, задающему магнитное поле. Дело в том, что $m\vec{V}$, где $\vec{V}$ – это скорость движения системы отсчета, – это действительно векторный потенциал, а применение этого термина в электродинамике – это традиция, не отражающая смысла этого понятия. В действительности, объект, называемый векторным потенциалом в электродинамике является не векторным, а ко-векторным потенциалом.

Пусть $\vec{V}$ – это скорость вращающейся системы относительно покоящейся, а $\vec{v}$ материальной точки в покоящейся, то ее же скорость во вращающейся системе равна $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$. Следовательно, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ и эта скорость подчиняется обычным уравнениям движения. В частности, лагранжиан рассматриваемой материальной точки в обычных выражениях равен

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \Phi == \frac{m(\vec{v}' + \vec{V})^2}{2} - \Phi.$$

Очевидно, последнее выражение и есть лагранжиан той же материальной точки во вращающейся системе:

$$L = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{V} \cdot \vec{v}' - \left(\Phi - \frac{m\vec{V}^2}{2}\right). \tag{3}$$

Оно содержит выражения, соответствующие центробежному $-\frac{m\vec{V}^2}{2}$ и векторному $m\vec{V}$ потенциалам.

Рассмотрим движение частицы во вращающейся системе, т.е. с лагранжианом (3). Здесь и далее штрих за ненужностью опускается. Обобщенный импульс частицы имеет компоненты $P_i = mg_{ij}(v^j - V^j)$, так что он представляет собой ко-вектор

$$\Pi = mg_{ij}(v^j - V^j)\mathrm{d}x^i.$$

По построению, этот импульс соответствует покоящейся системе, поэтому лагранжиан (3) численно равен

$$L = \frac{\langle \Pi, \Pi \rangle}{2m},$$

однако он численно не равен гамильтониану, как это было бы во вращающейся системе. Здесь гамильтониан необходимо строить канонически, т.е. по формуле

$$H = \Pi(\vec{v}) - L = \frac{\langle \Pi, \Pi \rangle)}{m} + \Pi(\vec{V}) - L = \frac{\langle \Pi, \Pi \rangle)}{2m} + \Pi(\vec{V}).$$

В результате уравнение Гамильтона-Якоби вращающейся системе принимает вид

$$\frac{1}{2m}\langle \mathrm{d}S, \mathrm{d}S \rangle - \mathrm{d}S(\vec{V}) = E. \tag{4}$$

В задаче о движении заряженной частицы появляется потенцал вида $A_i v^i$, что явно выражает значение ко-вектора $\alpha = A_i \mathrm{d}x^i$ на векторе $\vec{v}$, обозначаемое как $\alpha(\vec{v})$. Лагранжиан частицы, движущейся в ко-векторном потенциале $\alpha$ равен

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \alpha(\vec{v}). \tag{5}$$

Разница между лагранжианами (3) (5) состоит в том, что первый из них содержит центробежный потенциал, равный $m\vec{V}^2/2$, а второй не содержит аналогичного члена $\alpha^2$. Соответствующий обобщенный импульс имеет компоненты

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = mg_{ij}v^j - A_i,$$

так что компоненты скорости выражаются частицы через них как

$$v^j = \frac{1}{m} g^{ij}(P_i + A_i).$$

Поэтому лагранжиан можно представить как

$$L = \frac{1}{2m}\langle \Pi, \Pi \rangle - \alpha(\vec{v}).$$

Заметим, что

$$\Pi(\vec{v}) = \frac{1}{m}\langle \Pi, \Pi \rangle - \alpha(\vec{v}),$$

поэтому гамильтониан частицы имеет вид

$$H = \Pi(\vec{v}) - L = \frac{1}{2m}\langle \Pi, \Pi \rangle.$$

Ко-вектор импульса $\Pi$ представляет собой незамкнутую 1-форму, причем его незамкнутая часть есть сам ко-векторный потенциал, поэтому его можно представить как

$$\Pi = \mathrm{d}S + \alpha,$$

и, следовательно, компоненты градиента функции $S$ равны

$$\partial_i S = g_{ij} v^j.$$

В результате уравнение Гамильтона-Якоби для частицы, движущейся в ко-векторном потенциале $\alpha$ имеет вид

$$\frac{1}{2m}\langle \mathrm{d}S + \alpha, \mathrm{d}S + \alpha \rangle = E. \tag{6}$$

Оно явно отличаестя от уравнения (4) и имеет другие решения. Возможности получения полных решений этих двух уравнений различны, в частности, уравнение (6) решается только в тривиальных случаях.

