Динамика частиц в гравитационном поле

В. Б. Беляев,

E-mail: wbelayev@yandex.ru

Динамика частиц в гравитационном поле исследуется с использованием механики Лагранжа. Получены динамические уравнения, включающие скорость передачи энергии и импульса гравитационному полю. Рассмотрено движение частиц в поле Шварцшильда и в случае слабой гравитации определена пассивная гравитационная масса фотона и материальной частицы при условии соотношения между гравитационным потенциалом и ее скоростью $\alpha / r << V^2 / c^2$. Найдена активная гравитационная масса для частного случая системы из двух одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях.

1. Введение.

В общей теории относительности (ОТО) определение импульсов материальных и световых частиц, движущихся в криволинейном пространстве-времени, и сил, действующих на них, имеет целью найти релятивистские поправки к теории тяготения Ньютона для слабого гравитационного поля. Если в качестве составляющих 4-вектора силы, действующей на материальную частицу единичной массы, рассматривать вторые производные координат по пути [1-3], то в ньютоновском пределе величина, играющая роль пассивной гравитационной массы, оказывается зависящей от направления движения частицы [4]. Это же имеет место и для фотона, если с 4-силой отождествлять вторые не производные координат по аффинному параметру, в качестве которого выбирается координатное время.

Другим подходом является выбор лагранжиана частицы, определение обобщенных сил как его частных производных по координате в соответствии с механикой Лагранжа. [5-8]. В ОТО физические скорости частиц ставятся в соответствие компонентам контравариантного вектора 4-скорости. Поэтому с физической силой связывается вектор с верхними индексами, ассоциированный с вектором обобщенных сил. В этом случае пассивная гравитационная масса как материальной, так и световой частиц оказывается независящей от направления их движения. Энергией и импульсами частиц считаются компоненты контравариантного 4-вектора энергии-импульса, как это делается в [1] для частицы, движущейся в пространстве-времени Миньковского.

В доказательстве Фока движения света по геодезическим [9] в качестве гамильтониана берется временная составляющая ковариантного вектора 4-скорости. Применение основанного на лагранжевой механике вариационного принципа стационарного интеграла энергии (ПСИЭ) к движению свето-подобной частицы в гравитационном поле [5-8] не приводит к нарушению изотропности светового пути. В [10] был предложен обобщенный принцип Ферма, в котором используется вариация интеграла временной компоненты вектора 4-скорости, дающий траекторию движения света, совпадающую с геодезической.

2. Уравнения Лагранжевой механики

В общей теории относительности рассматривается четырехмерное псевдориманово пространство-время с координатами x^i и метрическими коэффициентами g_{ij}, интервал в котором записывается в виде

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad . \tag{2.1}$$

Обозначим $u^i = dx^i / d\mu$ вектор 4-скорости частицы, где μ - изменяемый параметр. Получим уравнения ее динамики в общем виде.

Лагранжиану частицы L соответствуют ковариантные обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} \tag{2.2}$$

и обобщенные силы

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{2.3}$$

Движение частицы определяется принципом стационарного действия Гамильтона $\delta S = 0$ при

$$S = \int_{\mu_0}^{\mu_1} L\, d\mu\,, \tag{2.4}$$

где μ_0, μ_1 - значения параметра μ в точках, которые соединяет искомая траектория движения. Условие экстремума S приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\mu}\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{2.5}$$

С учетом выражений для обобщенных импульсов (2.2) и сил (2.3) эти уравнения переписываются в виде

$$\frac{dp_\lambda}{d\mu} - F_\lambda = 0\,. \tag{2.6}$$

Лагранжиан выбирается так, что с физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы

$$p^j = g^{j\lambda} p_\lambda\,. \tag{2.7}$$

Гравитационной силе, действующей на нее, ставится в соответствие ассоциированный (2.3) вектор

$$F^l = g^{l\lambda} F_\lambda \tag{2.8}$$

Переходя к ним в уравнениях (2.6), находим

$$g_{\lambda i} F^i = g_{\lambda i}\frac{dp^i}{d\mu} + \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i\,. \tag{2.9}$$

Умножив эти уравнения на $g^{k\lambda}$ и суммируя по дважды встречающемуся индексу λ, получаем

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l} u^l p^i. \tag{2.10}$$

Наличие второго члена в правой части отражает то, что в гравитационном поле сохраняется не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем (см. [1] § 96). Его компоненты выражают скорость изменения приобретенных гравитационным полем энергии и импульса при движении в нем частицы

$$\frac{d\overleftrightarrow{p}^k}{d\mu} = g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^j} u^j p^i \tag{2.11}$$

Интегрирование этой величины по μ дает энергию и импульс, полученных гравитационным полем на некотором промежутке ее траектории. В результате уравнение (2.10) может быть записано в виде

$$F^k = \frac{dp^k}{d\mu} + \frac{d\overset{\leftrightarrow}{p}^k}{d\mu}. \tag{2.12}$$

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что сила, действующая на частицу равна по величине и противоположна по знаку силе, действующей источник гравитации со стороны частицы. Это эквивалентно выполнению третьего закона Ньютона.

