

УДК 539.1.01

## Вывод уравнений Шредингера на основании объединения принципов наименьшего действия и максимума энтропии

Михаил Батанов-Гаухман<sup>1</sup>

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Институт № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки”,  
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993  
(e-mail: [alsignat@yandex.ru](mailto:alsignat@yandex.ru))

**Аннотация:** Целью статьи является развитие стохастической интерпретации квантовой механики Э. Нельсона на основании уравнивания внутри-системной антисимметрии между «порядком» и «хаосом». Для поставленной задачи предлагается объединить два взаимно-противоположных (точнее, антисимметричных) системообразующих принципа: «принцип наименьшего действия» и «принцип максимума энтропии» в один «принцип экстремума усредненной эффективности». При подробном рассмотрении усредненных состояний хаотически блуждающей частицы получены стационарное и времени-зависимое стохастические уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона, как условия для нахождения экстремалей функционала глобально усредненной эффективности исследуемой стохастической системы. Полученные уравнения с точностью до коэффициентов совпали с соответствующими уравнениями Шредингера. При этом отношение редуцированной постоянной Планка к массе частицы выражается через усредненные характеристики трехмерного случайного процесса, в котором участвует рассматриваемая блуждающая частица. Полученные стохастические уравнения пригодны для описания квантовых состояний стохастических систем любого масштаба.

**Ключевые слова:** вывод уравнения Шредингера, стохастическая квантовая механика, стохастическое уравнение, порядок и хаос, внутри-системная асимметрия.

### PACS numbers:

03.65.-w (Quantum mechanics)

05.30.-d (Quantum statistical mechanics)

### Список сокращений и определений

МСКМ – масс-независимая стохастическая квантовая механика;

КМ – квантовая механика;

ПССП – псевдо-стационарный случайный процесс;

СКМ – стохастическая квантовая механика;

ССП – стационарный случайный процесс;

ФПРВ – функция плотности распределения вероятности;

ХБЧ – хаотически блуждающая частица;

Пико-частица – частица или античастица с характерными размерами  $\sim 10^{-18} - 10^{-13}$  см;Микро-частица – частица с характерными размерами  $\sim 10^{-7} - 10^{-3}$  см;Макро-частица – компактные тела с характерными размерами  $\sim 10^{-2} - 10^4$  см;Мега-частица – планета, ядро звезды и другие космические тела с размерами  $\sim 10^5 - 10^9$  см; $s = S/m$  – «эффективность» частицы с массой  $m$ ;

$\varepsilon = E/m$  – «механическая энергетичность» частицы с массой  $m$ ;  
 $u = U/m$  – «потенциальная энергетичность» частицы с массой  $m$ ;  
 $k = T/m = v_x^2/2$  – «кинетическая энергетичность» частицы с массой  $m$ .

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В современной физике насчитывается несколько десятков интерпретаций квантовой механики (КМ). Каждая из них имеет свои достоинства и недостатки, но ни одна из них точно не определена, т.к. многие исследователи часто вкладывают в одни и те же понятия разные смыслы.

Одна из причин такой ситуации в квантовой физике связана с различным отношением к волновой функции  $\Psi(x,t)$ .

Большинство специалистов согласны с утверждением М. Борна, что квадрат модуля волновой функции частицы  $\Psi(x,t)$  равен функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) нахождения частицы в точке  $x$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t).$$

Однако следует учитывать, что в общем случае данная ФПРВ является сложной функцией нескольких факторов, связанных с процессом измерения

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = f[\rho_p(x,t), \rho_m(x,t), \rho_e(x,t), \rho_d(x,t), \rho_o(x,t)], \quad (0.1)$$

где

$\rho_p(x,t)$  – ФПРВ, связанная с хаотическим поведением частицы;

$\rho_m(x,t)$  – ФПРВ, связанная с погрешностью метода измерений;

$\rho_e(x,t)$  – ФПРВ, связанная с влиянием внешних воздействий;

$\rho_d(x,t)$  – ФПРВ, связанная с погрешностью средств измерения;

$\rho_o(x,t)$  – ФПРВ, связанная с влиянием оператора.

Примером функциональной зависимости (0.1) может послужить распределение Гаусса

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_{px}^2 + \sigma_{mx}^2 + \sigma_{ex}^2(t) + \sigma_{dx}^2 + \sigma_{ox}^2]}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2[\sigma_{px}^2 + \sigma_{mx}^2 + \sigma_{ex}^2(t) + \sigma_{dx}^2 + \sigma_{ox}^2]}\right\},$$

где

(0.2)

$$\sigma_{ix}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x) x^2 dx \quad (\text{здесь } i = p, m, d, o), \quad \sigma_{ex}^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_e(x, t) x^2 dx$$

– дисперсия  $i$ -го влияющего фактора на результат измерения.

Все вышеперечисленные факторы, в той или иной мере, присутствуют при измерении физических характеристик частиц любого масштаба. Однако в зависимости от размеров частиц эти факторы влияют по-разному.

Вместе с тем, практически все специалисты, исследующие свойства не релятивистских *пико-частиц* (т.е. частиц с характерными размерами атомного и субатомного масштаба,  $10^{-8} - 10^{-13}$  см), используют один и тот же математический аппарат квантовой механики (КМ). Данный аппарат получил начало в работе Э. Шредингера [1], и рассчитан на прогнозирование возможных конфигураций и эволюций волновых функций  $\Psi(x, t)$  одной частицы или ансамбля одинаковых частиц.

Акцентирование внимания на тех или иных факторах, влияющих на процесс измерения, при использовании одного и того же математического аппарата, приводит к развитию различных интерпретаций КМ.

Например, в ряде экспериментов пико-частицы чрезвычайно чувствительны к воздействию на них измерительной системы и наблюдателя. Широко известны эффекты, связанные с тем, что оператор своим присутствием вносит в радиоэлектронные приборы паразитную емкость и индуктивность, что приводит в разбалансировке электронных резонаторов и т.д.

В этом случае волновая функция (0.1) должна учитывать все влияющие факторы, при этом методология восприятия полученных результатов наиболее соответствует копенгагенской интерпретации КМ Бора - Гейзенберга.

В других экспериментах факторы, мешающие измерению, настолько незначительны, что ими можно пренебречь. Например, о возможных состояниях электрона в атоме водорода мы судим по спектру его излучения. Если абстрагироваться от незначительного расширения спектральных линий,

связанного с влиянием различных сопутствующих факторов, то в этом случае ФПРВ (0.1) приобретает вид

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = f[\rho_p(x,t), \rho_e(x,t)].$$

Такая волновая функция характеризует только свойства самого электрона с учетом влияния вакуума, приводящего к лэмбовскому сдвигу спектральных линий.

В этой статье будем придерживаться стохастической интерпретации квантовой механики, наиболее ярко выраженной в работах Эдварда Нельсона (Edward Nelson) [2,3,4], опубликованных в 1966 – 1984 гг.

Помимо Э. Нельсона данное направление восприятия КМ развивали Р. Фюрт (R. Fürth, [5] 1933), И. Феньес (I. Fényes, [6] 1952) и В. Вейзель (W. Weizel, [7] 1953), К. Намзрай (K. Namsrai [50]). М. Павон (M. Pavon, [8] 2000). Альтернативная стохастическая интерпретация КМ была разработана Р. Цекковым (Roumen Tsekov, [9], 2012, [60] 2017).

Среди современных работ по стохастической квантовой механике можно отметить статьи J. Lindgren & J. Liukkonen (2019) [51], T. Koide & T. Kodama (2018) [52], F. Kuipers, (2023) [58], M. Simon, & Kavan, M. [59].

Стохастическая интерпретация Нельсона связана с логическим построением КМ по аналогии с теорией броуновского движения [точнее процесса Орнштейна-Уленбека (Ornstein-Uhlenbeck)].

В интерпретации Э. Нельсона причина хаотического поведения пико-частицы связана с воздействием на нее флуктуаций вакуума. Коэффициент диффузии такого стохастического процесса оказывается мнимым в силу отсутствия трения и специфики вязкости вакуума.

Таким образом, в стохастической интерпретации КМ первичной является не волновая функция  $\Psi(x,t)$ , а сложные мелкомасштабные искривления пространственно-временного континуума (т.е. «квантовая пена» Уиллера-Бома-Вижье), влияющие на коллоидную пико-частицу.

В этом случае ФПРВ (0.1) принимает самый простой вид

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = \rho_e(x,t) = \psi(x,t) \psi^*(x,t), \quad (0.3)$$

так как характеризует только хаотическое поведение бесструктурной частицы, подверженной непрерывному влиянию бурлящей окружающей среды.

*Напомним, что стохастические уравнения Ланжевена и Фоккера - Планка описывают броуновское движение без учета структуры частиц и неопределенности, связанной с погрешностями измерений. Однако между броуновскими частицами (с размерами  $\sim 10^{-4}$  см) и пико-частицами (с размерами  $\sim 10^{-8} - 10^{-13}$  см) имеется принципиальная разница. Броуновские (коллоидные) частицы можно наблюдать с помощью микроскопа, практически не воздействуя на них, а пико-частицы в принципе невозможно наблюдать непосредственно.*

В этой статье максимально упрощенную (точнее не учитывающую погрешности измерений и влияние других частиц) плотность амплитуды вероятности (ПАВ)  $\Psi(x,t) = \psi(x,t)$  будем называть «чистой» волновой функцией.

*Необходимо отметить, что в большинстве книг и учебниках по квантовой механике изначально под ПАВ  $\Psi(x,t)$  подразумевается «чистая» волновая функция частицы. Это является одной из причин отсутствия понимания и согласия между теоретиками и экспериментаторами, а также между специалистами, работающими в различных областях квантовой физики. По всей видимости, именно отношение к «чистой» или «нечистой» волновой функции  $\Psi(x,t)$  послужило причиной споров между А. Эйнштейном (изучавшим в молодости броуновское движение) и Н. Бором (чьи ранние работы были связаны с объяснением спектра излучения атомов).*

Итак, в данной статье под стохастической интерпретацией квантовой механики Эдварда Нельсона подразумевается такой вариант КМ, в которой волновая функция  $\psi(x,t)$  характеризует только хаотическое поведение блуждающей частицы под влиянием флуктуаций окружающей среды, без учета погрешностей измерений и влияния оператора. Эта частица (подобно броуновской корпускуле), имеет объем и хаотичную траекторию движения. При этом

сама волновая функция (или ПАВ)  $\psi(x,t)$  носит статистический характер Макса Борна.

Вместе с тем учитывается, что в рамках стохастической интерпретации КМ Нельсона «чистая» ПАВ  $\psi(x,t)$  оказывается своего рода «интеллектуальной вещью в себе». Поскольку о «чистой» волновой функции  $\psi(x,t)$  можно узнать только посредством решения стохастических дифференциальных уравнений. Любая попытка выполнить измерение приведет к частичному искажению или полному разрушению исследуемой стохастической системы и к неминуемому изменению ее ПАВ  $\psi(x,t)$ .