# 5 Задача Пуанкаре

Идея магнитного монополя могла появиться по крайней мере, по двум причинам. Одной из них могло быть обычное любопытство, порождающее вопрос, что было бы, если бы он существовал. Другой – открытие форм-инвариантности однородных уравнений Максвелла относительно преобразований дкальности $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{H} \to -\vec{E}$ и даже относительно глобальных дуальных вращений $(\vec{E} + \imath\vec{H}) \to e^{\imath\varphi}(\vec{E} + \imath\vec{H})$. Вместе они составляют достаточное обоснование для исследования следствий предположения о его существовании, однако эта идея интересны и с математической точки зрения. Дело в том, что, с одной стороны, поток магнитной напряженности через любое сечение конуса с вершиной в точке, в которой расположен монополь, имеет одно и то же значение. С другой – оно же появляется как интегральный инвариант А. Пуанкаре в задаче о движении электрического заряда в его поле. Вместе эти два факта означают, что траектория заряда полностью лежит на таком конусе, и, если никакие другие силы на него не действуют, то она является геодезической на нем. Хотя эта идея не получила экспериментального подтверждения, она распространилась на теорию гравитации, где ее появление повлекло серьезные последствия.

Как будет показано ниже, ко-векторный потенциал точечного магнитного монополя величиной $p$, помещенного в начало сферических координат $\{r, \theta, \varphi\}$, имеет вид

$$\alpha = -p(\cos\theta + k)\mathrm{d}\varphi.$$

Здесь постоянная $k$ произвольна. Ее роль состоит в том, что она регулирует расположение особенностей этого потенциала. Так, при $k = 0$ особенность одна и расположена на полуоси $\theta = 0$, при $k = 1$ она находится на противоположной полуоси $\theta = \pi$, и при любом другом значении этой постоянной особенностей две, они расположены на обеих полуосях и в общем случае различаются. Поэтому потенциал $\alpha$ удобно представлять в виде

$$\alpha = p(\cos\theta \pm 1)\mathrm{d}\varphi. \tag{7}$$

Определение напряженности поля

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \tag{8}$$

в используемом математическом аппарате имеет вид

$$\eta = \mathrm{d}\alpha, \quad {}^*\eta \equiv H_i \mathrm{d}x^i.$$

Уравнения магнитостатики для свободного поля $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ и $\nabla \times \vec{H} = 0$ здесь принимают вид соответственно $\mathrm{d}\eta = 0$ и $\mathrm{d}^*\eta = 0$. Согласно определениям (7) и (8) 2-форма напряженности равна

$$\eta = p \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi,$$

ее сопряжение

$${}^*\eta = \frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Обе формы очевидно точные, следовательно, удовлетворяют уравнениям свободного магнитного поля. Это поле очевидно обладает сферической симметрией, однако, из-за наличия особенности оно не существует глобально.

Рассмотрим теперь движение частицы массы $m$ и несущей электрический заряд $q$ $p$ в поле магнитного монополя, заданного выражением (7). Уравнение Гамильтона-Якоби (6) для этой частицы имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} - qp(\cos\theta + 1)\right)^2\right] = E.$$

Оно разделяется в предположении, что искомая функция имеет вид

$$S = R(r) + \Theta(\theta) + l\varphi.$$

Подстановка этого представления в уравнение приводит его к виду :

$$R'^2 + \frac{1}{r^2}\left\{\Theta'^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}[l - qp(\cos\theta \pm 1)]^2\right\} = 2mE,$$

из которого видно, что выражение в круглых скобках – это постоянная. Обозначив ее как $L^2$, получаем:

$$\begin{aligned} R'^2 =&\ 2mE - L^2/r^2 \\ \Theta'^2 =&\ L^2 - \frac{[l - qp(\cos\theta \pm 1)]^2}{\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что вторая строка в уравнениях (9) преобразуется в

$$\Theta'^2 \sin^2\theta = [L^2 - (l \mp qp)^2] + 2(l \mp qp)qp\cos\theta - (L^2 + q^2p^2)\cos^2\theta.$$

