Гравитационная масса разреженного облака релятивистских материальных частиц.

В. Б. Беляев,

E-mail: wbelayev@yandex.ru

Рассматривается облако релятивистских материальных частиц, гравитационным взаимодействием между которыми можно пренебречь. Гравитационная масса облака определяется для области, где оно может рассматриваться как точечное тело. Установлена зависимость этой массы от полного эллиптического интеграла 2-го рода от отношения скорости частиц к скорости света.

1. Введение

Слабый принцип эквивалентности, который Эйнштейн специально изложил в своей общей теории относительности, приравнивает пассивную гравитационную массу и инерционную массу, и эти массы идентифицируются с активной гравитационной массой материи [1]. Энергия массы соответствует специальной теории относительности и равна энергии инерционной массы. Это послужило основой для введения гидродинамического тензора $T^{ij} = (c^2\rho + p)u^i u^j - g^{ij} p$ при плотности ρ и давлении p адиабатической жидкости без трения в качестве источника гравитации вещества в полевых уравнениях. В [2, 3] утверждается, что идентификация инерционной и активной гравитационных масс неверна, а тензор энергии-импульса должен определяться плотностью активной гравитационной массы и потенциалом скалярного поля. В настоящей работе активная гравитационная масса разреженного облака материальных релятивистских частиц получена на основе свойств преобразований Лоренца и геометрии пространства-времени Шварцшильда.

2. Слабогравитирующее облако газа.

Мы изучаем слабо гравитирующее газовое облако, состоящее из одинаковых частиц с массой покоя m, хаотично движущаяся со скоростью, имеющей абсолютное значение v в некоторой системе координат $\mathrm{K}' = (t', x', y', z')$. Предполагается, что в момент времени $t' = 0$ расстояниями δr между частицами можно пренебречь при определении гравитации, создаваемой этим облаком в рассматриваемой области, находящейся на удалении. Разрежение газа определяется условием

$$\alpha_M / \delta r << v^2 / c^2 \qquad (1)$$

при скорости света c и $\alpha_M = \frac{2\gamma M}{c^2}$ с гравитационной постоянной γ и гравитационной массой облака M . Статистически облако может быть представлено в виде набора систем, состоящих из двух частиц A и B, которые движутся в противоположных направлениях.

Рис. 1

Слабое гравитационное поле одной частицы приближенно описывается [4] в связанных с ней координатах $К = (t, x, y, z)$ линеаризованной изотропной метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2)$$

при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\alpha = \frac{2\gamma m}{c^2}$.

3. Применение преобразований Лоренца к метрике Шварцшильда

Условие (1) означает, что искажения длины и времени, вызванные наличием Лоренц-фактора $\frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}$ при $\tilde{\beta} = \frac{\tilde{v}}{c}$, будут на порядок больше, чем искривление пространства-времени под действием гравитации. Поэтому ее влияние на преобразования Лоренца

$$t = \frac{t' + \frac{\tilde{\beta}}{c}x'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}, \qquad x = \frac{x' + \tilde{v}t'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}, \qquad y = y', \qquad \mathrm{z} = \mathrm{z}'. \quad (3)$$

при

$$\tilde{v} = v \quad (4)$$

и

$$\tilde{v} = -v \quad (5)$$

будет незначительно, и они могут быть применены к метрике (2). Преобразование координат при

$$r' = \sqrt{\left(\frac{x' + \tilde{v}t'}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}\right)^2 + {y'}^2 + {z'}^2} \quad (6)$$

приносит

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{1+\tilde{\beta}^2}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{r'}\right){dt'}^2 - \frac{4\tilde{v}}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{r'}dt'dx' - \left(1 + \frac{1+\tilde{\beta}^2}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha}{r'}\right){dx'}^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r'}\right)({dy'}^2 + {dz'}^2).$$

(7)

4. Система из двух тел

В системах отсчета $К_A$, $К_B$, связанных с рассматриваемыми телами, Рис. 1, гравитация каждого из них в отдельности описывается в соответствующей системе метрикой (2). Перейдем от этих систем координат к $К'$, используя преобразования Лоренца для скоростей (4), (5).

Если мы представим метрические коэффициенты в форме

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \xi_{ij} \,, \qquad (8)$$

где η_{ij} соответствуют метрике Минковского, то при слабой гравитации [5] соотношение

$$\xi_{ij} \approx \sum_n \xi_{ij}^n \qquad (9)$$

выполняется для общего поля, созданного n подсистемами с метрическими коэффициентами

$$g_{ij}^n = \eta_{ij} + \xi_{ij}^n \,. \qquad (10)$$

Суммируя коэффициенты метрик, получаемых после подстановок значений скоростей (4) и (5) в метрику (7), находим, что поле рассматриваемой гравитационной системы в окрестности $t' = 0$ приближенно будет описываться метрикой

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{r'}\right)dt'^2 - \left(1 + \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{r'}\right)dx'^2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{r'}\right)(dy'^2 + dz'^2) \qquad (11)$$

при $\alpha_1 = 2\alpha$ и $\beta = \frac{v}{c}$.