В данной статье предпринята попытка разработки основ масс-независимой стохастической квантовой механики (МСКМ), являющейся развитием стохастической квантовой механики (СКМ) Э. Нельсона [2,3,4], и предложено решение проблемы измерения «чистых» параметров стохастических квантовых систем.

В статье предпринята попытка исключить массу из всех упомянутых здесь физических величин и констант. Это один из шагов в рамках программы полного исключения из физики понятия «масса» и ее размерности «килограмм» (или «фунт», и т.д.), т.к. это феноменологическое понятие, по мнению автора, лишнее и мешает развитию полностью геометризированной физики.

Рассмотрена вероятностная модель хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), которая, подобно пико-частице Э. Нельсона [2], обладает объемом и непрерывной траекторией движения. Но в отличие от СКМ [2] в МСКМ отсутствуют ограничения на размеры исследуемой частицы.

На основании данной модели методом вариационного исчисления выведены стохастические уравнения (37), (41), (67) и (68), являющиеся обобщением уравнений Шредингера, а также получено уравнение (73), соответствующее виду уравнения диффузии (частному случаю уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова).

В основу статьи положено утверждение, что дихотомия «Порядок и хаос» влияет на любую стохастическую систему (в том числе на хаотически блуждающую частицу любого масштаба, например, рыбка в круглом аквариуме, центр масс ядра планеты, ядро биологической клетки, комар в комарином рое, электрон в атоме, центр масс желтка в яйце, броуновская частица в коллоидном растворе и т.д.).

Понятие «порядок» формализуется через «принцип наименьшего действия», а понятие «хаос» формализуется через «принцип максимума энтропии». В статье предложено объединить данные принципы в один «принцип экстремума усреднённой эффективности». Данный принцип позволил записать функционал глобально усредненной «эффективности» хаотически блуждающей частицы. При этом уравнениями экстремалей для этого функционала в частном случае являются уравнения Шредингера, в которых отношение постоянной Планка к массе частицы  $\hbar/m$  заменено на отношение усредненных параметров исследуемого случайного процесса (стандартного отклонения  $\sigma$  к коэффициенту автокорреляции)

$$\frac{\hbar}{m} \approx \frac{2\sigma^2}{\tau_{acor}}$$

Это позволяет использовать полученные стохастические уравнения (в том числе уравнения Шредингера) для исследования усредненного поведения хаотически блуждающей частицы любого масштаба. Например, данный подход пригоден для описания квантовых эффектов при усреднении хаотических перемещений геометрического (или гипотетического) центра: кончика ветки дерева под влиянием дуновений ветра, или случайных смещений центра ядра планеты, или колебаний курса акций на бирже, или смещения концентрации внимания учащегося от предмета изучения и т.п.

Главным достижением данной статьи, по мнению автора, является аналитический вывод уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона, которое пригодно для описания стохастических процессов и квантовых эффектов любого

масштаба. В частности, при определенных условиях уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона преобразуется в уравнения Шредингера с точностью до коэффициентов. Вывести уравнения Шредингера не удавалось практически с момента их появления в 1925 г. При этом в процессе вывода уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона удалось разобраться со многими особенностями случайных процессов и квантовых явлений, как микромира, так и макромира.

## 2 МЕТОД

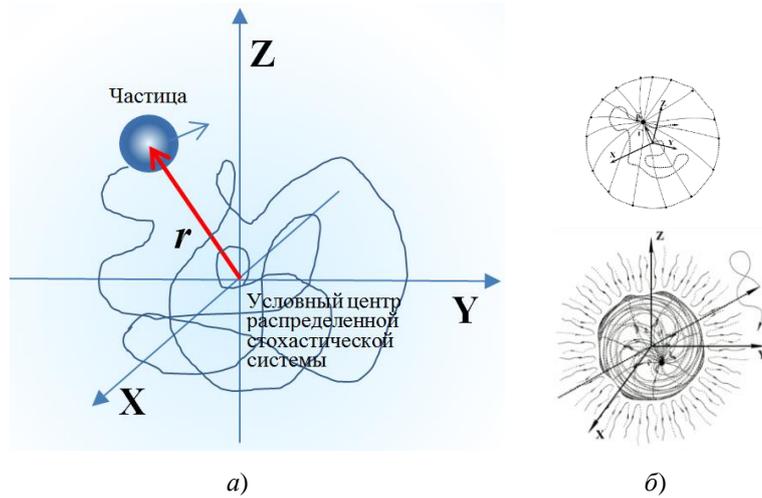
Стохастические объекты (системы) формируются при одновременном стремлении к «порядку» и «хаосу» [49]. Это обусловлено влиянием на любой стохастический объект двух взаимно противоположных системообразующих факторов: «принципа наименьшего действия» и «принципа максимума энтропии». Взаимно противоположное стремление стохастических систем к «порядку» и «хаосу», приводит их к равновесию, оптимизации, энергосбережению, энергетической эффективности и пространственно-временной симметрии.

В данной статье предпринята попытка объединения двух вышеуказанных взаимно противоположных (антисимметричных) принципов в один «принцип экстремума усредненного действия», который внутренне сбалансирован относительно «детерминизма» (т.е. предопределенности) и «случайности». Этот сбалансированный принцип, в итоге, теоретически обосновывает эмпирически проявленную выгодность симметричных состояний свободных стохастических объектов.

### 2.1 Вероятностная модель блуждающей частицы

Рассмотрим твердую частицу, обладающую объемом и траекторией движения (рис. 1). Предположим, что под действием множества не связанных между собой силовых факторов (например, флуктуаций окружающей среды) частица постоянно хаотически блуждает в окрестности условного центра,

совмещенного с началом неподвижной системы координат  $XYZ$  (рис. 1).



**Рис. 1.** *a)* Упрощенная модель твердой частицы (точнее, геометрического или гипотетического центра объекта), которая хаотически блуждает в окрестности условного центра из-за случайных силовых воздействий флуктуирующей окружающей среды. *б)* Примеры хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), при отклонении которой от центра возникают напряжения в окружающей среде

К такой хаотически блуждающей частице (ХБЧ) можно отнести случайные смещения в трех пространственных (или условных, фазовых) измерениях со временем **геометрического (или гипотетического) центра** следующих объектов и субъектов: валентного электрона в водородоподобном атоме; колеблющегося атома в кристаллической решетке; дрожащего ядра биологической клетки; волнующегося сердца в груди животного; трепещущего желтка в курином яйце; порхающего мотылька в окрестности горячей лампы; плавающей рыбы в аквариуме; смещающегося комариного роя; летающего комара в рое; дрожащей органеллы в цитоплазме; колеблющейся биологической клетки в живой ткани; вибрирующего раскаленного ядра в недрах планеты; блуждающей пыльцы в разбавленном сахарном сиропе; мечущегося пузырька воздуха в кипящей жидкости; шевелящегося эмбриона в утробе матери; смещающегося косяка рыб в океане; перемещающегося космонавта в модуле космической станции; смещающейся галактики в космическом пространстве; трепещущего цветка на ветру; колеблющейся стоимости услуг на рынке

труда; изменений общественного мнения в отношении одной из социальных проблем, отвлечение внимания ученого от решаемой задачи и т.д.

Другими словами, случайное поведение большинства окружавших нас 3-мерных объектов, субъектов и систем, при наличии геометрического (или гипотетического) центра и достаточно большом периоде наблюдения, может быть интерпретировано как поведение хаотически блуждающей частицы (ХБЧ) в 3-мерном реальном (или фазовом) пространстве. Поэтому выводы, сделанные в этой статье, носят универсальный характер и распространяются на стохастические объекты и субъекты любого масштаба и качества.

Будем рассматривать такую хаотически блуждающую частицу (ХБЧ) как распределенную в 3-мерном пространстве стохастическую систему, с условно выделенным центром в начале системы координат (рис. 1).

Предположим, что полная механическая энергия ХБЧ  $W(v, x, y, z, t)$  в точке с координатами  $x, y, z$  и в момент времени  $t$  равна

$$W(v, x, y, z, t) = T(v, x, y, z, t) + U(x, y, z, t) \pm \mathcal{E}(x, y, z, t), \quad (1)$$

где  $T(v, x, y, z, t)$  – кинетическая энергия частицы, которая обусловлена скоростью ее движения  $v(v_x, v_x, v_x, x, y, z, t)$  в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x, y, z$  (рис.1);

$U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия частицы, связанная с упругостью окружающей ее среды (или другими факторами), стремящимися в среднем вернуть данную частицу в условный центр рассматриваемой распределенной стохастической системы (рис.1).

$\mathcal{E}(x, y, z, t)$  – энергия, которую кратковременно получает или отдает частица при взаимодействии с хаотически флуктуирующей окружающей средой. Данная энергия взаимодействия может изначально затрачиваться или расходоваться на упругие деформации и/или изменение угловой скорости вращения частицы, но затем она в разных долях случайным образом переходит в кинетическую  $T(v, x, y, z, t)$  и/или в потенциальную  $U(x, y, z, t)$  энергии ХБЧ.

Хаотически флуктуирующая среда, окружающая ХБЧ, может быть газом или кипящей жидкостью. В случае элементарной частицы (или пико-частицы) в качестве такой среды может рассматриваться флуктуирующий пространственно-временной континуум (или бурлящий физический вакуум), как это показано в статьях Э. Нельсона [2,3,4].

Представим выражение (1) в виде

$$W(v,x,y,z,t) \mp \mathcal{E}(x,y,z,t) = T(v,x,y,z,t) + U(x,y,z,t), \quad (2)$$

Обозначим левую часть этого выражения следующим образом

$$E(x,y,z,t) = W(v,x,y,z,t) \mp \mathcal{E}(x,y,z,t) \quad (3)$$

и будем называть ее «механической энергией» ХБЧ.

При этом все три энергии ХБЧ:  $E(x,y,z,t)$ ,  $T(v,x,y,z,t)$  и  $U(x,y,z,t)$  являются случайными величинами, но такими, что в каждой точке рассматриваемой области пространства выполняется усредненное равенство

$$\langle E(x,y,z,t) \rangle = \langle T(v,x,y,z,t) \rangle + \langle U(x,y,z,t) \rangle, \quad (4)$$

$$\text{или} \quad \langle T(v,x,y,z,t) \rangle + \langle U(x,y,z,t) \rangle - \langle E(x,y,z,t) \rangle = 0, \quad (5)$$

где  $\langle \rangle$  – означает локальное усреднение, т.е. усреднение в окрестности точки с координатами  $x,y,z$ , расположенной внутри распределенной стохастической системы (рис.1).