3. Динамика материальной частицы

Рассмотрим динамику материальной частицы. Лагранжиан материальной частицы с массой покоя m следующий

$$L_m = cm\sqrt{g_{ij}u^i u^j}, \tag{3.1}$$

Для материальных частиц параметр μ совпадает с интервалом: $\mu = s$. С физическими энергией и импульсом частицы связываются контравариантные импульсы (2.7), принимающие вид

$$p^i = cmu^i. \tag{3.2}$$

Такой выбор обусловлен тем, что только в этом случае компоненты 4-вектора импульса совпадают по знаку с компонентами вектора 4-скорости. Первая компонента определяет энергию частицы

$$E = cp^1. \tag{3.3}$$

Гравитационная сила, действующая на материальную частицу, ввиду (2.8) определяется формулой

$$Q^k = cF^k = \frac{1}{2}c^2 m g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j. \tag{3.4}$$

Согласно общей теории относительности движение материальной частицы определяется уравнениями геодезической линии. Для материальной частицы при лагранжиане (3.1) они могут быть получены из принципа стационарного действия Гамильтона [9] и тождественны уравнениям (2.6).

4. Материальная частица в поле Шварцшильда

Гравитационное поле сферического тела вне его источника в сферических координатах $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4.1}$$

где постоянная

$$\alpha = \frac{2\gamma M}{c^2} \tag{4.2}$$

задается гравитационной постоянной γ и гравитационной массой тела M.

Получим вектор 4-скорости материальной частицы, движущейся в нем. Уравнения (2.6) для времени-подобного интервала при лагранжиане (3.1) для $i = 1, 3, 4$ примут вид

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)u^1\right] = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2u^3\right) - r^2 \sin\theta\cos\theta u^{42} = 0\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \sin^2\theta u^4\right) = 0 \tag{4.5}$$

Дополнительно из выражения для метрики (4.1) следует

$$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(u^1\right)^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\left(u^2\right)^2 - r^2\left[\left(u^3\right)^2 + \sin^2\theta\left(u^4\right)^2\right] = 1 \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.3) находим

$$\frac{cdt}{ds} = \eta\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \tag{4.7}$$

где η - постоянная. Выберем систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, что дает

$$\frac{d\theta}{ds} = 0\,. \tag{4.8}$$

Тогда (4.5) приносит

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{A}{r^2}\,, \tag{4.9}$$

где A - постоянная. Подставляя (4.7)-(4.9) в (4.6), получаем

$$\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{\eta^2 - \left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \tag{4.10}$$

Деление (4.10) на (4.7) дает

$$\dot{r} = \pm c\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}\left(1+\frac{A^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\,. \tag{4.11}$$

Для мировых линий с неограниченным r значение η определяется величиной радиальной скорости на бесконечности $\dot{r} = V$ и составит

$$\eta_1 = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}\,. \tag{4.12}$$

Если траектория свободно движущейся частицы такова, что радиальная координата имеет конечное экстремальное значение r_{ext} , то уравнение (4.11) ввиду условия $\dot{r}(r_{ext}) = 0$ приносит

$$\eta_2 = \left[\left(1+\frac{A^2}{r_{ext}^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{r_{ext}}\right)\right]^{1/2} \tag{4.13}$$

Для неограниченных по радиусу траекторий, имеющих ось симметрии, выполняется $\eta_1 = \eta_2$.

Подставляя найденные компоненты вектора 4-скорости в выражение для вектора гравитационной силы (3.4), действующей на материальную частицу, находим его единственную ненулевую компоненту

$$Q^2 = \frac{c^2 m\alpha}{r^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta^2 r}{r-\alpha}\right) + \frac{cA^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right). \tag{4.14}$$

При слабой гравитации, неограниченном радиальном движении ($A = 0$, $\eta = \eta_1$) и $\alpha / r << V^2 / c^2$ она преобразуется к виду

$$\tilde{Q}^2 = -\frac{c^2 m\alpha}{2r^2}\left(\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}\right). \qquad (4.15)$$