Здесь неопределенность знака устраняется выбором полупространства, в котором происходит движение таким образом, чтобы особенность потенциала не появлялась, скажем, если взять знак "+", то следует выбрать полупространство $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Правая часть этого уравнения представляет собой полный квадрат, если постоянные $L$ и $l$ удовлетворяют условию

$$[(l + qp)^2 - L^2](L^2 + q^2p^2) = q^2p^2(l + qp)^2.$$

Из него следует равенство

$$(l + qp)^2 = L^2 + q^2p^2.$$

Действительно, в этом случае

$$\Theta'^2 \sin^2\theta = -[qp - (l + qp)\cos\theta)^2.$$

Теперь, поскольку правая часть не может быть отрицательной, единственным возможным значением $\theta$ является

$$\theta = \arccos\frac{qp}{l + qp}, \tag{10}$$

следовательно, траектория полностью лежит на конусе постоянного $\theta$, заданного этим равенством. Магнитная сила, действующая на частицу, строго ортогональна к конусу и, т.к. никакие другие силы на нее не действуют, ее траектория представляет собой геодезическую на этом конусе. Она легко строится и ее явное выражение имеет вид

$$r = \frac{1}{\lambda\sin(\varphi\sin\theta_0)} \tag{11}$$

где $\theta_0$ – значение полярного-угла, которым задан конус, -$\lambda$ – произвольная постоянная размерности длины.

В заключение отметим, связь между величиной магнитного заряда $p$ и интегральным инвариантом А. Пуанкаре. Для этого рассмотрим интеграл от 1-формы $\Pi$ по любой замкнутой кривой $C$, охватывающей конус. Очевидно, градиент $\mathrm{d}S$ в него вклада не дает, поэтому он равен интегралу от 1-формы $\alpha$ по той же кривой. Согласно теореме Пуанкаре, он равен интегралу от 2-формы $\mathrm{d}\alpha$ по любой поверхности, ограниченной этой кривой, скажем, по куску сферы $r = \mathrm{const}$, т.е. в в векторных обозначениях, в точности потоку магнитной напряженности $\vec{H}$, через эту поверхность. В силу сферической симметрии поля этот поток определяется только величиной телесного угла конуса, на котором лежит кривая $C$, точнее, телесному конусу, умноженному на величину магнитного заряда $p$, расположенного в его вершине. Поскольку динамический поток, заданный ко-вектором импульса $\Pi$, переносит эту кривую только по конусу, интеграл от ко-вектора $\Pi$ на ней не меняется, т.е. представляет собой интегральный инвариант. Этот инвариант равен величине магнитного заряда на телесный угол конуса, на котором лежит траектория частицы. Прежде, чам переходить к рассмотрению аналогичной задачи о движении обычной точечной массы в поле точечного гравимагнитного заряда, было бы желательно подробнее рассмотреть понятие локального вращения, однако мы отложим рассмотрение этого понятия, потому что это тема довольно общирна и сложна, так что ее обсуждение сильно уведет повествование в сторону от решения конкретной задачи. Понятие локально вращающейся системы отсчета будет рассмотрено в разделе "Заключение".

# 6 Движение в поле массивного гравимагнитного диполя

В рамках обычного векторного анализа ко-векторный потенциал $\alpha$ удовлетворяющий уравнению

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}\alpha = 0, \tag{12}$$

идентифицируется с вектором $\vec{A}$, удовлетворяющим уравнению

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = 0.$$

Полагая, что векторный потенциал $\vec{V}$ удовлетворяет этому же уравнению, т.е.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = 0,$$