Выражение (4) означает, что дополнительная энергия  $\pm \mathcal{E}(x,y,z,t)$ , которую получает или отдает частица при взаимодействии с бурлящей окружающей средой, со временем случайно перераспределяется между ее кинетической и потенциальной энергиями.

Если скорость перемещения ХБЧ  $v(v_x, v_y, v_z)$  невелика по сравнению со скоростью света, то согласно нерелятивистской механике, она обладает кинетической энергией

$$T(p_x, p_y, p_z, x, y, z, t) = T(v_x, v_y, v_z, x, y, z, t) = \frac{m[v_x^2(x,y,z,t) + v_y^2(x,y,z,t) + v_z^2(x,y,z,t)]}{2},$$

где  $p_i(x,y,z,t) = mv_i(x,y,z,t)$  – мгновенные значение  $i$ -той компоненты вектора импульса ХБЧ в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x,y,z$  (рис.1);  $m$  – масса частицы.

Вид локально усредненной потенциальной энергии хаотически блуждающей частицы  $\langle U(x,y,z,t) \rangle$  на данном этапе не конкретизируется. Один из возможных видов  $\langle U(x,y,z,t) \rangle$ , в качестве примера, использован в Приложении 3.

Проинтегрируем уравнение (5) по времени (6)

$$\int_{t_1}^{t_2} [\langle T(p_x, p_y, p_z, x, y, z, t) \rangle + \langle U(x, y, z, t) \rangle - \langle E(x, y, z, t) \rangle] dt = 0,$$

и будем называть это выражение локально усредненной сбалансированностью стохастической системы.

Для упрощения математических выкладок рассмотрим одномерный случай, неограничивающий общность заключений (в случае трех измерений увеличивается только число интегрирований), при этом локально усредненная сбалансированность (6), приобретает упрощенный вид

$$\langle S(x) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [\langle T(p_x, x, t) \rangle + \langle U(x, t) \rangle - \langle E(x, t) \rangle] dt, \quad (7)$$

где случайные характеристики ХБЧ:  $E(x,t)$ ,  $T(x,t)$  и  $U(x,t)$  отвечают условию энергетического баланса  $\langle E(x,t) \rangle = \langle T(p_x, x, t) \rangle + \langle U(x, t) \rangle$ , действующему в окрестности каждой точки с координатой  $x$ .

## 2.2 Глобально усредненная эффективность ХБЧ

Выполним глобальное усреднение локально усредненной сбалансированности (7) по всей области оси  $X$ , в которой перемещается ХБЧ (рис.1)

$$\overline{\langle S_x \rangle} = \overline{\int_{t_1}^{t_2} (\langle T(p_x, x, t) \rangle + \langle U(x, t) \rangle - \langle E(x, t) \rangle) dt}. \quad (8)$$

Операции интегрирования и усреднения являются коммутативными, поэтому выражение (8) можно представить в виде

$$\overline{\langle S_x \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{\langle T(p_x, x, t) \rangle} + \overline{\langle U(x, t) \rangle} - \overline{\langle E(x, t) \rangle}) dt. \quad (9)$$

Глобально усредненную кинетическую энергию ХБЧ представим в следующем виде

$$\overline{\langle T(p_x, x, t) \rangle} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x, \quad (10)$$

где  $\rho(p_x, t)$  – функция плотности распределения вероятности (ФПРВ)  $x$ -компоненты импульса частицы  $p_x$ .

В выражении (10) усреднение происходит по всем возможным импульсам  $p_x$  ХБЧ, независимо от места положения частицы. В общем случае  $\rho(p_x, t)$  может изменяться со временем  $t$ .

Глобально усредненную потенциальную энергию  $\overline{\langle U(x, t) \rangle}$  и глобально усредненную механическую энергию  $\overline{\langle E(x, t) \rangle}$  ХБЧ представим в виде

$$\overline{\langle U(x, t) \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \langle U(x, t) \rangle dx, \quad (11)$$

$$\overline{\langle E(x, t) \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \langle E(x, t) \rangle dx, \quad (12)$$

где  $\rho(x, t)$  – ФПРВ проекции положения ХБЧ на ось  $X$  (рис.1). В общем случае  $\rho(x, t)$  может изменяться со временем  $t$ .

Подставляя глобально усредненные величины (10), (11) и (12) в выражение (9), получим

$$\overline{\langle S_x \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [\langle U(x, t) \rangle - \langle E(x, t) \rangle] dx \right\} dt.$$

Исключим лишнее понятие «масса» из предлагаемой математической модели. Для этого введем величины, независящие от массы:

$$\overline{\langle s_x(t) \rangle} = \frac{\overline{\langle S_x(t) \rangle}}{m} \quad (14)$$

– глобально усредненная « $x$  - эффективность» ХБЧ;

$$\langle \varepsilon(x, t) \rangle = \frac{\langle E(x, t) \rangle}{m} \quad (15)$$

– локально усредненная « $x$  - механическая энергетичность» ХБЧ;

$$\langle u(x, t) \rangle = \frac{\langle U(x, t) \rangle}{m} \quad (16)$$

– локально усредненная « $x$  - потенциальная энергетичность» ХБЧ;

$$\overline{\langle k(v_x, x, t) \rangle} = \frac{\overline{\langle T(p_x, x, t) \rangle}}{m} = \frac{1}{2m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x \quad (17)$$

– глобально усредненная « $x$  - кинетическая энергетичность» ХБЧ.

Подставляя выражения (14) – (17) в уравнение (13), получим глобально усредненную « $x$ -эффективность» ХБЧ, независящую от «массы» частицы\*

$$\overline{\langle s_x \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [\langle u(x, t) \rangle - \langle \varepsilon(x, t) \rangle] dx \right\} dt. \quad (18)$$

*\*По мнению автора, устаревшее эвристическое понятие «масса» мешает развитию полностью геометризированной физики. Поэтому это понятие постепенно должно быть исключено из всех физических представлений об окружающей реальности. В данной статье предпринята попытка показать, как это может быть сделано.*

### 2.3 Стационарное состояние ХБЧ

Рассмотрим стационарное глобально усредненное состояние исследуемой стохастической системы, т.е. когда усредненное поведение ХБЧ не зависит от времени  $t$ .

В этом случае глобально усредненная « $x$ -эффективность» ХБЧ (18) приобретает упрощенный вид

$$\overline{\langle s_x \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) [\langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \rangle] dx \right\} dt.$$

Представим выражение (19) в координатном виде. Для этого выполним следующие действия:

1]. Запишем ФПРВ  $\rho(x)$  в виде произведения двух плотностей амплитуды вероятности (ПАВ)  $\psi(x)$ :

$$\rho(x) = \psi(x)\psi(x) = \psi^2(x). \quad (20)$$

2]. Воспользуемся координатным представлением усредненной  $x$  - компоненты скорости ХБЧ, возведенной в  $n$ -ю степень {смотрим (П2.12) в Приложение 2. В частности, при  $n = 2$ , имеем

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \mp i \eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) dx = -\eta_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx,$$

где, согласно (П1.41) или (П1.46) в Приложение 1

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = constant \quad (22)$$

- постоянный масштабный параметр;
- $\sigma_x$  – стандартное отклонение стационарного случайного процесса  $x(t)$ , связанного с проецированием места положения ХБЧ на ось  $X$  (смотрите рис. П 1.1 в Приложение 1;
- $\tau_{x \text{ cor}}$  – интервал автокорреляции данного случайного процесса  $x(t)$ . Как видно из рис. 1 и рис. П1.1 в Приложение 1, интервал автокорреляции показывает, насколько гладок исследуемый случайный процесс, т.е. как быстро ХБЧ движется и меняет направление движения. Чем больше интервал автокорреляции, тем меньше скорость ХБЧ и медленнее изменения направления ее движения.

3]. Используя выражение (21), представим глобально усредненную  $x$ -кинетическую энергетичность ХБЧ (17) в виде

$$\overline{\langle k(v_x, x) \rangle} = \frac{\overline{\langle T(p_x, x) \rangle}}{m} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x = -\frac{\eta_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx. \quad (23)$$

4]. Подставляя выражения (20) и (23) в интеграл (19), получим функционал глобально усредненной  $x$ -эффективности ХБЧ в координатном представлении

$$\overline{\langle s_x \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [\langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \rangle] \right) dx dt. \quad (24)$$

## 2.4 Вывод стационарного стохастического уравнения Эйлера-Пуассона

Найдем уравнение для экстремалей функционала (24), т. е. определим условие для получения функций  $\psi(x)$ , при которых данный функционал принимает экстремальные значения.

Поскольку в выражении (24) отсутствуют функции, зависящие от времени, будем искать условие экстремальности внутреннего функционала

$$w_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [\langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \rangle] \right) dx. \quad (25)$$

В вариационном исчислении показано [11, 55, 56], что экстремаль  $f(x)$  функционала общего вида

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x, f, f', f'', \dots, f^{(k)}) dx, \quad (26)$$

где  $f' := \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'' := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad f^{(k)} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$

определяется обобщенным уравнением Эйлера-Лагранжа [11, 55, 56]

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f''} \right) - \dots + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{\partial L}{\partial f^{(k)}} \right) = 0. \quad (27)$$

Однако следует отметить, что при других граничных условиях экстремаль функционала вида (26) определяется уравнением Эйлера-Пуассона-Эльсгольца [10, стр. 310 – 316, [Elsgolts LE\\_VI](#)]

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f'} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f''} \right\} - \dots + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f^{(k)}} \right\} = 0, \quad (27a)$$

где  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f'} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f'} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial f'} \left( \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \frac{\partial f'}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial f^{(k)}} \left( \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x}$

- первая полная частная производная по  $x$ ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f''} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f''} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f''} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial f'} \left( \frac{\partial L}{\partial f''} \right) \frac{\partial^2 f'}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial}{\partial f^{(k)}} \left( \frac{\partial L}{\partial f''} \right) \frac{\partial^2 f^{(k)}}{\partial x^2}$$

- вторая полная частная производная по  $x$  и т.д.

В случае поиска экстремали  $f = \psi(x)$  функционала (25), имеем Лагранжиан, зависящий только от  $\psi$  и  $\psi''$

$$L = -\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [ < u(x) > - < \varepsilon(x) > ], \quad (28)$$

при этом обобщённое уравнение Эйлера-Лагранжа (27) упрощается

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right) = 0, \quad (29)$$

т.к. в этом случае все остальные слагаемые в уравнении (27) равны нулю.