Однако при рассмотрении нерадиального движения ($A \neq 0$) во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной использованием сферической системы координат, следует использовать изотропную форму метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (ct, x, y, z). К ней можно перейти с помощью преобразования

$$r = \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}\ , \qquad (4.16)$$

$$x = \bar{r}\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \bar{r}\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \bar{r}\sin\theta\,, \qquad (4.17)$$

которое приносит

$$ds^2 = c^2\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4 (dx^2+dy^2+dz^2). \qquad (4.18)$$

Будем рассматривать движение в плоскости $z=0$ и искать силу, действующую на частицу, в точке с координатами $(ct, x, 0, 0)$, соответствующими $\theta=\varphi=0$ в сферической системе отсчета. Получаемым при преобразованиях координат в плоскости

$$x = \bar{r}\cos\varphi, \qquad y = \bar{r}\sin\varphi \qquad (4.19)$$

в рассматриваемой точке соответствуют ненулевые пространственные компоненты вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат

$$u_r^2 = \frac{dx}{d\mu} = \frac{d\bar{r}}{d\mu}, \qquad u_r^3 = \frac{dy}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\mu}\bar{r} \qquad (4.20)$$

при $\mu = s$ для материальной частицы. Из преобразования (4.16) следует

$$dr = \left(1-\frac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)d\bar{r}. \qquad (4.21)$$

Ввиду ковариантности уравнений геодезических можно перейти от их решений для метрики Шварцшильда в сферических координатах (4.7)-(4.10) к решению для метрики (4.18), сделав в них преобразование (4.16)-(4.17) и подставив в (4.20). В результате находим ненулевые компоненты вектора 4-скорости:

$$u_r^1 = \eta\left(\frac{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2, \qquad (4.22)$$

$$u_r^2 = \pm\frac{1}{\left(1-\dfrac{\alpha^2}{16\bar{r}^2}\right)}\left[\eta^2 - \left(1+\frac{A^2}{\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4}\right)\left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (4.23)$$

$$u_r^3 = \frac{A}{\bar{r}\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^4} \qquad (4.24)$$

Подставляя полученные компоненты вектора 4-скорости в выражение для силы (3.4) получаем единственную ее ненулевую компоненту

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha}{2\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^3}\left(\eta^2\left[\left(1-\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-3}+\left(1-\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2}\right]-\left(1+\frac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^{-2}\right). \tag{4.25}$$

Это выражение не зависит от постоянной A, определяемой угловой скоростью (4.9), в случае частицы, движущейся по неограниченной мировой линии, чему соответствует постоянная η (4.12) При слабой гравитации и $\alpha / r << V^2 / c^2$ компонента силы Q^2_{rest} совпадет с выражением для силы в сферических координатах при радиальном движении (4.15). Оно является законом гравитации Ньютона при пассивной гравитационной массе материальной частицы

$$m_p^g = m\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2}. \tag{4.26}$$

Однако в общем случае ввиду нековариантности вектора силы (3.4) при преобразованиях координат (4.16), (4.17) в формуле для силы в поле Шварцшильда в сферических координатах (4.14) полученное выражение не совпадет с (4.25) и для радиального движения частицы. В качестве примера рассмотрим гравитационную силу, действующую на неподвижную материальную частицу. Этому случаю соответствуют постоянные $A=0$, $\eta=\eta_2$ и расстояние от центра $r=r_{ext}$. Ненулевая компонента вектора силы (4.14) примет вид

$$Q^2 = -\frac{c^2 m\alpha}{2\bar{r}^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2} \tag{4.27}$$

а полученная для метрики в изотропных прямоугольных координатах компонента (4.25) при подстановке (4.16) составит

$$Q^2_{rest} = -\frac{c^2 m\alpha\left(1-\dfrac{\alpha}{2\bar{r}}-\dfrac{15\alpha^2}{16\bar{r}^2}+\dfrac{\alpha^4}{64\bar{r}^4}\right)}{2\bar{r}^2\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar{r}}\right)^5}. \tag{4.28}$$

Поэтому об аналогии с ньютоновской гравитацией и гравитационной массе материальной частицы можно говорить только в пределе слабой гравитации.

5. Частный случай системы, состоящей из двух движущихся тел

Рассмотрим систему из двух тел A и B с одинаковой массой M. Предполагаем, что они движутся в противоположных направлениях в системе отсчета $K'=(t',x',y',z')$ с одинаковыми по величине скоростями v и $-v$. Будем считать, что в момент времени $t'=0$ их расположение таково, что для определения создаваемой этой системой гравитации в рассматриваемой области расстоянием δr между ними можно пренебречь.