находим, что вектор $\vec{V}$ имеет тот же вид, что и вектор $\vec{A}$, но в нем следует заменить вращающийся заряд на точно также вращающуюся массу, или, точнее, магнитный дипольный момент на гравимагнитный. Решением уравнения (12), описывающее ко-векторный потенциал магнитного диполя с моментом $\mu$ является 1-форма

$$\alpha = \mu \frac{\sin^2 \theta}{r} \, \mathrm{d}\varphi,$$

соответствующий вектор имеет единственную ненулевую компоненту

$$\vec{A} = \frac{\mu}{r^3} \, \partial_\varphi,$$

поэтому, заменив магнитный дипольный момент на гравимагнитный, обозначенный как $\gamma$, получаем векторный потенциал гравимагнитного поля вращаюшейся массы в виде

$$\vec{V} = \frac{\gamma}{r^3} \, \partial_\varphi. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь движение частицы массы $m$ в этом векторном потенциале. Система отсчета, привязанная к системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, которая была бы в отсутствие этого векторного потегциала, неподвижной, в его присутствии неинерциальна и неподвижна только асимптотически. Глобально неподвижной системы отсчета в которой можно было бы построить лагранжиан, в его присутствии не существует, но в нем нет необходимости, поскольку явный вид уравнения Гамильтона-Якоби в имеющейся неинерциальной системе известен. Действительно, неинерциальность системы задана именно векторным потенциалом, а раз так, это уравнение имеет вид 4), в котором векторный потенциал задан формулой (13). Таким образом, уравнение Гамильтона-Якоби для этой частицы имеет вид

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2\gamma}{r^3} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right] = E.$$

В более полной постановке задачи частица движется в гравитационном и гравимагнитном полях, поэтому интереснее рассмотреть ее, добавив гравитационный потенциал массы, вращение которой уже учтено. В результате получается уравнение

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2\gamma}{r^3} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right] - \frac{Mm}{r} = E. \tag{14}$$

Это уравнение разделяется, как обычно для искомой функции, представимой как

$$S(r, \theta, \varphi) = R(r) + \Theta(\theta) + l\varphi. \tag{15}$$

Подстановка этого представления в уравнение приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для искомых функций единственных переменных

$$R'^2 = 2mE + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\gamma l}{r^3}, \quad \Theta'^2 = L^2 - \frac{l^2}{\sin^2 \theta},$$

где – постоянная разделения. Нетрудно убедиться в том, что аналогичное уравнение для движения заряженной частицы в поле магнитного диполя (6), не разделяется. Интегрирование полученных обыкновенных дифференциальных уравнений дает следующее выражение для искомой функции $S$:

$$S(r,\theta,\varphi) = \pm\int \mathrm{d}r\sqrt{2mE + \frac{2Mm^2}{r} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{l\gamma}{r^3}} \pm \int \mathrm{d}\theta\sqrt{L^2 - \frac{l^2}{\sin^2\theta}} + l\varphi.$$

Напомним, что градиент функции $S$ коллинеарен скорости частицы в неинерциальной системе, каковой как раз является асимптотически покоящаяся система сферических координат, в которой она построена. Следовательно, теорема Якоби в ней выполняется как обычно и представление искомых траекторий частицы получаются в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \mp 2\gamma\int \frac{\mathrm{d}r}{r^3\sqrt{2mE + \frac{2Mm^2}{r} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2l\gamma}{r^3}}} \mp l\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{L^2 - \frac{l^2}{\sin^2\theta}}};$$

$$\pm\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2Mm^2}{r} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2l\gamma}{r^3}}} + \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{L^2 - \frac{l^2}{\sin^2\theta}}},$$

где $\phi_0$ и нижние или верхние пределы интегрирования следует задать как координаты начальной точки траектории, а знаки ввыбираются в соответствии с ее начальным направлением. Эти формулы представляют траекторию в эллиптических и гиперэллиптических интегралах и функциях. Они составляют формальное решение задачи, которое в принципе дает возможность получить явное, но это – отдельная работа. Построение из них стандартных выражений одних координат через другие, скажем, $r$и $\theta$ как функций координаты $\varphi$, составляет предмет отдельного исследования, которое здесь проводиться не будет. На этом наше рассмотрение движения частицы в поле вращающейся массы завершается и мы переходим к следующей задачи.