Выпишем слагаемые из уравнения (29)

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + 2\psi(x) [ < u(x) > - < \varepsilon(x) > ], \quad \frac{\partial L}{\partial \psi''} = -\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x). \quad (30)$$

Подставляя выражения (30) в уравнение (29), получим не зависящее от массы частицы одномерное стационарное стохастическое уравнение

$$-\frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi(x)[\langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \rangle] = 0. \quad (31)$$

Если вместо уравнения Эйлера-Лагранжа (27) использовать уравнение Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (27а), то вместо уравнения (29) получается уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right\} = 0, \quad (31a)$$

где 
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \psi''} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi''} \right) \frac{\partial^2 \psi''}{\partial x^2}$$

Подставляя лагранжиан (28) в уравнение (31а), в этом случае получим следующее уравнение для экстремалей  $\psi(x)$  функционала (32)

$$-\frac{3\eta_x^2}{4} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi(x)[\langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \rangle] = 0. \quad (31б)$$

Очевидно, что уравнения (31) и (31б) отличаются друг от друга на множитель  $3/2$  перед первым слагаемым. Дальнейшие исследования показали, что предпочтительным является уравнение (31б) (смотрите §2.9).

Рассмотрим теперь 3-мерный случай. Представим функционал (25) в развернутом виде

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\eta_r^2}{2} \psi(x, y, z) \nabla^2 \psi(x, y, z) + \psi^2(x, y, z) [\langle u(x, y, z) \rangle - \langle \varepsilon(x, y, z) \rangle] \right) dx dy dz \quad (32)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;

$$\eta_r = \frac{2\sigma_r^2}{\tau_{rcor}} = \text{constant} \quad (33)$$

– постоянный масштабный параметр, здесь для трехмерного случая:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad (34)$$

– стандартное отклонение случайной 3-мерной траектории ХБЧ от условного центра рассматриваемой стохастической системы (рис. 1);

$$\tau_{rcor} = \frac{1}{3} (\tau_{xcor} + \tau_{ycor} + \tau_{zcor}) \quad (35)$$

- интервал автокорреляции данного 3-мерного стационарного случайного процесса {смотрите пояснение к выражению (22)}.

Для 3-мерного случая общий функционал (26) имеет вид

$$I[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(x_1, x_2, x_3, f, f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{22}, f_{33}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (35a)$$

$$\text{где } f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ii} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i=1,2,3). \quad (35b)$$

Экстремаль  $f(x_1, x_2, x_3)$  данного функционала определяется уравнением Эйлера-Пуассона-Эльсгольца [11, стр. 310 – 316, [Elsgolts LE\\_VI](#)]

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_1} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_3} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{11}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{22}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{33}} \right\} = 0,$$

$$\text{где} \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_i} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_3} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \\ &+ \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{11}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{22}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{22}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{33}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{33}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (35d)$$

- первые полные частные производные по  $x_i$  ( $i=1,2,3$ );

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial f_3} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{22}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{33}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{33}}{\partial x_i^2} \end{aligned} \quad (35e)$$

- вторые полные частные производные по  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ).

В случае 3-мерного функционала (32) имеем лагранжиан:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\eta_r^2}{2} \psi(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} \right) + \psi^2(x, y, z) \times \\ &\times [ < u(x, y, z) > - < \varepsilon(x, y, z) > ], \end{aligned} \quad (35f)$$

$$\text{при этом } x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad f(x_1, x_2, x_3) = \psi(x, y, z), \quad (35g)$$

$$\psi_x := \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y := \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi_z := \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \psi_{xx} := \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi_{yy} := \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \psi_{zz} := \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Так как лагранжиан (35f) зависит только от  $\psi, \psi_{xx}, \psi_{yy}, \psi_{zz}$ , уравнение Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (35c) упрощается

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right\} = 0, \quad (35h)$$

поскольку в этом случае все остальные слагаемые в уравнении (35с) равны нулю.

С учетом выражения (35е), выпишем слагаемые из уравнения (35h)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial \psi_{xx}} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) \frac{\partial^2 \psi_{xx}}{\partial x_i^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \psi_{yy}} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) \frac{\partial^2 \psi_{yy}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial \psi_{zz}} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) \frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial x_i^2}, \quad (\text{где } i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (35h,a)$$

которые упрощаются до выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{ii}} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \quad (35h,b)$$

т.к. остальные слагаемые в (35h,a) равны нулю.

Подставим лагранжиан (35f) в уравнение (35h), и предварительно выпишем слагаемые из этого уравнения с учетом выражения (35h,b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial z^2} \right) + 2\psi(x,y,z) \times \\ &\times [ \langle u(x,y,z) \rangle - \langle \varepsilon(x,y,z) \rangle ], \end{aligned} \quad (35i)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right\} = -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \left( -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} \right) = -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right\} = -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \left( -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} \right) = -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right\} = -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial z^2} + \left( -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial z^2} \right) = -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial z^2}.$$

В результате подстановки выражений (35i) в уравнение Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (35h), получим следующее трехмерное стохастическое уравнение

$$-\frac{3\eta_{\vec{r}}^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y,z)}{\partial z^2} \right\} + 2[\langle u(x,y,z) \rangle - \langle \varepsilon(x,y,z) \rangle] \psi(x,y,z) = 0. \quad (36)$$

Умножим обе части этого уравнения на  $-1$ , и запишем его в компактном виде

$$\frac{3\eta_{\vec{r}}^2}{4} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + [\langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle - \langle u(\vec{r}) \rangle] \psi(\vec{r}) = 0, \quad (37)$$

где  $\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z)$  – экстремаль функционала 3-мерной глобально усредненной эффективности ХБЧ (32);

$\vec{r}$  – радиус-вектор с началом в условном центре исследуемой стохастической системы (рис.1) и концом в точке с координатами  $x, y, z$ ; модуль данного вектора равен  $|r| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  (38)

Уравнение (37) будем называть «*независимым от массы ХБЧ стационарным (т.е. времени - независимым) трехмерным стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона*» (или сокращенно – «*стационарным стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона*»).

## 2.5 Стационарное стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона

Рассмотрим случай, когда локально усредненная механическая энергетичность ХБЧ  $\langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle$  постоянна во всех точках исследуемой стохастической системы

$$\langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle = \varepsilon = \text{constant}. \quad (39)$$

В такой стационарной стохастической системе локально усредненная кинетическая энергетичность ХБЧ  $\langle k(x, y, z, t) \rangle$  и ее локально усредненная потенциальная энергетичность  $\langle u(x, y, z, t) \rangle$  так в среднем переходят друг в друга, что их усредненная сумма в каждой точке  $\vec{r} := (x, y, z)$  всегда остается постоянной

$$\langle k(\vec{r}) \rangle + \langle u(\vec{r}) \rangle = \varepsilon = \text{constant}. \quad (40)$$

В этом случае уравнение (37) принимает вид

$$-\frac{3\eta^2}{4} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \langle u(\vec{r}) \rangle \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r}). \quad (41)$$

Сравним стохастическое уравнение (41) со стационарным (т.е. времени - независимым) уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad (42)$$

где  $\hbar$  – редуцированная постоянная Планка ( $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$  Дж/Гц).

Сначала разделим обе части уравнения Шредингера (42) на массу частицы  $m$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^2}\nabla^2\psi(\vec{r}) + \frac{U(\vec{r})}{m}\psi(\vec{r}) = \frac{E}{m}\psi(\vec{r}). \quad (43)$$

Запишем уравнение (43) в следующем виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2\nabla^2\psi(\vec{r}) + u(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}), \quad (44)$$

где, согласно введенной выше терминологии {смотрите (14) – (16)}:

$$\varepsilon = E/m - \text{«механическая энергетичность» частицы}; \quad (45)$$

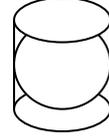
$$u(\vec{r}) = U(\vec{r})/m - \text{«потенциальная энергетичность» частицы}. \quad (46)$$

Сравнивая уравнения (41) и (44), обнаруживаем, что при

$$\frac{\hbar}{m} = \sqrt{\frac{3}{2}}\eta_r = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2\sigma_r^2}{\tau_{rcor}} \quad \text{и} \quad u(\vec{r}) = \langle u(\vec{r}) \rangle \quad (47)$$

данные уравнения полностью совпадают.

*Отношение объема цилиндра к объему вписанной в него сферы составляет 3/2. Архимед был настолько поражен этим открытием, что попросил своих родственников выгравировать сферу, начертанную в цилиндре, на его надгробной плите. Считается, что позднее Цицерон нашел могилу Архимеда благодаря этому символу (отмечено С. Петуховым).*



Таким образом оказалось, что стационарное (времени-независимое) уравнение Шредингера (42) является частным случаем стохастического уравнения (41).

Поэтому уравнение (41) будем называть «независимым от массы частицы стационарным трехмерным стохастическим уравнением Шредингера-Эйлера-Пуассона» (или кратко – «стационарным стохастическим уравнением Шредингера-Эйлера-Пуассона»).

Из-за малости редуцированной постоянной Планка  $\hbar$  требование  $\sqrt{3/2}\eta_r = \hbar/m$  относится к стохастическим системам микроскопического уровня, или к чрезвычайно прецизионным системам макроуровня, типа проекта LIGO.

Вместе с тем, во всех предыдущих рассуждениях на масштабный параметр  $\eta_r = 2\sigma_r^2/\tau_{r\text{cor}}$  не было наложено никаких ограничений (смотрите Приложение 1 и Приложение 2. Данный параметр зависит от стандартного отклонения  $\sigma_r$  и коэффициента автокорреляции  $\tau_{r\text{cor}}$  случайного процесса, в котором участвует ХБЧ любого масштаба и любого качества.

Поэтому стационарные стохастические уравнения (37) и (41) пригодны для описания усредненных состояний стационарных стохастических систем независимо от их размеров и субстанциональной принадлежности. Другими словами, стохастические уравнения (37) и (41) применимы для описания усредненных состояний компактных объектов или субъектов, хаотически блуждающих в 3-мерном пространстве (реальном или фазовом) как в физике, так и в биологии, социологии, психологии, экономике и т.д.

В Приложении 3 и в разделе 3.6 в [54, [arXiv:1702.01880](https://arxiv.org/abs/1702.01880)] приведен пример применения стационарного стохастического уравнения (41) для описания дискретного (квантового) набора усредненных состояний хаотически колеблющегося ядра биологической клетки. Аналогично уравнение (41) применимо для описания стационарных квантовых состояний многих других макроскопических стохастических систем, таких как, например, хаотически смещающийся геометрический центр ядра планеты, и многие другие вышеупомянутые случайно перемещающихся центров различных объектов.

В отличие от уравнения (42), по сути, угаданного Эрвином Шредингером в 1926 г., стохастические уравнения (37) и (41) получены на основании вариационного принципа. То есть стохастические уравнения (37) и (41) являются условиями для поиска экстремалей функционала глобально усредненной «эффективности» ХБЧ (32), который симметричен относительно одновременного стремления любой стохастической системы «порядку» и к «хаосу». В этом заключается дополнительная значимость полученного результата.