При слабой гравитации метрика (4.18) в приближенном виде становится следующей

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)dt^2-\left(1+\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{5.1}$$

Применим к ней преобразования Лоренца

$$t=\frac{t'+\dfrac{\tilde{v}}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{\tilde{v}^2}{c^2}}},\ x=\frac{x'+\tilde{v}t'}{\sqrt{1-\dfrac{\tilde{v}^2}{c^2}}},\ y=y',\ z=z' \tag{5.2}$$

при условии $\alpha / \delta r << \tilde{v}^2 / c^2$. Оно означает, что искажения пространства и времени, вызываемые наличием Лоренц-фактора будут на порядок больше того, что вызывает гравитация. Поэтому влияние гравитации на преобразования Лоренца в данном случае можно считать несущественным и применять их к метрике (5.1). Преобразование координат при

$$\overline{r}' = \sqrt{\left(\frac{x' + \tilde{v}t'}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}}\right)^2 + y'^2 + z'^2} \tag{5.3}$$

приносит

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{\overline{r}'}\right)dt'^2 - \frac{4c^2\tilde{v}}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{\overline{r}'}dt'dx' - \left(1 + \frac{c^2 + \tilde{v}^2}{c^2 - \tilde{v}^2}\frac{\alpha}{\overline{r}'}\right)dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{\overline{r}'}\right)(dy'^2 + dz'^2). \tag{5.4}$$

В системах отсчета K_A , K_B , связанных с рассматриваемыми телами, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (5.1). Перейдем от этих систем к системе координат K', с помощью преобразований Лоренца при

$$\tilde{v} = v \tag{5.5}$$

и

$$\tilde{v} = -v. \tag{5.6}$$

Если представить метрические коэффициенты в виде $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, где η_{ij} - соответствуют метрике Миньковского, то в случае слабой гравитации при рассмотрении общего поля, создаваемого n подсистемами [1] с метрическими коэффициентами $g_{ij}^n = \eta_{ij} + h_{ij}^n$, выполняется соотношение $h_{ij} \approx \sum_n h_{ij}^n$. Суммируя поля, получаемые после подстановок (5.5) и (5.6) в метрику (5.4), находим интервал пути для времени близком к $t' = 0$ в системе из двух тел:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{\overline{r}'}\right)dt'^2 - \left(1 + \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}\frac{\alpha_1}{\overline{r}'}\right)dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{\overline{r}'}\right)(dy'^2 + dz'^2) \tag{5.7}$$

при $\alpha_1 = 2\alpha$.

Получим ускорение материальной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K'. Будем использовать уравнения геодезических

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0, \tag{5.8}$$

где $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ - символы Кристоффеля. Для пространственных координат с индексами $k = 2, 3, 4$ находим

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}(u^1)^2. \tag{5.9}$$

При умножении на коэффициент $c^2 m$ правая часть этого выражения совпадет с гравитационной силой (3.4), так как неподвижная частица не передает импульс (2.11) гравитационному полю:

$$\frac{d\overset{\leftrightarrow}{p}^k}{ds} = 0. \tag{5.10}$$

Уравнения (5.9) без учета малых величин большего порядка приносят координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}\frac{c^2 x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\overline{r}'^3}, \; \ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y'\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\overline{r}'^3}, \; \ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z'\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\frac{\alpha_1}{\overline{r}'^3}. \tag{5.11}$$

в момент времени $t' = 0$. Если пространственный радиус-вектор частицы перпендикулярен линии движения тел ($x' = 0$), то полученный результат соответствует ньютоновской гравитации при активной гравитационной массе материальной частицы

$$M_1^g = M_1 \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}, \tag{5.12}$$

где $M_1 = 2M$. При $v = V$ эта формула тождественна соотношению между массой покоя частицы и ее пассивной гравитационной массой (4.26). Наличие Лоренц-фактора в качестве коэффициента при координате x' обусловлено тем, что движение частицы рассматривается в системе отсчета, относительно которой источники гравитации движутся вдоль этой координаты.

6. Принцип стационарного интеграла энергии фотона

Для определения динамики фотона в гравитационном поле будем использовать ПСИЭ [5-8]. Рассмотрим интервал в псевдоримановом пространстве-времени с метрическими коэффициентами $\tilde{g}_{ij}$:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j, \tag{6.1}$$

где $\tilde{g}_{11} = \rho^2 g_{11}$, $\tilde{g}_{1p} = \rho g_{1p}$, $\tilde{g}_{pq} = g_{pq}$ при $p,q = 2,3,4$. Движению света соответствует условие $ds = 0$. При $g_{11} \neq 0$ переменная ρ задается выражением

$$\rho = \frac{-g_{1p}u^p + \sigma\sqrt{(g_{1p}g_{1q} - g_{11}g_{pq})u^p u^q}}{g_{11}u^1}, \tag{6.2}$$

где σ принимает значения ± 1, а 4-скорости u^i определяются при условии, что μ является аффинным параметром Далее будут рассматриваться вариации функции (6.2) вблизи ее значения $\rho = 1$, которому соответствуют метрические коэффициенты $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$.

