УДК 519.1

В.А. Щербакова

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ПРОСТОМ ЦИКЛЕ, ПРОХОДЯЩЕМ ПО ЦЕЛЕВЫМ ВЕРШИНАМ В НЕОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Аннотация

В статье приводится исследование частного случая оптимизационной задачи о минимальном простом цикле, проходящем по всем целевым вершинам в неориентированном графе, удовлетворяющем условиям теоремы Дирака. Приводится эвристический алгоритм решения этой задачи.

1. Введение

Данная статья посвящена одной оптимизационной задаче на неориентированном графе.

Формулировка задачи:

Дано: $G = (V, E)$ – обыкновенный неориентированный граф; $H \subseteq V$ – множество «целевых» вершин.

Найти: кратчайший простой цикл C в графе, содержащий H.

Очевидно, что если граф G несвязный, то для существования решения необходимо, чтобы все множество H содержалось в одной компоненте связности. Поэтому можно ограничить условие задачи так, чтобы граф G был связным.

Аналогично, если граф G содержит точку сочленения, то для существования решения необходимо, чтобы все множество H содержалось в одной компоненте двусвязности. Поэтому можно ограничить условие задачи так, чтобы граф G был двусвязным.

Также очевидно, что если граф G гамильтонов, т.е. существует простой цикл, проходящий по всем вершинам, то существует решение поставленной задачи. Поэтому в пункте 2 будет рассматриваться частный случай общей задачи, когда в графе выполняются достаточные условия существования гамильтонова цикла, сформулированные в теореме Дирака.

2. Частный случай задачи в неориентированном графе, удовлетворяющем теореме Дирака

Широко известная теорема Дирака, изложенная в [1], утверждает, что если в обыкновенном графе выполняются условия:

1) количество вершин $n \geq 3$;

2) у каждой вершины v степень $\rho(v) \geq \frac{n}{2}$;

то в графе есть гамильтонов цикл (т.е. простой цикл по всем вершинам графа).

Следовательно, для любого множества H «целевых» вершин существует простой цикл C, содержащий H.

Рассмотрим эвристичский алгоритм, дающий приближенное решение задачи.

Пусть вершины в графе пронумерованы $V = \{v_1,v_2,...,v_h,v_{h+1},...,v_n\}$ таким образом, что первые h вершин принадлежат $H = \{v_1,v_2,...,v_h\}$. Для изложенного ниже алгоритма удобно, чтобы вершины были упорядочены по возрастанию степени, т.е.$\rho(v_1) \le \rho(v_2) \le ... \le \rho(v_h)$ и $\rho(v_{h+1}) \le \rho(v_{h+2}) \le ... \le \rho(v_n)$.

Алгоритм

Шаг 1. Присвоить значение счетчика $i = 1$.

Найти в G кратчайшую простую цепь p_1 от v_1 до v_2.

Построить $G_1 = G \setminus (p_1 \setminus v_2)$, удалив вершины цепи p_1 кроме v_2.

Построить $H_1 = H \setminus (p_1 \setminus v_2)$. Если в H_1 ровно одна вершина – переход на последний шаг.

Выбрать в H_1 первые две вершины v_s и v_t.

Увеличить счетчик i на 1.

Шаг 2. Найти в G_i кратчайшую простую цепь p_i от v_s до v_t.

Построить $G_{i+1} = G_i \setminus (p_i \setminus v_t)$, удалив вершины цепи p_i, кроме v_t.

Если цепи p_i не существует, то алгоритм останавливается.

Построить $H_{i+1} = H_i \setminus (p_i \setminus v_t)$. Если в H_{i+1} ровно одна вершина – увеличить счетчик i на 1 и переход на последний шаг.

Выбрать в H_{i+1} первые две вершины v_s и v_t.

Увеличить счетчик i на 1.

Повторить шаг 2.

...

Последний шаг. Найти в $G_i \cup v_1$ кратчайшую простую цепь p_i от $v \in H$ до v_1.

Если цепи p_i не существует, то алгоритм останавливается.