Рассмотрим, для примера, возможность применения полученных формул для исследования белого шума.

Белый шум – это математическая абстракция. То есть это идеальный стационарный случайный процесс с бесконечным спектром

$$S(\omega) = \sigma_{\omega}^2,$$

где  $\sigma_{\omega}^2$  – дисперсия белого шума; и корреляционной функцией

$$R_{acor}(\tau) = \sigma_{\omega}^2 \delta(\tau),$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\delta(\tau)$  – дельта-функция.

Это означает, что у белого шума коэффициент автокорреляции стремится к нулю

$$\tau_{\omega acor} \rightarrow 0.$$

Поэтому белый шум в рамках данной статьи не может быть исследован. Однако, если предположить, что стационарный случайный процесс ничтожно мало отличается от белого шума, т.е. если коэффициент его автокорреляции  $\tau_{acor}$  ничтожно мал, но не равен нулю

$$0 \cong \tau_{sacor} \neq 0.$$

То такой не значительно «потемневший» случайный процесс может быть описан стохастическим уравнением (41) при  $\varepsilon = \frac{\sigma_{\omega}^2}{\tau_{sacor}^2}$  и  $\langle u(\vec{r}) \rangle = 0$

$$\frac{3\eta_r^2}{4} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{\sigma_{\omega}^2}{\tau_{sacor}^2} \psi(\vec{r}) = 0, \quad (47a)$$

где согласно выражению (47)  $\eta_r = \frac{2\sigma_{\omega}^2}{\tau_{sacor}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\hbar}{m}$ .

Данное уравнение может быть представлено в следующем виде

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{1}{3\sigma_{\omega}^2} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (47b)$$

Рассмотрим одно сечение исследуемого 3-мерного случайного, в результате получим одномерный стационарный случайный процесс. Для одномерного случая уравнение (47б) приобретает вид

$$\nabla^2 \psi(x) + \frac{1}{\sigma_{\omega}^2} \psi(x) = 0. \quad (47b)$$

Это частный случай хорошо известного уравнения квантового гармонического осциллятора. Решение этого уравнения известно

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_\omega^2 \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\omega^2}\right).$$

Таким образом получилось, что в любом сечении исследуемый «затемненный» белый шум – это гауссов стационарный случайный процесс с плотностью распределения

$$\rho(x) = \psi(x)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_\omega^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_\omega^2}\right). \quad (47\Gamma)$$

Этот результат подтверждает, что полученное в этой статье стохастическое уравнение (41) пригодно для исследования различных стационарных случайных процессов.

## 2.6 Времени-зависимое стохастическое уравнение Эйлера-Пуассона

Пусть усредненные характеристики случайной траектории движения ХБЧ изменяются со временем, но настолько медленно, что в каждый малый промежуток времени  $\Delta t$  все данные характеристики можно считать неизменными. Такое нестабильное поведение частицы рассмотрено в Приложении 1 и названо псевдо-стационарным случайным процессом (ПССП).

Допустим так же, что у такой псевдо-стационарной стохастической системы (т.е. неравновесного состояния ХБЧ) со временем незначительно изменяется ее глобально усредненная механическая энергетичность (ГУМЭ)

$$\overline{\langle \varepsilon(x, y, z, t) \rangle} = \overline{\langle k(x, y, z, t) \rangle} + \overline{\langle u(x, y, z, t) \rangle}. \quad (48)$$

Поскольку изменение ГУМЭ происходит медленно, можно записать

$$\overline{\langle \varepsilon(x, y, z, t) \rangle} = \overline{\langle \varepsilon(x, y, z, t_0) \rangle} \pm \overline{\langle \varepsilon_k(x, y, z, t) \rangle}, \quad (49)$$

где  $\overline{\langle \varepsilon(x, y, z, t_0) \rangle}$  – начальное значение глобально усредненной механической энергетичности ХБЧ в момент времени  $t_0$ ;

$\pm \overline{\langle \varepsilon_k(x, y, z, t) \rangle}$  – малое измените {увеличение (+) или уменьшение (-)} глобально усредненной механической энергетичности ХБЧ в течение времени  $t$ , связанное с изменением ее кинетической энергетичности  $\Delta k$ .

Для сокращения вычислений рассмотрим одномерный случай, без ущерба для общности заключений на случай трех измерений, и представим выражение (49) в сокращенном виде

$$\overline{\langle \varepsilon(x, t) \rangle} = \overline{\langle \varepsilon(x, t_0) \rangle} \pm \overline{\langle \varepsilon_k(x, t) \rangle}. \quad (50)$$

Представим выражение (50) в следующем виде

$$\overline{\langle \varepsilon(x, t) \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \langle \varepsilon(x, t_0) \rangle dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} d\varepsilon_{kx}, \quad (51)$$

где  $\varepsilon_{kx}$  – локальное изменение механической энергетичности ХБЧ из-за небольшого изменения ее кинетической энергетичности в направлении оси  $X$  (смотрите § П2.2 в Приложении 2);

$\rho(\varepsilon_{kx}, t)$  – функция плотности распределения вероятностей (ФПРВ) изменений механической энергетичности ХБЧ  $\varepsilon_{kx}$ .

Подставим выражение (51) в глобально усредненную  $x$ -эффективность ХБЧ (18)

$$\begin{aligned} \overline{\langle s_x(t) \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [\langle u(x, t) \rangle - \langle \varepsilon(x, t_0) \rangle] dx \pm \right. \\ \left. \pm \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} d\varepsilon_{kx} \right\} dt. \end{aligned} \quad (52)$$

Запишем выражение (52) в координатном представлении. Для этого, выразим ФПРВ  $\rho(x, t)$ ,  $\rho(v_x, t)$  и  $\rho(\varepsilon_x, t)$  через плотность амплитуды вероятности (т.е. волновую функцию)  $\psi(x, t)$ .

Согласно выражению (A1.47) в Приложении 1

$$\rho(x, t) = \psi(x, t) \psi(x, t) = \psi^2(x, t), \quad (53)$$

Согласно выражению (П2.13) в Приложении 2

$$\frac{1}{2} \overline{v_x^2(t)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x = -\frac{\eta_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} dx, \quad (54)$$

где {смотрите выражение (П2.13a) в Приложении 2}

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2(t-t_0)}{\tau_{xcor}(t-t_0)} \approx \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = \text{constant}. \quad (54a)$$

- постоянный\* масштабный параметр, с размерностью в системе СИ (м<sup>2</sup>/с).

\*Неизменность масштабного параметра  $\eta_x = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{xcor}(t)} \approx \text{constant}$  при изменении волновой функции  $\psi(x, t)$  в рассматриваемом случае обусловлено тем, что дисперсия  $\sigma_x^2(t)$  и интервал автокорреляции  $\tau_{xcor}(t)$  исследуемой стохастической системы изменяются (т.е. увеличиваются или уменьшаются) практически одновременно и одинаково.

Сохранение неизменным отношения основных усредненных характеристик исследуемого случайного процесса  $\sigma_x^2(t)/\tau_{xcor}(t)$  в Приложении 2 названо: «Законом пропорционального постоянства масштабного параметра  $\eta_x$  стохастической системы». Этот эффект подобен явлению, описанному в молекулярно-кинетической теории, когда расширение газа неизменно сопровождается замедлением скорости движения его атомов и/или молекул и уменьшением интенсивности их столкновений (т.е. изменения направления их движения); и, наоборот, сжатие газа сопровождается ростом скорости и интенсивности столкновений его атомов и/или молекул.

Согласно выражению (П2.31) в Приложении 2

$$\overline{\langle \varepsilon_k(x, t) \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} d\varepsilon_{kx} = \pm i \frac{\eta_x^2}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx, \quad (55)$$

где  $D$  – мнимая часть комплексного коэффициента самодиффузии  $B = iD$  хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), с размерностью в системе СИ (м<sup>2</sup>/с) {смотрите выражение (A2.19) в Приложении 2}. Предполагается, что  $D = \text{constant}$ .

А также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \langle u(x, t) \rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x, t) \langle u(x, t) \rangle dx, \quad (56)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \langle \varepsilon(x, t_0) \rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x, t) \langle \varepsilon(x, t_0) \rangle dx. \quad (57)$$

Подставляя выражения (53) – (57) в интеграл (52), получим координатное представление псевдо-стационарной глобально усредненной «х - эффективности» ХБЧ

$$\overline{\langle s_x(t) \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \psi^2(x, t) [\langle u(x, t) \rangle - \langle \varepsilon(x, t_0) \rangle] \pm \pm i \frac{\eta_x^2}{D} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right) dx dt. \quad (58)$$

В случае 3-мерного рассмотрения данный функционал имеет вид

$$\overline{\langle s_r(t) \rangle} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\eta_r^2}{2} \psi(\vec{r}, t) \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + [\langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle] \psi^2(\vec{r}, t) \pm i \frac{\eta_r^2}{D} \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) dx dy dz dt,$$

где  $\vec{r} := (x, y, z)$ . (59)

Найдем уравнение для экстремалей  $\psi(x, y, z, t)$  функционала (59).

Сначала напомним, что условие экстремальности функционала вида

$$I = \int_{x_{01}}^{x_{02}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(x_0, x_1, x_2, x_3, f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_{00}, f_{11}, f_{22}, f_{33}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\text{где } f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ii} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (60)$$

определяется уравнением Эйлера-Пуассона-Эльсгольца [11, стр. 310 – 316, [Elsgolts LE VI](#)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_0} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_1} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_3} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{00}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{11}} \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{22}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{33}} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

где (62)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial f_3} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{00}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{00}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{11}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{22}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{22}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{33}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{33}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

- первые полные частные производные по  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial f_2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_3} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{00}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x_i^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial f_{22}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{33}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{33}}{\partial x_i^2} \end{aligned} \quad (63)$$

- вторые полные частные производные по  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

В случае функционала (59) имеем лагранжиан: (64)

$$\begin{aligned} L = -\frac{\eta^2}{2} \psi(x, y, z, t) \left( \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + \\ + [ \langle u(x, y, z, t) \rangle - \langle \varepsilon(x, y, z, t) \rangle ] \psi^2(x, y, z, t) \pm i \frac{\eta^2}{D} \psi(x, y, z, t) \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

при этом

$$x_1 = t, \quad x_0 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(x, y, z, t), \quad (65)$$

$$\begin{aligned}\psi_t &:= \frac{\partial \psi}{\partial t}, & \psi_x &:= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \psi_y &:= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \psi_z &:= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \psi_{tt} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, & \psi_{xx} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, & \psi_{yy} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & \psi_{zz} &:= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Так как лагранжиан (64) зависит только от  $\psi$ ,  $\psi_t$ ,  $\psi_{xx}$ ,  $\psi_{yy}$  и  $\psi_{zz}$ , уравнение Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (61) упрощается

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right\} = 0. \quad (66)$$

т.к. все остальные слагаемые в (61) равны нулю.