Получим ускорение материальной частицы в момент времени, когда она покоится в системе отсчета K'. Из уравнений геодезических $\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0$ для пространственных координат с индексами $k = 2,3,4$, подставляя значения символов Кристоффеля $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$, находим

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} (u^1)^2. \qquad (12)$$

Это уравнение приносит координатные ускорения

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{2}\frac{c^2 x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{r'^3}\,, \qquad (13)$$

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{2}c^2 y' \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{r'^3}\,, \qquad (14)$$

$$\ddot{z}' = -\frac{1}{2}c^2 z' \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\alpha_1}{r'^3} \qquad (15)$$

без малых величин большего порядка.

5. Гравитационная масса облака газа

Определим теперь среднюю гравитационную массу пары подобных частиц из облака газа, которое они образуют. Абсолютная величина ускорения частицы, находящейся на расстоянии $\overrightarrow{r'}$ от тел, составит

$$a' = \sqrt{\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2 + \ddot{z}'^2} \qquad (16)$$

или

$$a' = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)}\frac{c^2\alpha_1}{r'^3}\sqrt{\frac{x'^2}{1-\beta^2}+y'^2+z'^2} \qquad (12)$$

Переходя к сферической системе координат с помощью преобразований

$$x' = r'\cos\varphi, \quad y' = r'\sin\varphi\cos\theta, \quad z' = r'\sin\varphi\sin\theta. \qquad (18)$$

получим

$$a' = \frac{c^2(1+\beta^2)}{2(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{\alpha_1}{r'^2}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}\,. \qquad (19)$$

Для каждой пары частиц из облака газа система координат выбирается так, что ось X' параллельна линии их движения, и расстояние до них составляет r'. В этом случае мы можем усреднить гравитационную массу одинаковых пар частиц, проявляющуюся в точке наблюдения, по углу φ . При их массе покоя $2m$ она будет

$$m_2 = \frac{4m}{\pi}\frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,. \qquad (20)$$

Эта величина определяет гравитационную массу облака, состоящую из n частиц:

$$M = \frac{2nm}{\pi}\frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}E\left(\frac{\pi}{2},\beta\right), \qquad (21)$$

где $E\left(\frac{\pi}{2},\beta\right)$ это полный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода. На рис. 2 показано, как отношение гравитационной массы облака к суммарной массе покоя его частиц $Q = \frac{M}{nm}$ изменяется с увеличением скорости частиц.

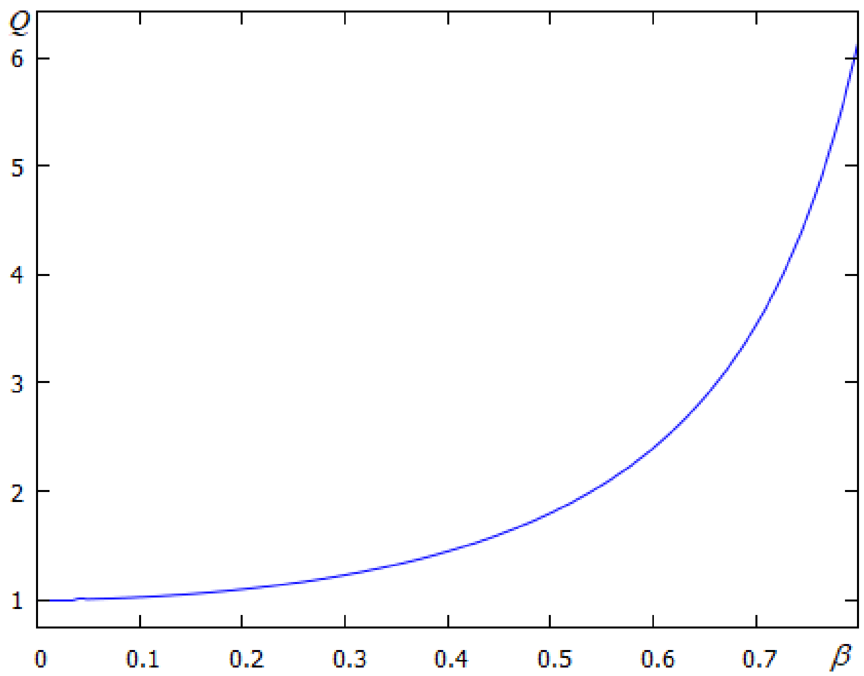

Рис. 2. Зависимость нормированной гравитационной массы облака Q от величины β.

6. Выводы

Из анализа следует ошибочность предположения о равенстве инерционной и активной гравитационной массы системы из двух тел, движущихся навстречу друг другу. Результирующая гравитационная масса газового облака не подтверждает концепцию плотности массы вещества, входящей в состав гидродинамического тензора, которая принимается за плотность источника гравитации. Активная гравитационная масса разреженного облака материальных релятивистских частиц, полученная на основе свойств преобразований Лоренца и геометрии пространства-времени Шварцшильда, с возрастанием их скорости увеличивается быстрее чем суммарная инертная масса его частиц.

Литература

1. A. Einstein: Ann. der Physik Vol. 49 (1916) p. 769
2. H.G. Ellis: IJMPD Vol. 21 No. 11 (2012) 1242022, arXiv:1205.5552
3. H.G. Ellis: IJMPD Vol. 24 No. 08 (2015) 1550069, arXiv:gr-qc/0701012
4. G.C. McVittie: General Relativity and Cosmology (Chapman and Hall Ltd., London, 1956). [Г. К. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология, Издательство иностранной литературы, Москва, 1961]
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 6-е издание, Наука, Москва, 1973, § 106