Стационарный сферически-симметричный вакуум с нарушенной четностью

Зафар Туракулов

28 марта 2024 г.

Аннотация

Пространство-время, обладающее указанными свойствами представляется аналитически системой сферических координат и полем ортонормированных тетрад определенного вида. Явный вид этого поля содержит две неопределенные функции радиальной координаты. Вакуум, обладающий теми же свойствами, – это такое пространство-время, но имеющее равный нулю тензор Риччи. Этот тензор находится из структурных уравнений Э. Картана и приравнивание его к нулю приводит к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений для двух искомых функций. Эта система совместима и ее решение эквивалентно решению Тауба-НУТ.

1 Введение

Нарушение пространственной четности, известное из экспериментов по β-распаду, является в действительности свойством пространства-времени и наблюдается в чисто геометрических явлениях. Так, в классе сферически-симметричных моделей пространства-времени, геометрия которых представлена в нашей работе [1], оно проявляется в том, что зеркальное отражение геодезического потока не является геодезическим потоком. Известно, что решение Тауба-НУТ ([2]) описывает сферически-симметричный стационарным вакуум, содержащий черную дыру с определенной массой и гравимагнитным зарядом и, таким образом, может быть выведено из предположения этих свойств. В настоящей работе приводится вывод этого решения на основе этого предположения с использованием метода ортонормированной тетрады и исчисления внешних дифференциальных форм.

Геометрия сферически-симметричного пространства-времени с нарушенной четностью задается в общем случае ортонормированной тетрадой вида

$$\nu^0 = \Phi(s)(\mathrm{d}t + 2l\cos\theta\mathrm{d}\varphi), \qquad \nu^1 = \frac{\mathrm{d}s}{\Phi(s)}, \qquad (1)$$
$$\nu^2 = r(s)\mathrm{d}\theta, \qquad \nu^3 = r(s)\sin\theta\mathrm{d}\varphi,$$

[1]. Решение Тауба-НУТ, выводится обычным путем, состоящим в последовательном вычислении форм связности и кривизны, из которых строятся компоненты тензора Риччи, которые затем приравниваются к нулю. Для вычисления 1-формы связности ${\omega_a}^b$ и 2-формы кривизаны ${\Omega_a}^b$ будут применены первое

$$\mathrm{d}\nu^a + {\omega_b}^a \wedge \nu^b = 0 \tag{2}$$

и второе

$$\mathrm{d}{\omega_a}^b + {\omega_c}^b \wedge {\omega_a}^c - {\Omega_a}^b = 0 \tag{3}$$

структурные уравнения Э. Картана. Подробности этих вычислений приведены в разделе Приложения. Сферическая симметрия задачи оставляет единственную незвисимую переменную, которой является радиальная координата, поэтому вакуумное уравнение Эйнштейна сразу сводится к некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов тетрады (1), которые затем интегрируются.

2 Построение вакуумного решения

В вакууме тензор Риччи равен нулю, поэтому для построения вакуумного решения достаточно решить уравнение $R_{ab} = 0$. Приравнивая правые части равенств (8) из приложения 4.3, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi'' + \frac{r'}{r}\psi' + \frac{2l^2\psi}{r^4} = 0,\\
&\frac{1}{2}\psi'' + \frac{r'}{r}\psi' + 2\frac{r''}{r}\,\psi = 0,\\
&\frac{r'}{r}\psi' + \frac{{r'}^2}{r^2}\psi - \frac{1}{r^2} - \frac{2l^2\psi}{r^4} + \frac{r''\psi}{r} = 0.
\end{aligned}$$

Разность первых двух уравнений приводится к виду $r'' = \dfrac{l^2}{r^3}$ и легко решается. Подходящее решение имеет вид

$$r = \sqrt{s^2 + l^2}. \tag{4}$$

Система сокращаетя до двух уравнений, в качестве которых можно взять первое и последнее, которые также трансформируются полученным результатом. В первом переменная r просто заменяется ее выражение (4), а последнее умножается на r^2 и принимает вид

$$rr'\psi + \left({r'}^2 + rr' - \frac{2l^2}{r^2}\right) - 1 = 0.$$

Далее, в нем используются производные:

$$rr' = s, \quad r'^2 + rr'' = 1.$$

выражение в скобках преобразуется по формуле

$$1 - \frac{2l^2}{s^2 + l^2} = \frac{s^2 - l^2}{s^2 + l^2}.$$

Таким образом система из трех уравнений для двух искомых функций трансформируется систему их двух уравнений для одной искомой

$$\psi'' + \frac{2s}{s^2 + l^2}\,\psi' + \frac{4l^2\psi}{[s^2 + l^2]^2} = 0$$

$$s\psi' + \frac{s^2 - l^2}{s^2 + l^2}\,\psi - 1 = 0.$$

Поскольку получилось два уравнения на одну искомую функцию, необходимо установить их совместимость. Это их свойство следует из того, что первое их них получается дифферецированием второго и делением его на s. Следовательно, для получения решения достаточно решить второе уравнение:

$$s\psi' + \frac{s^2 - l^2}{s^2 + l^2}\,\psi = 1.$$

Оно решается подстановкой $\psi = \dfrac{y}{s^2 + l^2}$, приводящей его к виду

$$y's - y = s^2 + l^2$$

и далее – к

$$s^2 \left(\frac{y}{s}\right)' = s^2 + l^2.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\psi = \frac{s^2 - 2ms - l^2}{s^2 + l^2}.$$

