ВРЕМЯ ЖИЗНИ СИСТЕМЫ С N РАБОЧИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ И ЕГО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ УСЛОВИИ БЫСТРОГО РЕМОНТА ЭЛЕМЕНТА

Э.А. Головастова

Аннотация. В данной работе рассматривается система с n одинаковыми рабочими элементами и одним восстанавливающим прибором. В каждый момент времени работает только один элемент, остальные находятся в холодном резерве. Распределение времени работы и ремонта рабочих элементов предполагается произвольным; прибор абсолютно надёжен. Получим асимптотическое распределение времени жизни всей системы при условии быстрого ремонта элементов.

Ключевые слова. Теория надёжности, время жизни системы, асимптотическое поведение.

1 Описание модели.

Рассмотрим модель, состоящую из n рабочих элементов и одного восстанавливающего прибора. В каждый момент времени работает только один элемент, называемый основным, а остальные находятся в холодном резерве. Основной элемент может выйти из стоя, тогда его немедленно заменяет любой резервный, отказавший элемент немедленно отправляется восссталавливаться на прибор, который полагается абсолютно надёжным. Система выходит из строя когда все n рабочих элементов оказываются неработоспособными.

Распределение времени жизни подобной модели при n=2 было получено в [1]; выражения для времени жизни в системе с ненадежным восстанавливающим прибором представлены в [2].

Предполагаем, что η – время работы элемента распределено по закону $G(t)$; ξ – время восстановления элемента распределено по закону $F(t)$. Обе функции – абсолютно непрерывные и имеют все моменты, которые являются конечными. Пусть $b = E\ \eta < \infty$. Считаем, что все случайные величины, задающие систему, взаимно независимы.

Цель данной работы – найти распределение времени жизни всей системы и исследовать его ассимптотическое поведение в условиях быстрого восстановления элементов.

2 Распределение времени жизни системы и её асимптотика.

Система рассматривается в условиях быстрого восстановления элементов, т.е.

$$P(\xi > \eta) = \int_0^\infty (1 - F(t))\ dG(t) = \varepsilon \to 0$$

при некотором изменениии некоторой характеристики распределения ξ. Обозначим τ_j – время до поломки всей системы, если на момент начала ее работы имеется j, $j = 0, 1, 2, ..., n-1$ неработоспособных элементов. Также пусть $m(0)$ – число неисправных элементов на момент начала работы первого основного элемента, $\zeta(\eta)$ – число восстановленных элементов за η – промежуток времени работы первого основного элемента.

Представим время работы системы как сумму промежутка времени работы прервого основного элемента и оставшегося времени жизни системы. При n>2.

$$\tau_0 = \eta + \tau_1,$$

$$\tau_1 = (\eta + \tau_1)I(\zeta(\eta) = 1) + (\eta + \tau_2)I(\zeta(\eta) = 2),$$

$$\tau_j = (\eta + \tau_1)I(\zeta(\eta) = j) + \sum_{k=0}^{j-1}(\eta + \tau_{j+1-k})I(\zeta(\eta) = k), \quad 1 < j < n-1,$$

$$\tau_{n-1} = (\eta + \tau_{n-1})I(\zeta(\eta) = n-1) + \sum_{k=1}^{n-2}(\eta + \tau_{j+1-k})I(\zeta(\eta) = k) + \eta I(\zeta(\eta) = 0)$$

Тут $I(A)$ – индикатор события А.

Найдем вероятность события $\{\zeta(\eta) = j \mid m(0) = j; \eta\}$. Пусть

$$K_j(x) = P(\xi_1 + ... + \xi_j \leq x \mid \xi_1 + ... + \xi_{j+1} > x)$$

– вероятность того, что за время x починятся ровно j элементов. Тогда

$$K_j(x) = \int_0^x P(\xi_{j+1} > x - y)\, P(\xi_1 + ... + \xi_j \in dy) = \int_0^x (1 - F(x - y))\, dF^{*(j)}(y)$$

Тут $F^{*(j)}(y)$ – j-кратная свертка функции $F(y)$ с самой собой.

Тогда, если взять преобразование Лапласа-Стильтьеса от левой-правой части уравнений выше, получим:

$$\varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s)$$

$$\varphi_1(s) = (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + \varphi_2(s)g_0(s),$$

$$\varphi_j(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\right)\varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\varphi_{j+1-k}(s), \quad 1 < j < n-1,$$

$$\varphi_1(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s)\right)\varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s)\varphi_{n-k}(s) + g_0(s)$$

Тут:

$$\varphi_j(s) = Ee^{-s\tau_j}, \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x), \quad g_0(s) = \int_0^\infty e^{-sx} F(x)\, dG(x),$$

$$g_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x (1 - F(x - y))\, dF^{*(j)}(y)\, dG(x), \quad j = 1, 2, ..., n-2$$

Хотим доказать сходимость:

$$\varphi_j(\varepsilon^{n-1}s) \to \frac{1}{1 + bs} \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$.

$$g_0(\varepsilon^{n-1}s) \sim \int_0^\infty (1 - F(x))\, dG(x)$$
$$- \varepsilon^{n-1}s \int_0^\infty x(1 - F(x))\, dG(x) =$$
$$= \varepsilon \ - \ \varepsilon^{n-1}s\, \gamma_0$$

По неравенству Коши-Буняковского для интегралов:

$$\gamma_0 = \int_0^\infty x(1 - F(x))G'(x)\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^\infty \left(x\sqrt{G'(x)}\right)^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^\infty \left((1-F(x))\sqrt{G'(x)}\right)^2\, dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^\infty x^2\, dG(x)} \cdot \sqrt{\int_0^\infty (1-F(x))\, dG(x)} \leq$$

$$\leq Const \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

Т.е. $\gamma_0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

$$g_j(\varepsilon^{n-1}s) \sim \int_0^\infty \int_0^x (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\, dG(x) -$$

$$- \varepsilon^{n-1}s \int_0^\infty x \int_0^x (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\, dG(x) =$$

$$= g_j(0) - \varepsilon^{n-1}s\ \gamma_j$$

Т.к. все функции, фигурирующие в задаче, неотрицательны, то

$$g_j(0) = \int_0^\infty \int_0^x (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\, dG(x) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^\infty (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\, dG(x) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (1-F(x-y))\, dG(x)\right)\, dF^{*(j)}(y) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_0^\infty dF^{*(j)}(y) = \varepsilon$$

И также

$$\gamma_j = \int_0^\infty x \left(\int_0^x (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\right)\, dG(x) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty x \left(\int_0^\infty (1-F(x-y))\, dF^{*(j)}(y)\right)\, dG(x) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x\ (1-F(x-y))\, dG(x)\right)\, dF^{*(j)}(y) \leq$$

По уже доказанному для γ_0:

$$\leq Const \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \int_0^\infty dF^{*(j)}(y) = Const \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

Т.о. $g_j(0) \to 0$ и $\gamma_j \to 0$ $j = 1, ..., n-2$ при $\varepsilon \to 0$.
Далее доказательство сходимости (1) повторяет доказательство аналогичной сходимости в статье [3].

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. “Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ."*URSS*, (2019) 584 с.

[2] Головастова Э.А., “Время работы системы со взаимозаменяемыми элементами, выходящими из строя, и ненадежным восстанавливающим прибором."*Вестник ТГУ УВТиИ 52*, (2020): 59-65.

[3] Golovastova E.A., “Reliability analysis of the system lifetime with n working elements and repairing device under condition of the element’s fast repair." *arXiv preprint arXiv:2101.07260*, (2021).