# 7 Движение в поле массивного гравимагнитного монополя

Поскольку магнитное и гравимагнитное поля имеют разную геометрическую природу, решения задач о движении частицы в полях магнитного и гравимагнитного монополей не совпадают. Одна из этих задач была решена выше, ниже будет решаться другая. Прежде всего, различаются уравнения

Гамильтона-Якоби для них – это соответственно уравнения (6) и (4). Еще одно важное различие между этими двумя задачами состоит в том, что, как было отмечено выше, в векторном потенциале $\vec{V}$ выполняется теорема Якоби, и она будет применена для построения траекторий частицы. Кроме всего этого, будет предполагаться, что источник поля массивен, поэтому в задачу будет включен его гравитационный потенциал $M/r$.

Явный вид векторного потенциала гравимагнитного монополя строится аналогично явному виду мекторного потенциала диполя. В некоторой подходящей системе координат он задается единственной компонентой

$$V^{\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^{\theta}} V_{\varphi},$$

имеет тот же вид, что $A_{\varphi}$, в котором величина магнитного монополя $p$ заменена на величину гравимагнитного монополя $n$, т.е.

$$V^{\varphi} = \frac{n(\cos\theta \pm 1)}{r^2 \sin^2\theta}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4) дает следующий вид уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2n(\cos\theta \pm 1)}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right] - \frac{Mm}{r} = E. \tag{16}$$

Для разделения этого уравнения представляем искомую функцию, в виде (15).В результате оно сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям для искомых функций единственных переменных

$$R'^2 = 2mE + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{L^2}{r^2}, \quad \Theta'^2 = L^2 - \frac{l^2}{\sin^2\theta} - \frac{2nl(\cos\theta \pm 1)}{\sin^2\theta}, \tag{17}$$

где – постоянная разделения. Заметим, что второе из этих уравнений инвариантно относительно одновременной замены $\pm \to \mp$, $\theta \to \pi - \theta$ и $l \to -l$ или $\varphi \to -\varphi$. Поэтому неопределенность знака в нем устраняется выбором системы координати его можно выбрать произвольно. Для определенности выберем знак "+" и преобразуем это уравнение:

$$\Theta'^2 \sin^2\theta = (L^2 - l^2 - 2nl) - 2nl\cos\theta - L^2\cos^2\theta. \tag{18}$$

Допустимые значения переменной $\theta$ лежат между нулями полинома в правой части. Предположим, при некотором выборе системы координат эти нули совпали. Тогда они задают единственное допустимое значение этой координаты $\theta_0$, иными словами, траектория частицы подностью лежит на конусе $\theta = \theta_0$. Решая уравнение (18), находим:

$$L\cos\theta = nl \pm \sqrt{L^2 - l^2 - 2nl + \frac{n^2 l^2}{L^2}},$$

следовательно, нули этого полинома совпадают, если подкоренное выражение в правой части этого равенства равно нулю. Это выражение преобразуется как

$$L^2 - l^2 - 2nl + \frac{n^2 l^2}{L^2} = \left(L - \frac{nl}{L}\right)^2 - l^2,$$

откуда следует, что

$$L - \frac{nl}{L} = \pm l.$$

Таким образом, для получается два выражения:

$$l = \frac{L^2}{n \pm L}.$$

Они показывают, при каких значениях интеграла движения траектория полностью лежит на конусе постоянного $\theta$

$$\theta = \theta_0, \quad cos\theta_0 = \frac{nl}{L}. \tag{19}$$

Поскольку асимптотически $|L| \geq |l|$, смысл имеет только одно из них, а именно,

$$l = \frac{L^2}{n + L}. \tag{20}$$

Таким образом, если система координат выбрана так, что этот интеграл движения задан формулой (20), то траектория частицы полностью лежит на конусе (19).

Это позволяет исключить переменную $\theta$, и, вернувшись к уравнениям (17) завершить построение решения уравнения Гамильтона-Якоби:

$$S(r, \varphi) = \int \mathrm{d}r \sqrt{2mE + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{L^2}{r^2}} + \frac{L^2 \varphi}{n + L}.$$

Теперь, применяя теорему Якоби, находим выражение траекторий в явном виде:

$$\frac{2n + L}{n + L} (\varphi - \varphi_0) = \mp L \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{L^2}{r^2}}},$$