Подставив окончательное решение в выражение для тетрады (1), получаем ее в явном виде:

$$\nu^0 = \sqrt{\frac{s^2 - 2ms - l^2}{s^2 + l^2}}\,(\mathrm{d}t + 2l\cos\theta),$$

$$\nu^1 = \sqrt{\frac{s^2 + l^2}{s^2 - 2ms - l^2}}\,\mathrm{d}s,$$

$$\nu^2 = \sqrt{s^2 + l^2}\,\mathrm{d}\theta, \qquad \nu^3 = \sqrt{s^2 + l^2}\,\sin\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Она соответствует пространству-времени Тауба-НУТ, геометрию которого можно выразить как метрикой, так и ортонормированной тетрадой.

3 Заключение

Гравимагнитный заряд является единственным естественным нарушителем пространственной четности и, поскольку это нарушение наблюдается в физических экспериментах, он представляет собой реально существующую субстанцию. В ряду характеристик, которыми которыми может обладать астрофизический объект, таких, как масса, угловой, электрический и магнитный дипольный моменты, он занимает одно из первых мест. Кроме того, поскольку эта субстанция присуща нейтрону, она является важной характеристикой объектов, содержащих тяжелые элементыи тем более, нейтронных звезд. Все это делает построение решений уравнения Эйнштейна для поля локализованного источника, обладающего массой и гравмимагнитным зарядом, актуальной задачей теоретической физики.

В простейшей постановке этой задачи пространство-время полагается стационарным и сферически-симметричным. Таким образом, оно характеризуется этими двумя симметриями и нарушением пространственной четности. Эти симметрии определяют выбор сферической системы координат $\{t, s, \theta, \varphi\}$, где s – это радиальная координата, . Как показано в нашей работе [1], все три характеристики выражаются ортонормированной тетрадой (1) и, таким образом, рассматриваемая задача сводится к уравнению Эйнштейна для нее. В таком виде уравнение Эйнштейна редуцируется к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений для двух искомых функций, которая совместима и легко интегрируется. Ее решение подставляется в равенство (7), что в результате дает явный вид тетрады (1). Это решение единственно и описывает пространство-время Тауба-НУТ.

4 Приложения

4.1 Вычисление 1-формы связности

Выражение натурального ко-репера через тетраду (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \frac{\nu^0}{\Phi} - \frac{2l\cot\theta}{r}\nu^3, \quad \mathrm{d}s = \Phi(s)\nu^1, \\ \mathrm{d}\theta &= \frac{\nu^2}{r}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\nu^3}{r\sin\theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Оно позволяет выразить производные ко-векторов тетрады через эти же векторы:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\nu^0 &= -\Phi'\,\nu^0\wedge\nu^1 - \frac{2l\Phi}{r^2}\,\nu^2\wedge\nu^3, \quad \mathrm{d}\nu^1 = 0 \\ \mathrm{d}\nu^2 &= \frac{r'\Phi}{r}\,\nu^1\wedge\nu^2, \quad \mathrm{d}\nu^3 = -\frac{r'\Phi}{r}\,\nu^3\wedge\nu^1 + \frac{\cot\theta}{r}\,\nu^2\wedge\nu^3, \end{aligned}$$

необходимые для вычсления 1-формы связности. Для их вычисления искомая форма связности разлагается по тетраде (1)

$$\omega_a{}^b = \gamma_{ca}{}^b \nu^c,$$

что превращает уравнение (2) в систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов связности $\gamma_{ca}{}^b$, которая легко решается. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1{}^0 &= \Phi' \nu^0 = \omega_0{}^1, & \omega_2{}^0 &= -\frac{l\Phi}{r^2}\nu^3 = \omega_0{}^2, \\ \omega_3{}^0 &= \frac{l\Phi}{r^2}\nu^2 = \omega_0{}^3, & \omega_1{}^3 &= \frac{r'\Phi}{r}\,\nu^3 = -\omega_3{}^1, \\ \omega_2{}^1 &= -\frac{r'\Phi}{r}\,\nu^2 = -\omega_1{}^2, & \omega_2{}^3 &= \frac{l\Phi}{r^2}\nu^0 + \frac{\cot\theta}{r}\nu^3 = -\omega_3{}^2, \end{aligned} \tag{6}$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой.