Если остановок алгоритма не было, то цикл $C = p_1 \cup p_2 \cup ... \cup p_i$ – результат работы алгоритма, где i – номер последнего шага.

В основе алгоритма лежит «жадная» стратегия, не гарантирующая получение оптимального результата.

Приведем пример задачи, где результат работы предложенного алгоритма не равен оптимальному. На рисунке 1 представлен граф, имеющий 10 вершин степени 5 каждая. Пусть $H = \{1, 2, 3, 4\}$. Цикл С = 1, 4, 2, 6, 3, 5, 1 является оптимальным решением задачи. Однако алгоритм может найти четыре цепи, образующие при объединении цикл, содержащий 7 ребер.

На шаге 1 – p_1 = 1, 5, 2.

На шаге 2 – p_2 = 2, 6, 3.

На шаге 3 – p_3 = 3, 10, 4.

На последнем шаге – p_4 = 4, 1.

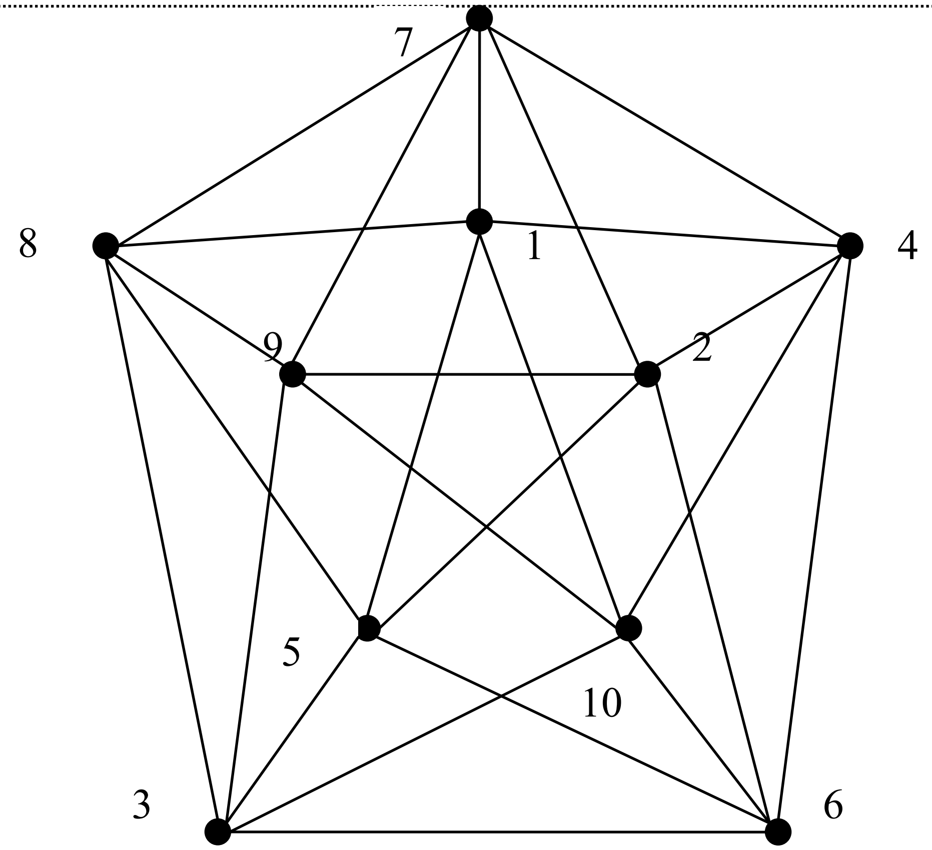

Рисунок 1.

Для данного примера отношение длины APP = 7 цикла, полученного предложенным эвристическим алгоритмом к длине OPT = 6 цикла, являющегося оптимальным решением, равно $\frac{7}{6}$.

Существование гарантированной оценки отношения $\frac{\mathrm{APP}}{\mathrm{OPT}}$ для предложенного эвристического алгоритма остается открытой проблемой.

Список литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.–Лекции по теории графов. М.: Наука 1990.– 384 с.