где $\varphi_0$ и нижний предел интегрирования – это начальные значения координат $\varphi$ и $r$ соответственно. Интегрирование и элементанрые преобразования дают выражение траектории в стандартной форме. В качестве начального значения координаты $r$ естественно выбрать положительный корень функции $R'$ в правой части первого равенства (17), равный

$$r_0 = \frac{L}{\frac{m^2 M}{L} + \sqrt{\frac{m^4 M^2}{L^2} + 2mE}},$$

а начальное значение координаты $\varphi$ можно не задавать ввиду осевой симметрии. В результате получается явное выражение траектории в виде $r = r(\varphi)$:

$$r = \frac{L}{m^2M + \sqrt{2mEL^2 + m^4M^2}\,\sin\dfrac{2n+L}{n+L}\,\varphi}. \tag{21}$$

Полученное решение не следует понимать буквально, т.е. как если неподвижный притягивающий центр обладает и массой и гравимагнитным зарядом, а частица, движущаяся в его поле имеет только массу. Если наоборот, центральное тело обладает только массой, а частица – и тем и другим, то решение окажется точно таким же. Если же гравимагнитные заряды притягиваются подобно массам, то в общем случае решение будет тем же, только входящие в него постоянные будут выражены иначе. К этой же задаче сводится и общая задача двух тел, обладающих и массами и гравимагнитными зарядами, т.е. в ней движение центра масс исключается как обычно и траектории обоих тел приводятся к виду (21).

Траектории задаваемые этим общим решением, полностью лежат на конусе, составляя два основных типа, относящиеся соответственно к финитному и инфинитному движению. Также, как и в задаче Кеплера, если $E < 0$, то координата $r$ принимает только ограниченные значения, в противном случае, она достигает бесконечности. Орбита финитного движения неплоская, но похожа на эллиптическую, при этом ее перигей равномерно смещается. Интересно было бы сравнить свойства этох траекторий со свойствами орбиты Луны [6]. Это позволило бы оценить возможные значения гравимагнитных зарядов обоих тел.

Инфинитное движение интересно во многих аспектах. С чисто теоретической точки зрения интересно сравнить движения частиц в полях магнитного и гравимагнитного монополей. Исключив для этого ньютоновское притяжение, т.е. положив $M = 0$, получаем траекторию вида

$$r = \frac{L}{\sqrt{2mE}\,\sin\dfrac{2n+L}{n+L}\,\varphi}.$$

Это уравнение отличается от уравнения геодезической на конусе (11) тем, что коэффициент $\dfrac{2n+L}{n+L}$ не равен $\sin\theta_0$ из формулы (19). Построенная таким образом траектория также полностью лежит на конусе, но, в отличие от траектории заряда в поле магнитного монополя, она не является геодезической на нем.

# 8 Заключение

Представление о гравимагнитном поле появилось, вероятно, сразу после того, как А. Эйнштейн показал, что гравитационное поле и его источник не могут быть скалярами плотности материи и кривизны пространства-времени, как полагалось в теории Г. Нордстрема, и что, таким образом, движение материи также влияет на свойства поля. Такое влияние было уже известно на примере магнитного поля, порожденного движением зарядов, и этот пример указывал на существование гравитационного аналога магнитного поля. Со своей стороны, Э. Мах указал, исходя из общих соображений, какое влияние на законы инерции может оказывать вращение удаленных масс, хотя в его рассуждениях вращение было глобальным. Следующий шаг сделали Й. Лензе и Х. Тирринг, построив приближенное решение уравнения Эйнштейна для поля вращеющейся массы, в котором обнаружился эффект увлечения систем тсчета. Смысл их открытия состоял в том, что с системой координат, покоящейскя на бесконечности, не связана никакая глобальная система отсчета. Это означало, что понятие глобальной системы отсчета вообще утратило смысл и появилась потребность в понятии локальной системы отсчета.