4.2 Производные и произведения 1-форм (6)

Дифференцирование 1-форм (6) с применением равенств (5) приводит к следующим выражениям для их производных. В приведенных ниже выражениях многоточиями обозначены члены, не дающие вклада в те компоненты тензора Римана, котороые впоследствии не войдут в тензор Риччи, например $R_0{}^1{}_{23}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\omega_0{}^1 = -(\Phi''\Phi + \Phi'^2)\,\nu^0 \wedge \nu^1 + \dots, \\ &\mathrm{d}\omega_0{}^2 = \dots - \frac{l\Phi\cot\theta}{r^3}\,\nu^2 \wedge \nu^3 \\ &\mathrm{d}\omega_0{}^3 = \dots, \quad \mathrm{d}\omega_1{}^2 = \left[\Phi\left(\frac{r'\Phi}{r}\right)' + \left(\frac{r'\Phi}{r}\right)^2\right]\,\nu^1 \wedge \nu^2 \\ &\mathrm{d}\omega_2{}^3 = \dots - \frac{1}{r^4}(2l^2\Phi^2 + r^2)\,\nu^2 \wedge \nu^3 \\ &\mathrm{d}\omega_3{}^1 = \left[\Phi\left(\frac{r'\Phi}{r}\right)' + \left(\frac{r'\Phi}{r}\right)^2\right]\,\nu^3 \wedge \nu^1 - \frac{r'\cot\theta}{r^2}\,\nu^2 \wedge \nu^3. \end{aligned}$$

Вычисление призведений этих же 1-форм, входящих в 2-форму кривизны, несколько проще, поэтому ниже приведем только их результат:

$$
\begin{aligned}
&{\omega_a}^1 \wedge {\omega_0}^a = \ldots \\
&{\omega_a}^2 \wedge {\omega_0}^a = -\left(\frac{r'\Phi'\Phi}{r} + \frac{l^2\Phi^2}{r^4}\right)\nu^0 \wedge \nu^2 + \frac{l\Phi\cot\theta}{r^3}\,\nu^2 \wedge \nu^3 \\
&{\omega_a}^3 \wedge {\omega_0}^a = -\left(\frac{r'\Phi'\Phi}{r} + \frac{l^2\Phi^2}{r^4}\right)\nu^0 \wedge \nu^3, \\
&{\omega_a}^2 \wedge {\omega_1}^a = \ldots \\
&{\omega_a}^3 \wedge {\omega_2}^a = \left(\frac{r'^2\Phi^2}{r^2} - \frac{l^2\Phi^2}{r^4}\right)\nu^2 \wedge \nu^3, \\
&{\omega_a}^1 \wedge {\omega_3}^a = \frac{r'\cot\theta}{r^2}\,\nu^2 \wedge \nu^3 + \ldots.
\end{aligned}
$$

4.3 Кривизна пространства-времени

Собирая из полученных выражений по формуле (3) 2-форму кривизны, находим ее компоненты:

$$
\begin{aligned}
&{R_0}^1{}_{01} = -(\Phi''\Phi + \Phi'^2), \\
&{R_0}^2{}_{02} = {R_0}^3{}_{03} = -\left(\frac{r'\Phi\Phi'}{r} + \frac{l^2\Phi^2}{r^4}\right), \\
&{R_2}^3{}_{23} = -\frac{3l^2\Phi^2}{r^4} + \frac{r'^2\Phi^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\
&{R_3}^1{}_{31} = {R_1}^2{}_{12} = \Phi\left(\frac{r'\Phi}{r}\right)' + \left(\frac{r'\Phi}{r}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Далее, из них – компоненты тензора Риччи:

$$
\begin{aligned}
R_{00} = &\ -\left(\Phi\Phi'' + \Phi'^2 + 2\frac{r'}{r}\Phi\Phi' + \frac{2l^2\Phi^2}{r^4}\right), \\
R_{11} = &\ \Phi\Phi'' + \Phi'^2 + 2\Phi\left(\frac{r'\Phi}{r}\right)' + \frac{2r'^2\Phi^2}{r^2}, \\
R_{22} = &\ R_{33} = \frac{2r'\Phi\Phi'}{r} + \frac{r''\Phi^2}{r} + \frac{r'^2\Phi^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2l^2\Phi^2}{r^4}.
\end{aligned}
$$

Эти выражения и линеаризуются подстановкой

$$
\psi = \Phi^2. \tag{7}
$$

Действительно, в результате этой подстановки они принимают вид

$$R_{00} = -\left(\frac{1}{2}\psi'' + \frac{r'}{r}\psi' + \frac{2l^2\psi}{r^4}\right), \tag{8}$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\psi'' + \frac{r'}{r}\psi' + 2\frac{r''}{r}\,\psi,$$

$$R_{22} = R_{33} = \frac{r'}{r}\psi' + \frac{r'^2}{r^2}\psi - \frac{1}{r^2} - \frac{2l^2\psi}{r^4} + \frac{r''\psi}{r},$$

$$\frac{1}{2}R = -\frac{1}{2}\psi'' - \frac{2r'}{r}\psi' - \left(\frac{2r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{l^2}{r^4}\right)\psi + \frac{1}{r^2}.$$

Список литературы

[1] Туракулов З. Я. 2024. Симметрии и четность пространства-времени. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112986

[2] Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна — М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.