Если $g_{11} = 0$ и хотя бы для одного p выполняется $g_{1p} \neq 0$, то получим

$$\rho = -\frac{g_{pq}u^p u^q}{2g_{1k}u^1 u^k}, \tag{6.3}$$

где k принимает значения 2,3,4.

Лагранжиан свободно движущейся частицы берется в виде

$$L = -\rho. \tag{6.4}$$

Для обоих значений ρ (6.2), (6.3) ковариантные обобщенные импульсы (2.2) и силы (2.3) примут вид

$$p_\lambda = \frac{u_\lambda}{u^1 u_1}, \tag{6.5}$$

$$F_\lambda = \frac{1}{2u_1 u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j. \tag{6.6}$$

Следует отметить, что величины F_λ формируют вектор, который не является тензором. Выбранный Лагранжиан соответствует соотношению

$$\rho = u^{\lambda}\frac{\partial L}{\partial u^{\lambda}} - L\,, \tag{6.7}$$

являющимся интегралом движения [11] и, соответственно, ρ будет энергией системы, объединяющей фотон и гравитационное поле, задаваемое метрикой (2.1).

Уравнения движения находятся из принципа стационарного действия Гамильтона (2.4), которое ввиду (6.4) может быть записано в форме

$$S = -\int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho d\mu \ . \tag{6.8}$$

Величина ρ ненулевая, ее вариации оставляют интервал светоподобным. Уравнения движения будут уравнениями Эйлера-Лагранжа (2.5).

Контравариантный вектор обобщенных импульсов записывается в виде

$$p^{\lambda} = \frac{1}{u^1 u_1} u^{\lambda}. \tag{6.9}$$

В пространстве Миньковского при аффинном параметре $\mu = ct$ физические энергия и импульс фотона с частотой ν составляют контравариантный 4-вектор импульса $\pi^i = (h\nu / c)u^i$, где h - постоянная Планка. При произвольном аффинном параметре он переписывается в виде

$$\pi^i = \frac{h\nu}{c}\frac{u^i}{u^1}\,. \tag{6.10}$$

И для псевдориманова пространства-времени аналогичные энергия и импульс фотона в координатной системе отсчета связываются с контравариантными импульсами. Полагая, что ν_0 - некоторое фиксированное значение частоты фотона, такое, что выполняется $\nu = \nu_0 / u_1$, и сравнивая выражения для π^i и p^i, получаем

$$\pi^i = \frac{h\nu_0}{c} p^i\,. \tag{6.11}$$

Лаграгжиан (6.4) соответствует частице с единичной энергией. Для фотона он выбирается следующим:

$$L_{ph} = \frac{h\nu_0}{c} L\,. \tag{6.12}$$

В этом случае компонентам ассоциированного вектора обобщенных сил

$$F_{\lambda} = \frac{1}{2u_1 u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\lambda}} u^i u^j. \tag{6.13}$$

ставятся в соответствие гравитационные силы

$$Q^l = h\nu_0 F^l \tag{6.14}$$

7. Согласованность ПСИЭ для фотона и обобщенного принципа Ферма

Принцип Ферма для стационарного гравитационного поля [1,12] формулируется следующим образом

$$\delta t = \frac{1}{c}\delta\int \frac{1}{g_{11}}\left(dl - g_{1k}dx^k\right) = 0\,, \tag{7.1}$$

где элемент пространственного расстояния вдоль луча есть

$$dl^2 = \left(\frac{g_{1p}g_{1q}}{g_{11}} - g_{pq}\right)dx^p dx^q \tag{7.2}$$

Обозначив

$$df = \frac{1}{g_{11}}\left(dl - g_{1k}dx^k\right) \tag{7.3}$$

и сравнивая это выражение с (6.2), при $\sigma = 1$ записываем

$$\frac{df}{d\mu} = \rho u^1 . \tag{7.4}$$

Поэтому вариация интеграла (7.1) равносильна вариации

$$S_F = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \rho u^1 d\mu \tag{7.5}$$

В [10] предложен обобщенный принцип Ферма с применением принципа минимума Понтрягина из теории оптимального контроля. Данный подход распространяет принцип Ферма для стационарного гравитационного поля на нестационарные метрики. Получены динамические уравнения

$$Q = u^1 \quad , \tag{7.6}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x^q} - \frac{\partial Q}{\partial x^1}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^q} = 0 \tag{7.7}$$

и показано, что их решения являются изотропными геодезическими.