Эффект увлечения систем отсчета состоит в следующем. Решение Лензе-Тирринга получено в сферических координатах $\{t, r, \theta\varphi\}$, в которых источник поля локализован в начале координат $r = 0$, и, по условию задачи, эта система соответствует покоящейся системе отсчета на бесконечности $r = \infty$. Поэтому каждая точка, пространственные координаты которой фиксированы, неподвижна относительно удаленной периферии. Однако, метрика пространства-времени содержит компоненту $g_{t\varphi}$, которая на нерелятивистском уровне выступает как векторный потенциал, соответствующий полю скоростей (13). Поскольку это поле скоростей явно не соответствует твердотельному вращению пространства, с ним невозможно связать какую-либо глобальную вращающуюся систему отсчета. Это означает, что введенная система координат задает в окрестности каждой точки пространства некоторую локальную систему отсчета, которая вращается с угловой скоростью, заданной этим полем. Ее вращение задает законы инерции в ней, хотя сама эта точка вместе со своей окрестностью неподвижна относительно неподвижной удаленной периферии. Более того, по этой причине разные точки пространства, будучи неподвижными друг относительно друга, с точки зрения локальных законов инерции находятся в разных локальных вращающихся системах отсчета.

Дальнейшее развитие темы показало, что понятие локальной вращающейся системы отсчета еще глубже. Еще до того, как Р.П. Керр построил свое решение, приближением к которому было решение Лензе-Тирринга, А. Тауб нашел другое решение, в котором источник гравитационного поля не вращается, но обладает гравимагнитным зарядом. В пространстве-времени Тауба также использовались сферические координаты, задающие абсолютно неподвижную удаленную периферию и фактическую неподвижность каждой точки, пространственные координаты которой фиксированы. При этом в окрестности каждой такой точки его решение задает законы инерции, соответствующие некоторой локальной вращающейся системе отсчета, причем в двух точках, неподвижных относительно друг друга, эти системы различны. В отличие от случая Лензе-Тирринга это поле обладает сферической симметрией, поэтому в разных точках различаются не только скорости вращения систем, но и направления вращений. Так поле локальных вращающихся систем отсчета окончательно стало неголономным.

Таким образом, введение сначала вращения, а затем – понятия гравимагнитного заряда в теорию гравитации, задало ей такое развитие, которое привело к появлению понятия неголономного поля локальных вращающихся систем отсчета. Следует отметить, что идея гравимагнитного монополя представляет собой единственную причину, по которой это поле становится неголономным, т.к. вращение материи сохраняет глобальное направление вращения. т.е. таким, при котором направления вращения локальных систем различны. Поэтому для проверки гипотезы о существовании гравимагнитного заряда достаточно исследования законов инерции в разных точках пространства на предмет неголономности, хотя это – не единственная возможность ее проверить. Другие возможности дают исследования движения Луны, искусственных спутников и многого другого.

Еще одно уникальное свойство гравимагнитного заряда состоит в том, что он является единственным возможным нарушителем пространственной четности. Дело в том, что все законы классической физики инвариантны относительно зеркального отражения, или, иными словами, классический мир идентичен своему зеркальному отражени. Нарушение пространственной четности в присутствии гравимагнитного заряда проявляется уже в механике, т.к. пробной частитцы траектория на конусе представляет собой ориентированную определенным образом спираль, и получить в качестве траектории ее зеркальное отражение можно только изменив знака гравимагнитного заряда. Более сложные проявления нарушения пространственной четности наблюдаются в движении земной атмосферы, как в больших, так и в малых масштабах. Например, в том, что в северном и южном полушариях она движется в противоположных направлениях, т.е., в северном с запада на восток, а в южном – с востока на запад. В более мелких – в том, что все циклоны и торнадо тоже закручены в одну сторону. Все это свидетельствует о том, что на Земле и вблизи нее природа не идентична своему зеркальному отражению и тем самым на то, что известная науке материя обладает гравимагнитным зарядом.

# Список литературы

[1] Finn Ravnda. Скалярная гравитация и дополнительные измерения. arXiv: gr-qc/0405030v1

[2] Визгин В. П. Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование 1900—1915). — М.: Наука, 1981.

[3] Lense J., Thirring H. Uber den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkorper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie (нем.) // Physikalische Zeitschrift. — 1918. — Bd. 19. — S. 156—163. — Bibcode: 1918PhyZ...19..156L. Архивировано 29 августа 2022 года

[4] Дж. Джексон. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965

[5] Jackson J.D., Okun L.B. Historical roots of gauge invariance. arXiv:hep-ph/0012061

[6] Бакулин П.И., Кононович Э.В., Мороз В.И. Курс общей астрономии. Наука 1977