В результате подстановки лагранжиана (64) в выражения (62) и (63), с учетом обозначений (65), получим следующие слагаемые, входящие в уравнение (66)

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + 2\psi(\vec{r}, t) [\langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle] \pm i \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right\} &= \pm i 2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right\} &= -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right\} &= -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right\} &= -2 \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (66), получим искомое независящее от массы трехмерное стохастическое уравнение для определения экстремалей  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$  функционала глобально усредненной эффективности ХБЧ (59)

$$\pm i \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{3\eta_{\vec{r}}^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + 2[\langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle] \psi(\vec{r}, t), \quad (67)$$

Уравнение (67) является системой двух уравнений

$$\begin{cases} -i \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{3\eta_{\vec{r}}^2}{4} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + [\langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle] \psi(\vec{r}, t), & (67a) \\ i \frac{\eta_{\vec{r}}^2}{2D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{3\eta_{\vec{r}}^2}{4} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + [\langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle] \psi(\vec{r}, t). & (67b) \end{cases}$$

Это говорит о том, что в медленно изменяющейся (т.е. псевдо - стационарной) стохастической системе должно одновременно протекать два процесса, описываемых двумя уравнениями (67a) и (67b).

Выражение (67) будем называть «*независимым от массы ХБЧ псевдо-стационарным (т.е. времени-зависимым) трехмерным стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона*» (или кратко – «*времени-зависимым стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона*»).

## 2.7 Псевдо-стационарное (времени-зависимое) стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона

Предположим, что в начальный момент времени  $t_0$  глобально усредненная механической энергетичность ХБЧ равна нулю (т.е.  $\langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle = 0$ ), тогда уравнение (67) принимает вид

$$\pm i \frac{\eta_r^2}{2D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{3}{4} \eta_r^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + \langle u(\vec{r}, t) \rangle \psi(\vec{r}, t). \quad (68)$$

В случае, когда  $D = \eta_r$  получим самосогласованное стохастическое уравнение Эйлера-Пуассона

$$\pm i \frac{\eta_r}{2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{3}{4} \eta_r^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + \langle u(\vec{r}, t) \rangle \psi(\vec{r}, t). \quad (68a)$$

Сравним это уравнение с времени-зависимым уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t). \quad (69)$$

Сначала поделим обе части уравнения (69) на массу частицы  $m$ , в результате с учетом определения (46) получим

$$i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m^2} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + u(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (70)$$

где  $u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) / m$  – «потенциальная энергетичность» ХБЧ.

Очевидно, что при  $\langle u(\vec{r}) \rangle = u(\vec{r})$  и  $\frac{\hbar}{m} = \eta_r = \frac{2\sigma_r^2}{\tau_{rcor}}$  самосогласованное стохастическое уравнение (68a) и уравнение Шредингера (70) совпадают с точностью до постоянных коэффициентов и знаков  $\pm$ .

Интересно, однако, отметить, что Эрвин Шрёдингер записал уравнение (4'') в "Quantisierung als Eigenwertproblem, Vierte Mitteilung", *Annalen der Physik* (1926) [1] в следующем виде

$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V\psi \pm \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (71)$$

Переставим слагаемые в этом выражении и учтем, что  $\hbar = h/2\pi$ ,

$$\pm i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\hbar^2 \nabla^2 \psi + V\psi. \quad (72)$$

При этом прослеживается полная аналогия между исходным уравнением Шрёдингера (72) и стохастическим уравнением (68).

Поэтому уравнение (68) будем называть: «независящим от массы нестационарным трехмерным стохастическим уравнением Шрёдингера-Эйлера-Пуассона» (или кратко – «времени-зависимым стохастическим уравнением Шрёдингера-Эйлера-Пуассона»).

В отличие от времени-зависимого уравнения Шрёдингера (69) нестационарное стохастическое уравнение Шрёдингера-Эйлера-Пуассона (68) применимо для исследования изменяющихся со временем усредненных состояний ХБЧ любого масштаба.

## 2.8 Стохастическое уравнение мнимой самодиффузии

Если в стохастическом уравнении (68) приравнять нулю и локально усредненную потенциальную энергетичность (т.е.  $\langle u(\vec{r}, t) \rangle = 0$ ), то оно принимает вид стохастического уравнения мнимой самодиффузии (которое является частным случаем уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова)

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mp i \frac{3}{2} D \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) \quad (73)$$

с комплексным коэффициентом самодиффузии  $B = i \frac{3}{2} D$ .

Таким образом, предложенная модель стохастической системы предполагает возможность изучения различных вариантов поведения ХБЧ, в зависимости от ее усредненных характеристик.

## 2.9 Проблема сомножителя 3

Эрвину Шредингеру приписывают следующее высказывание: «В науке головоломку задает тебе ни Кто Иной, как ГОСПОДЬ. ОН Придумал, как саму Игру, так и ее Правила, которые ты можешь не знать полностью. Тебе предоставляется угадать или определить на свой страх недостающую половину Правил. Результат зависит от того на сколько количество Истинных Правил Игры, на Вечно Установленные ГОСПОДОМ, больше числа ложных в следствии твоей неспособности познать Истину. И если данное соотношение превысит некий предел – головоломка будет решена. Похоже, в этом и состоит весь азарт Игры». Мы с Дэвидом Ридом (David Ried) не нашли источник с данным высказыванием Э. Шредингера, но это высказывание кому бы оно не принадлежало, на наш взгляд, полностью отражает суть поиска научной Истины.

В случае отсутствия зависимости волновой функции от времени, т.е. при  $\partial\psi(\vec{r}, t)/\partial t = 0$  и  $\langle u(\vec{r}, t_0) \rangle = \varepsilon$  уравнение (67) переходит в стационарное стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона (41)

$$-\frac{3\eta_r^2}{4}\nabla^2\psi(\vec{r}) + \langle u(\vec{r}) \rangle \psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}), \quad (73a)$$

что и следовало ожидать.

Однако, с другой стороны, было бы более логичным, если уравнение мнимой самодиффузии (73) имело вид

$$\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mp iD\nabla^2\psi(\vec{r}, t), \quad (73б)$$

так как комплексный коэффициент самодиффузии был определен как  $B = iD$  {смотрите выражение (П2.19) в Приложение 2}.

То есть, если бы в место сомножителя 3 в числителе первого слагаемого уравнения (73a) был бы сомножитель 2, то уравнение (41) имело бы более предпочтительный вид

$$-\frac{\eta_r^2}{2}\nabla^2\psi(\vec{r}) + \langle u(\vec{r}) \rangle \psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}). \quad (73в)$$

При этом уравнение (68) так же было бы более лаконичным

$$\pm i\frac{\eta_r^2}{2D}\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\eta_r^2}{2}\nabla^2\psi(\vec{r}, t) + \langle u(\vec{r}, t) \rangle \psi(\vec{r}, t),$$

и при  $\partial\psi(\vec{r}, t)/\partial t = 0$  и  $\langle u(\vec{r}) \rangle = 0$ , переходящим в уравнение (73б).

Двусмысленность ситуации заключается в том, что если бы в место уравнения Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (35h) было бы использовано уравнение Эйлера - Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right) = 0, \quad (73г)$$

то легко убедиться, что подстановка в это уравнение лагранжиана (35g)

$$L = -\frac{\eta_r^2}{2} \psi(x, y, z) \nabla^2 \psi(x, y, z) + \psi^2(x, y, z) [ \langle u(x, y, z) \rangle - \langle \varepsilon(x, y, z) \rangle ]$$

приводит к ожидаемому результату, т.е. к получению уравнения

$$-\frac{\eta_r^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \langle u(\vec{r}) \rangle \psi(\vec{r}) = \langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle \psi(\vec{r}). \quad (73д)$$

Казалось бы, что использование уравнения Эйлера-Лагранжа (73г) – это более верный путь, т.к. в этом случае множитель 3 исчезает.

Но в случае, если вместо уравнения Эйлера-Пуассона-Эльсгольца (66) использовалось уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_{zz}} \right) = 0, \quad (73е)$$

то при подстановке в него лагранжиана (65)

$$L = -\frac{\eta_r^2}{2} \psi(\vec{r}, t) \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + [ \langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t) \rangle ] \psi^2(\vec{r}, t) \pm i \frac{\eta_r^2}{D} \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

получается следующее уравнение

$$-\frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \psi(\vec{r}, t) [ \langle u(\vec{r}, t) \rangle - \langle \varepsilon(\vec{r}, t_0) \rangle ] = 0, \quad (73ж)$$

в котором отсутствует первая производная волновой функции по времени, и данное уравнение не соответствует времени-зависимому уравнению Шредингера (70).

Нам не известно какой формализм более верный Эйлера-Лагранжа или Эйлера-Пуассона-Эльсгольца. Можно только констатировать факты:

- при использовании формализма Эйлера-Лагранжа получается вывод времени-независимого уравнения Шредингера, в котором отсутствует

множитель 3. Но этот формализм не позволяет вывести времени-зависимое уравнение Шредингера;

- при использовании формализма Эйлера-Пуассона получается вывод времени-независимого уравнения Шредингера и времени-зависимого уравнения Шредингера с точностью до коэффициентов. Но в этом случае присутствует множитель 3, а не ожидаемый множитель 2.

Сформулируем суть проблемы, на примере 2-мерного функционала общего вида

$$I[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(x_0, x_1, f, f_0, f_1, f_{00}, f_{01}, f_{11}, \dots, f_{11\dots1}) dx_1 dx_2, \quad (73з)$$

где  $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $f_{iij} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j}$ , ... ( $i = 0, 1; j = 0, 1$ ).

Экстремали этого функционала могут удовлетворять уравнению Эйлера – Лагранжа [55, 56]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{00}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{01}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{11}} \right) - \dots + \\ + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{11\dots1}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (73и)$$

или уравнению Эйлера-Пуассона-Эльсгольца [11, стр. 310 – 316]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_0} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_1} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{00}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{01}} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{11}} \right\} - \dots + \\ + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{11\dots1}} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (73к)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial f_{00}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{00}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{11}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial f_{10}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_i} \right) \frac{\partial f_{10}}{\partial x_i} + \dots \end{aligned} \quad (73л)$$

- первые полные частные производные по  $x_i$  ( $i = 0, 1$ ). (73м)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial f_{00}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial f_{01}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ii}} \right) \frac{\partial^2 f_{01}}{\partial x_i^2} + \dots \end{aligned}$$

- вторые полные частные производные по  $x_i$  ( $i = 0, 1$ ). (73н)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial f_0} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial f_{00}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial f_{11}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial f_{10}} \left( \frac{\partial L}{\partial f_{ij}} \right) \frac{\partial^2 f_{10}}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \end{aligned}$$

- вторые смешанные частные производные по  $x_i$  и  $x_j$  ( $i = 0, 1; j = 0, 1$ ).