Докажем, что эти уравнения тождественны уравнениям Эйлера-Лагранжа (2.5) при лагранжиане (6.4). Функция Q [10] совпадает с выражением для производной $df/d\mu$, получаемым из уравнения (7.3), при условии, что метрические коэффициенты зависят также и от времени. Поэтому из уравнения (7.4) следует выражение для энергии

$$\rho = \frac{Q}{u^1} . \tag{7.8}$$

Ввиду (6.9) уравнения (2.5) для пространственных координат приносят

$$\frac{1}{u^1}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial Q}{\partial u^q}\right) - \frac{1}{\left(u^1\right)^2}\frac{\partial Q}{\partial u^q}\frac{du^1}{d\mu} - \frac{1}{u^1}\frac{\partial Q}{\partial x^q} = 0. \tag{7.9}$$

Для временной координаты ($\lambda = 1$) из уравнений Эйлера-Лагранжа в форме (2.6) при обобщенных импульсах (6.5) и силах (6.6) следует

$$\frac{du^1}{d\mu} + \frac{u^1}{2u_1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}u^i u^j = 0 . \tag{7.10}$$

Сравнивая это уравнение и следующее из (2.3), (6.4) и (6.6) соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2u_1 u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j , \tag{7.11}$$

ввиду (7.8) получаем

$$\frac{du^1}{d\mu} = \left(u^1\right)^2 \frac{\partial (Q/u^1)}{\partial x^1} = u^1 \frac{\partial Q}{\partial x^1}. \tag{7.12}$$

Подстановка этого выражения в уравнения (7.9) и умножение их на u^1 дает уравнения (7.7). То есть, тождественность уравнений, полученных с помощью обобщенного принципа Ферма и ПСИЭ для свето-подобной частицы доказана. Ввиду эквивалентности решений, полученных из первого принципа, изотропным геодезическим, решения, следующие из второго принципа, также им эквивалентны. По сравнению с принципом Ферма ПСИЭ дает систему уравнений, которая имеет на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить аффинный параметр и вектор энергии-импульса частицы.

8. Общий вид выражения для силы

Уравнение (2.12) для действующей на фотон силы (6.13) принимает вид

$$\frac{dp^k}{d\mu} + g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}u^l p^i = g^{k\lambda}\frac{1}{2u_1u^1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}u^i u^j. \tag{8.1}$$

Произведем замену аффинного параметра

$$d\acute{\mu} = d\mu \cdot u_1 u^1. \tag{8.2}$$

Выражение для импульсов (6.9) примет вид

$$p^\lambda = \acute{u}^\lambda, \tag{8.3}$$

где 4-скорость определяется как $\acute{u}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\acute{\mu}}$. Подстановка (8.2) в выражение (8.1) приносит

$$\frac{dp^k}{d\acute{\mu}} + g^{k\lambda}\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^l}\acute{u}^l p^i = \frac{1}{2}g^{k\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}\acute{u}^i\acute{u}^j. \tag{8.4}$$

Правая часть этой формулы с точностью до коэффициента совпадает с силой (3.4), действующей на материальную частицу единичной энергии. Она является ковариантной для линеаризованных метрик.

9. Динамика фотона в поле Шварцшильда

Рассмотрим динамику светоподобной частицы в статическом центрально-симметричном гравитационном поле, описываемом метрикой Шварцшильда (4.1).

Обобщенные импульсы (6.5) для циклических координат t, φ являются постоянными движения

$$B = \frac{cdt}{d\mu}, \tag{9.1}$$

$$C = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\mu}\left(1-\alpha/r\right)^{-1}. \tag{9.2}$$

При $B=1$ ввиду (6.9) и (6.11) временная компонента вектора 4-скорости соответствует величине энергии фотона

$$E_{ph} = c\pi^1 \tag{9.3}$$

на удалении от центра гравитации $E_{ph0} = h\nu_0$. Рассматривая движение в плоскости $\theta = \pi/2$ получим угловую компоненту вектора 4-скорости

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{C}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) \tag{9.4}$$

Для изотропных кривых ($ds = 0$) из (4.1) находим

$$\frac{dr}{d\mu} = \pm\left[\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2 - \left(\frac{C}{r}\right)^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^3\right]^{1/2}. \tag{9.5}$$

Единственной ненулевой компонентой ассоциированного вектора обобщенных сил (6.13) является

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2r}\right) \tag{9.6}$$

При радиальном движении, $C=0$, она равна

$$F^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{9.7}$$

что совпадает с удвоенной силой, действующей на частицу в ньютоновской гравитации. Ввиду (6.14) она соответствует пассивной гравитационной массе фотона

$$m_p^{ph} = \frac{2h\nu_0}{c^2}\,. \tag{9.8}$$

Этот результат согласуется с мысленным экспериментом по «взвешиванию» фотона [13], в котором он совершает периодическое движение в вертикальном направлении между двумя горизонтальными отражающими поверхностями.