Для автора формализм Эйлера-Пуассона-Эльсгольца выглядит более предпочтительным, так как приводит к выводу обоих уравнений Шредингера с точностью до постоянных коэффициентов. Однако вопрос (точнее «проблема фактора 3») остается открытым.

Последнее слово за математиками, поскольку за формализмом Эйлера-Лагранжа стоят такие математические авторитеты как Д. Гильберт (D. Hilbert) и И.М. Гельфанд (I. M. Gelfand), а формализмом Эйлера-Пуассона-Эльсгольца приведен в работе Льва Эрнестовича Эльсгольца.

## 2.10 Стохастические квантовые операторы

Покажем, как получаются операторы в масс-независимой стохастической квантовой механике (МСКМ). Для этого вернемся к рассмотрению модели хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), показанной на рис. 1.

Во время хаотического движения частицы в окрестности условного центра, она постоянно меняет направление своего движения. Поэтому частица в каждый момент времени обладает моментом импульса

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (74)$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор от условного центра до частицы (рис. 1);

$\vec{p} = m\vec{v}$  – мгновенное значение и направление вектора импульса частицы.

Поделим обе части векторного выражения (74) на величину  $m|\vec{r}|^2$ , в результате получим вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{m|\vec{r}|^2} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{r}|^2}. \quad (75)$$

Представим векторное уравнение (75) в компонентном виде

$$\omega_x = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (yv_z - zv_y), \quad \omega_y = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (zv_x - xv_z), \quad \omega_z = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (xv_y - yv_x), \quad (76)$$

Усредним данные компоненты

$$\overline{\omega}_x = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (y\overline{v}_z - z\overline{v}_y), \quad \overline{\omega}_y = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (z\overline{v}_x - x\overline{v}_z), \quad \overline{\omega}_z = \frac{1}{|\vec{r}|^2} (x\overline{v}_y - y\overline{v}_x), \quad (77)$$

Воспользуемся координатным представлением усредненных компонент вектора скорости (П2.2) (смотрите Приложение 2) при  $n = 1$

$$\overline{v}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx = \left( \pm \frac{i\eta_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \psi(x) dx, \quad (78)$$

$$\overline{v}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \left( \pm i\eta_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(y) dy = \left( \pm \frac{i\eta_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \psi(y) dy, \quad (79)$$

$$\overline{v}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) \left( \pm i\eta_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(z) dz = \left( \pm \frac{i\eta_z}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) \psi(z) dz. \quad (80)$$

Докажем, что эти выражения верны на примере выражения (78).

Сначала убедимся, что верно выражение

$$\overline{v}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \pm \frac{i\eta_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x)\psi(x)] dx, \quad (81)$$

поскольку выполняется равенство

$$\begin{aligned} \pm \frac{i\eta_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x)\psi(x)] &= \pm \frac{i\eta_x}{2} \left[ \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \psi(x) + \psi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right] = \pm \frac{i\eta_x}{2} \left[ 2\psi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right] = \\ &= \pm i\eta_x \left[ \psi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right] = \psi(x) \left( \pm i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x). \end{aligned}$$

Вследствие того, что операции интегрирования и дифференцирования коммутативны, окончательно запишем

$$\begin{aligned} \overline{v}_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \pm \frac{i\eta_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x)\psi(x)] dx = \\ &= \left( \pm \frac{i\eta_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\psi(x) dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Учтем, что, например, в (78)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (82)$$

это, по сути, означает, что блуждающая частица хаотически перемещается то в одну, то в другую сторону, так что средние значения компонент ее скорости (78) – (80) равны нулю (т.е.  $\overline{v_x} = 0$ ,  $\overline{v_y} = 0$  и  $\overline{v_z} = 0$ ).

Тождества (78) – (80) эквивалентны независимым от массы ХБЧ стохастическим операторам компонент вектора скорости

$$\hat{v}_x = \mp \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{v}_y = \mp \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{v}_z = \mp \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (83)$$

здесь учтено, что для изотропного случая  $\eta_x = \eta_y = \eta_z = \eta_r$ .

Независящие от массы стохастические операторы (83), с учетом  $\frac{\hbar}{m} = \eta_r$ , соответствуют операторам компонент вектора импульса КМ [12]

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Подставляя выражения (78) – (80) в выражения (77), с учетом (83), получим масс-независимые стохастические операторы компонент вектора угловой скорости ХБЧ

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{\omega}_y &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{\omega}_z &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (84)$$

которые соответствуют квантово-механическим операторам компонент вектора момента импульса [12]

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

В сферической системе координат стохастические операторы (84) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{\omega}_y &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{\omega}_z &= \mp \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (85)$$

Стохастический независящий от массы ХБЧ оператор квадрата модуля угловой скорости ХБЧ равен

$$\hat{\omega}^2 = \hat{\omega}_x^2 + \hat{\omega}_y^2 + \hat{\omega}_z^2 = -\frac{\eta_r^2}{|\vec{r}|^4} \nabla_{\theta,\phi}^2,$$

где

$$\nabla_{\theta,\phi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (86)$$

Подобным образом могут быть получены другие независящие от массы стохастические квантовые операторы МСКМ, аналогичные операторам КМ. Только в МСКМ вместо отношения  $\hbar/m$  присутствует масштабный параметр  $\eta_r$  (47) {ог (A1.46) в Приложении 1}, поэтому МСКМ пригодна для описания стохастических процессов любого масштаба.

Аналогичным образом может быть выстроен математический аппарат всей масс-независимой стохастической квантовой механики (МСКМ), который практически полностью совпадает с математическим аппаратом КМ. Но МСКМ основана на принципах «обыденной» (классической) логики, и пригодна для описания квантовых систем и эффектов любого масштаба.

## 2.11 Соотношение неопределенностей в МСКМ

Неопределенность в скорости хаотически блуждающей частицы (ХБЧ) определяется стандартным отклонением

$$\sqrt{v_x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i \eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) dx} = i \eta_x \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx}, \quad (87)$$

а неопределенность в координате частицы определяется волатильностью

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^2 \psi(x) dx}. \quad (88)$$

Совместная неопределенность по координате и импульсу может быть представлена в виде

$$\sqrt{v_x^2 x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i \eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 x^2 \psi(x) dx} = \sqrt{-\eta_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2} \psi(x) dx} = \sqrt{2} i \eta_x$$

Данное соотношение неопределенностей МСКМ эквивалентно соотношению неопределенностей Гейзенберга в КМ  $\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi \hbar$ .

### 3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В статье предлагается обратить внимание на то, что все окружающие нас объекты, субъекты и системы одновременно стремятся к двум равным по значимости, но взаимно противоположным (т.е. антисимметричным) целям:

- к максимально возможному порядку, что выражено в «принципе наименьшего действия», и
- к максимально возможному хаосу, что выражено в «принципе максимума энтропии».

Другими словами, в окружающей нас реальности нет ни одной полностью детерминированной или полностью случайной сущности. Все подвержено одновременной устремленности к изменчивости и к упорядочности.

Чтобы одновременно учесть обе эти тенденции, в этой работе предложен единый «принцип экстремума усредненной эффективности», в котором сосуществуют обе конкурирующие концепции: «порядка» и «хаоса».

В статье рассмотрены усредненные состояния частицы (т.е. компактного твердого тела) любой величины, которая под действием флуктуаций окружающей среды и/или различных далекодействующих сил непрерывно хаотически блуждает (колеблется, смещается) в 3-мерном пространстве подобно броуновской частице.

Постоянно дрожащее (смещающееся, колеблющееся) тело представляется в виде хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), обладающей непрерывной траекторией движения и объемом. При этом внутренняя структура ХБЧ не рассматривается, а также вращение и деформации ее формы не учитываются.

К таким ХБЧ можно отнести **центры**: валентного электрона в водородоподобном атоме; колеблющегося атома в кристаллической решетке; трепещущего желтка в курином яйце и т.д. (смотрите начало § 2.1).

Все эти стохастические системы подобны друг другу и подчиняются одним и тем же законам, с учетом различных типов коэффициента трения и вязкости среды, окружающей ХБЧ, а так же длительностью периода усреднения ее поведения. Например, чтобы усреднить хаотические полеты птицы в клетке требуется неделя непрерывных наблюдений за ней; тогда как для усреднения хаотических смещений ядра галактики относительно основной линии ее движения в космическом пространстве потребуется миллионы лет исследований. Но результаты таких наблюдений могут оказаться аналогичными, несмотря на большую разницу в масштабах этих событий.

Для примера, в Приложении 3 теоретически предсказано, что возможные усредненные состояния колеблющегося ядра биологической клетки подобны дискретным состояниям 3-мерного квантово-механического осциллятора (т.е. элементарной частицы, находящейся в аналогичных условиях). Если эти микроскопические квантовые эффекты подтвердятся экспериментально, то мы получим возможность наметить пути решения проблемы измерений в стохастической квантовой механике.

В рамках масс-независимой стохастической квантовой механики (МНСКМ) проблему изучения «чистых» состояний пико-частиц предлагается решать следующим образом. Необходимо найти (или смоделировать) стохастическую макроскопическую систему, аналогичную исследуемой пико-скопической системе (т.е. хаотически блуждающей пико-частице), и провести эксперименты с макроскопической системой, не оказывая на нее осязательного влияния. Затем результаты измерений на макроуровне спроецировать на возможные аналогичные проявления, например, пико-скопической системы.

В рамках МСКМ такой подход к изучению «чистых» состояний пикоскопических и мегаскопических систем возможен, поскольку философские

основы этой стохастической механики уходят корнями в глубокую древность и зиждутся на убеждении, что все уровни Мироздания подобны друг другу. В этом смысле МСКМ является универсальной теорией для всех уровней организации хаотически колеблющейся (смещающейся, дрожащей, блуждающей, шевелящейся) материи.

Применительно к пико-частицам (т.е. частицам атомного и субатомного масштаба) МСКМ соответствует стохастической квантовой механике (СКМ) Эдварда Нельсона [2]. При этом уравнения МСКМ (41) и (68), выведенные в этой статье на основании принципа экстремума глобально усредненной «эффективности» ХБЧ, с точностью до коэффициентов совпали с соответствующими уравнениями Шредингера (42) и (69).

Другими словами, в МСКМ «чистая» волновой функции  $\psi(x,t)$  – это экстремаль функционала глобально усредненной «эффективности» ХБЧ, записанной в координатном представлении.