При рассмотрении нерадиального движения во избежание появления фиктивной составляющей силы, обусловленной сферичностью системы координат, воспользуемся формой метрики Шварцшильда в прямоугольных координатах (4.18). Так же как и для материальной частицы, будем рассматривать движение в плоскости $z = 0$ и искать силу, действующую на светоподобную частицу в точке с координатами $(ct, x, 0, 0)$, что соответствует значению угловой координаты $\varphi = 0$ в сферической системе отсчета. Поскольку 4-скорости являются ковариантными векторами, то от решений уравнений движения светоподобной частицы (9.1), (9.4), (9.5) к компонентам вектора 4-скорости в прямоугольной системе координат можно перейти с помощью преобразований (4.20). Его ненулевые компоненты с учетом (4.16) и (4.21) примут вид

$$u^1 = 1,\; u^2 = \pm\frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^3}\left[1-\frac{C^2\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^2}{\bar r^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^6}\right]^{1/2},\; u^3 = \frac{C\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^2}{\bar r\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^6}\,. \tag{9.9}$$

Подставляя эти значения и

$$u_1 = \left(\frac{1-\dfrac{\alpha}{4\bar r}}{1+\dfrac{\alpha}{4\bar r}}\right)^2, \tag{9.10}$$

в (6.13), находим единственную ненулевую компоненту вектора силы, действующей на светоподобную частицу:

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1-\dfrac{\alpha}{8\bar r}\right)}{\bar r^2\left(1+\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)^5\left(1-\dfrac{\alpha}{4\bar r}\right)} \tag{9.11}$$

Она преобразуется к виду

$$F^2 = -\frac{\alpha\left(1-\dfrac{\alpha}{8\bar r}\right)}{r^2\left(1-\dfrac{\alpha^2}{16\bar r^2}\right)}\,. \tag{9.12}$$

Обобщенная сила, действующая на фотон, не зависит от направления его движения. Это выражение отличается от формулы (9.7), соответствующей радиальному движению в сферических координатах, что является следствием нековариантности вектора F^l. Однако в пределе слабой гравитации ($r \gg \alpha$) эти выражения асимптотически сходятся и дают закон тяготения Ньютона при пассивной гравитационной массе фотона (9.8), равной удвоенной гравитационной массе материальной частицы эквивалентной ему энергии.

Гравитационное поле потока электромагнитного излучения определяется из решения уравнений Эйнштейна $R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R = \chi T_j^i$ для тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T_{ij}^{EM} = \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} - F_i^k F_{jk}$, где F_{ij} - тензор электромагнитного поля. В случае слабой гравитации из анализа ускорения материальной частицы в нем следует, что активная гравитационная масса пучка света или светового пакета в два раза больше аналогичной массы стержня равной ему энергии [14-16]. Следует отметить, однако, что гравитационное взаимодействие между электромагнитным излучением и материальными частицами отличается от этого взаимодействия между фотонами. Равенство активной и пассивной гравитационных масс фотона означает выполнение 3-го закона Ньютона при гравитационном взаимодействии света и материальных частиц и законов сохранения энергии и импульса.

10. Гравитационное красное смещение

Покажем, что значения энергии материальной частицы (3.3) и фотона (9.3) в поле Шварцшильда соответствуют гравитационному красному смещению. Оно определяется изменением соотношения между энергией статической материальной частицы и фотона [17]. В качестве материальной частицы может рассматриваться отдельный атом.

Найдем энергию материальной частицы, неподвижной в поле Шварцшильда. Ей будет соответствовать точка с максимальным радиусом траектории, задаваемой постоянной $\eta = \eta_2$ (4.13) при $A = 0$, которая составит

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{1/2}. \tag{10.1}$$

Подставляя это значение в выражение для 1-й компоненты вектора 4-скорости (4.7), при $r = r_{ext}$ получим

$$u^1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r_{ext}}\right)^{-1/2}, \tag{10.2}$$

что ввиду (3.2) соответствует энергии неподвижной материальной частицы

$$E = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} E_0, \tag{10.3}$$

где $E_0 = mc^2$ - ее энергия покоя в собственной системе отсчета.

Энергия фотона (9.3) ввиду (6.9) и (6.11) составляет

$$E_{ph} = \frac{h\nu_0}{u_1}. \tag{10.4}$$

В поле Шварцшильда при временной компоненте вектора 4-скорости $u^1 = 1$ она примет вид

$$E_{ph} = h\nu_0 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}. \tag{10.5}$$

Здесь ν_0 соответствует частоте фотона в точке траектории на удалении от центра гравитации ($r \to \infty$). При обозначении энергии фотона в этой точке E_{ph0} это выражение переписывается как

$$E_{ph} = E_{ph0} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}. \tag{10.6}$$

Отношение энергии фотона к энергия неподвижной материальной частицы следующее:

$$\frac{E_{ph}}{E} = \frac{E_{ph0}}{E_0}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2}. \tag{10.7}$$

Его изменение проявляется в гравитационном красном смещении частоты фотонов, испущенных в точке с меньшим расстоянием от центра по сравнению с точкой их поглощения атомами.

11. Выводы

Динамика частиц в криволинейном пространстве-времени рассмотрена с использованием механики Лагранжа. Установлено соответствие между физическими энергией и импульсом частицы, определяемыми из негравитационных взаимодействий, и контравариантным вектором обобщенных импульсов. Полученные динамические уравнения включают в себя скорость изменения вектора энергии-импульса, компоненты которого выражают приобретенные гравитационным полем энергию и импульс при движении в нем частицы. При рассмотрении динамики отдельной частицы этот вектор является аналогом псевдотензора, используемого в законах сохранения в тензорном виде.

Хотя полученные обобщенные силы не являются ковариантными величинами, в пределе слабой гравитации, описываемой метрикой Шварцшильда, они выражают ньютоновский закон гравитации с пассивной массой частиц, соответствующей активной гравитационной массе движущихся точечных тел и светового пучка. При этом, пассивная гравитационная масса фотона не зависит от направления его движения. Совпадая с активной гравитационной массой направленного электромагнитного излучения, она равна удвоенной массе материальной частицы эквивалентной его энергии. Нековариантность вектора обобщенных сил и вектора, составленного из скоростей передачи энергии и импульса гравитационному полю при движении в нем частицы, имеет ту же природу, что и нековариантность псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, с помощью которого были рассчитаны подтвержденные экспериментально изменения круговых орбит двух тел, движущихся вокруг общего центра, в результате потери энергии, вызванной излучением гравитационных волн (Нобелевская премия, 1993).

Рассмотрена система из двух близко расположенных одинаковых тел, движущихся в противоположных направлениях, с малой потенциальной энергией по сравнению с ее кинетической энергией. Его можно описать с помощью метрики, полученной путем применения преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда. Ее гравитационное воздействие на материальную частицу зависит от угла между радиус вектором и линией движения тел.

Применение ПСИЭ и обобщенного принципа Ферма для свето-подобной частицы в гравитационном поле приводит к общему решению, которое является изотропной геодезической линией. ПСИЭ определяет систему уравнений, имеющую по сравнению с результатом обобщенного принципа Ферма на одно уравнение больше. Это позволяет однозначно определить вектор энергии-импульса частицы. В поле Шварцшильда соотношение между энергией фотона и неподвижной материальной частицы соответствует характеристике гравитационного красного смещения.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Физматлит, М. (2003).
2. С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М. (1975).
3. В. И. Ритус, УФН **185**, 1229 (2015).
4. Л. Б. Окунь, УФН **158**, 511 (1989).
5. В. Б. Беляев, *Динамика в общей теории относительности*: *вариационные методы*, УРСС, М. (2017).
6. D. Yu. Tsipenyuk and W. B. Belayev, J. Phys.: Conf. Ser. **1251** 012048 (2019).
7. D. Yu. Tsipenyuk and W. B. Belayev, Rom. Rep. Phys., **71**:4 109 (2019).

8. Д. Ю. Ципенюк, В. Б. Беляев, РЭНСИТ, **11**:3, 249 (2019).
9. В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, ГИФМЛ, М. (1961).
10. V. P. Frolov, Phys. Rev. D, **88**:6 06403910 (2013).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 1: *Механика*, Физматлит, М., (2004).
12. V. Perlick, Living Rev. Relativity, 7 9 (2004).
13. Л. А. Ривлин, УФН, **167** 309 (1997).
14. Р. Толмен, *Относительность, термодинамика и космология*, Наука, М., 1974.
15. R. C. Tolman, P. Ehrenfest, B. Podolsky, Phys. Rev., **37**, 602 (1931).
16. V. Faraoni, R. M. Dumse, Gen. Relativ. Gravit. **31**, 91 (1999).
17. Л. Б. Окунь, К. Г. Селиванов, В. Телегди, УФН **169** 1141 (1999).