Таким образом, полученные в статье стохастические уравнения (37), (41), (67), (68) и (73) являются условиями для нахождения экстремалей  $\psi(x,t)$  функционала глобально усредненной «эффективности» хаотически блуждающей частицы (ХБЧ). Важно отметить, что данный стохастический функционал сбалансирован в отношении одновременного стремления любой стохастической системы сразу к двум взаимно противоположным (антисимметричным) целям:

- к «порядку» (т.е. к детерминированности с наименьшими энергетическими потерями), и
- к «хаосу» (т.е. к максимуму энтропии, или к наибольшей неопределенности).

Стохастические уравнения (41) и (68) имеют ряд следующих преимуществ над соответствующими уравнениями Шредингера (42) и (69):

1]. В рассуждениях, приведенных для вывода стохастических уравнения (41), (67) и (68), на хаотически блуждающую частицу (ХБЧ) не было

наложено ни одного ограничения, кроме балансов полной механической энергетичности. То есть ХБЧ – это обычная частица, имеющая: объем, траекторию движения, место положения и импульс в каждое мгновение времени. Другими словами, вывод стохастических уравнений Шредингера-Эйлера-Пуассона (41) и (68) получен на основе «обыденной» (классической) логики с применением теории вероятностей, теории обобщенных функций и вариационного исчисления.

Тогда как за 95 лет, с момента появления в 1926 уравнений Шредингера, многие исследователи предлагали различные способы их вывода, опираясь на аксиомы множества различных интерпретаций квантовой механики, но всеми признанного результата так и не было получено.

К таким работам относятся: Rosen, N. (1964) [13]; Nelson, E. (1966) [2]; Chen, R.L.W. (1989) [15]; Vleck, V.J.H. (1994) [16]; Yung & Jick H. Yee, (1994) [58]; Peice, P. (1996) [17]; Ogiba, F. (1996) [18]; Briggs, J. & Rost, J.M., (2001) [19]; Hall, M. J. W. & Reginatto, M. (2002) [21]; Grössing, G. (2002) [22]; Inage, S. (2006) [23]; Briggs, J., Boonchui, S. & Khemmani, S. (2007) [20]; Ward D.W., Volkmer S.M. (2008) [24]; Ricardo, C-S. (2010) [25]; Szepessy, A. (2010) [26]; Pranab, R. S. (2011) [27]; Field, J.H. (2011) [28]; Chiarelli, P. (2012) [29]; Schleich W.P., Greenberger D.M., Scully M.O. (2013) [30]; Nanni, L. (2015) [31]; Barde, N.P., Kokne, P.M. & Bardapurkar, P. P. (2015) [32]; Wieser, R. (2015) [33]; Godart, M. (2016) [35]; Olavo, L. S. F. (2016) [36]; Baixaul, J.G. (2016) [38]; Faycal Ben Adda (2018) [39]; Chavanis, P.-H. (2018) [40]; Wang, X.-S. (2018) [41] и другие).

За 100 лет интенсивного поиска научному сообществу так и не удалось выработать логически непротиворечивые обоснования аксиом КМ. Одна из причин общей неудовлетворенности заключалась в отсутствие «красивого» вывода уравнений Шредингера.

2]. Редуцированная постоянная Планка ( $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж/Гц) ограничивает область применения уравнений Шредингера (42) и (69), и всей КМ в целом, описанием явлений атомного и субатомного масштаба.

Дело в том, что отношение  $\hbar/m$ , явно или латентно присутствующее в уравнениях Шредингера, только тогда оказывается физически значимым, когда масса частицы  $m$  очень мала (например, считается, что масса покоя электрона  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  кг).

Тогда как область применения стохастических уравнений Эйлера-Пуассона (37), (41), (67), (68) и (73) не ограничена.

Чтобы использовать, например, стохастические уравнения (41) и (68) для описания усредненных состояний любой из вышеперечисленных стохастических систем необходимо оценить их масштабный параметр  $\eta_r$  (33). Для этого нужно на основе достаточно длительных наблюдений за центром ХБЧ определить стандартное отклонение  $\sigma_r$  и интервал автокорреляции  $\tau_{r\text{ cor}}$  трехмерного случайного процесса, в котором эта частица участвует.

В качестве примера в Приложении 3 показана возможность применения независящего от массы ХБЧ стационарного стохастического уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона (41) для получения квантовых чисел, характеризующих возможные усредненные состояния хаотически колеблющегося ядра биологической клетки в период интерфазы. Аналогично могут быть получены квантовые характеристики постоянно хаотически смещающегося ядра планеты или любого другого аналогичного стохастического объекта или субъекте.

3]. Стохастическое уравнение (41) применимо также для описания усредненных состояний хаотически перемещающегося центра электрона в окрестности ядра водородоподобного атома. Если в результате статистической обработки косвенных наблюдений за хаотическим поведением валентного электрона в таком атоме выяснится, что его масштабный параметр равен

$$\eta_{er} = \frac{2\sigma_{er}^2}{\tau_{er\,cor}} \approx \frac{h}{m_e} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 0,116 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с},$$

то уравнения (41) и (42) для данного случая окажутся полностью эквивалентными. В этом смысле стационарное (т.е. времени - независимое) уравнение Шредингера (42) можно рассматривать как частный случай стационарного стохастического уравнения Шредингера - Эйлера - Пуассона (41).

4]. В уравнениях Шредингера (42) и (69) явно или латентно присутствует масса элементарной частицы, которую в принципе невозможно непосредственно измерить посредством макроскопических средств измерений.

Тогда как в стохастических уравнениях Шредингера-Эйлера-Пуассона (41) и (68) отсутствует масса частицы. При этом стандартное отклонение  $\sigma_r$  и интервал автокорреляции  $\tau_{r\,cor}$  трехмерного случайного процесса, в котором участвует ХБЧ, всегда могут быть оценены исходя из статистической обработки результатов достаточно длительных наблюдений за практически любой стохастической системой. Поэтому стохастические уравнения (37), (41), (67), (68) и (73), полученные в этой статье, могут быть применены для исследования квантовых явлений любого масштаба.

5]. В рассудок нескольких поколений физиков внедрено, что электрон – это точечный объект (т.е. сущность не имеющая объема). Это произошло в основном потому, что точечный заряд, согласно закону Кулона, должен взрываться из-за бесконечной силы отталкивания разных частей очень маленькой заряженной частицы.

Были еще другие аргументы, например, Л.Д. Ландау считал, что если бы электрон был не точечным, то при сильных столкновениях с другими частицами в нем бы возникали такие напряжения, что он неизбежно рассыпался на части, а на практике этого не происходит.

Вместе с тем, идея о том, что элементарные частицы это точечные частицы приводит ко многим проблемам (в частности, к ультрафиолетовым

расходимостям). Кроме того, обыденный рассудок никогда не согласится с отсутствием объема у реальной частицы.

Поэтому попытки уйти от точечности элементарных частиц были всегда. Например, перенормировки и регуляции (в частности поляризация вакуума вокруг точечного заряда и размытость заряда за счет флуктуаций) формируют иллюзию объема частицы, а множество струнных теоретиков перешли от точечных к линейным объектам в многомерном пространстве с 6-ю компактно свернутыми измерениями.

Другое дело, что квантовая механика (КМ) изначально сформулирована так, что она оперирует с волновыми функциями, а не с частицами. Потому для методологии КМ все равно - элементарная частица точечный объект или нет. Однако, в ряде экспериментов в момент регистрации элементарные частицы проявляют себя как явно локальные образования, а не волновые функции, размытые по всей Вселенной. Последователи Нильса Бора эту проблему обошли с помощью так называемой мгновенной «редукции состояния». Многим специалистам не нравится, что этот процесс должен протекать с бесконечной скоростью, поэтому приверженцы многомировой интерпретации Хью Эверетта сочли более приемлемым предположение, что не волновая функция частицы, рассредоточенная по всему миру, мгновенно коллапсирует в точку, а весь мир мгновенно переходит в одно из множества возможных состояний, которое соответствует результату эксперимента.

По мнению автора концепция отечности элементарных частиц должна быть заменена на концепцию их «геометрического центра». Хотя «геометрический центр» любого объекта – это «ментальная конструкция», но она не противоречит здравому смыслу, а изучение динамики «геометрического центра» сложного объекта в ряде случаев упрощает плохо формализуемые задачи.

В предложенной статье именно геометрический центр ХБЧ движется по хаотической траектории, при том, что форма ХБЧ может изменяться, колебаться и вращаться.

6]. Если считать, что скорость и координата хаотически блуждающе частицы (ХБЧ) полностью независимые (т.е. некоррелированные) величины, то получается броуновская (а не квантовая) частица, описываемая уравнением диффузии (частным случаем уравнения Колмагорова-Фоккера-Планка). У такой частицы дисперсия места ее положения увеличивается со временем. Это модель Марковского процесса.

Однако, если коллоидная частица оказывается в малом замкнутом пространстве, или в поле действия потенциальной силы, то марковость процесса нарушается и в ряде случаев усредненное поведение ХБЧ становится квантовым (т.е. ее усредненные стояния квантуются).

Таковыми процессами занимается теория динамического хаоса, где, с одной стороны, полностью детерминированные системы дифференциальных уравнений при определенных внешних и внутренних параметрах могут приводить к псевдо-хаотическим траекториям, расходящимся по Ляпунову.

С другой стороны, в динамическом хаосе периодически проявляется порядок, т.е. дискретные упорядоченные и/или периодические конфигурации (паттерны).

«Истинный» квантовый индетерминизм, по мнению автора, обусловлен тем, что усредненное состояние любой динамической системы определяется доминированием двух фундаментальных факторов: **«принципа наименьшего действия»** и **«принципа максимума энтропии»**, т.е. паритетом между порядком и хаосом, или энергетическими затратами и устойчивостью.

В данной статье эти два вышеуказанных принципа заменены одним: **«принципом экстремума усреднённой эффективности»**. Несмотря на то, что энтропия распределенной системы в этой статье не упоминается, тем не менее, она латентно присутствует. Уравнения Шредингера - Эйлера - Пуассона, полученные в данной статье на основании принципа «Экстремума усредненной эффективности», приводят к решениям (т.е. к квадратам модуля

волновых функций), которые одновременно являются экстремалами и функционала усредненного действия и функционала энтропии Шеннона.

Вначале предложенного в этой статье метода исследования стохастической распределенной системы мы абстрагировались от хаоса посредством усреднения. Однако усреднённый порядок оказался соответствующим максимуму энтропии (неопределённости), как гарантии устойчивого равновесия рассматриваемой распределенной системы.

7]. МСКМ также предсказывает, что многие стационарные случайные процессы (в которых участвуют ХБЧ) имеют возможность перехода из одного стационарного состояния в другое с поглощением или высвобождением определенной части полной механической «энергетичности».

Это несложно проверить, например, на мотельке, постоянно хаотически летающем вокруг святающейся лампы. С помощью видеокамеры можно долго снимать его хаотические перемещения. Если затем прокрутить видеозапись с большой скоростью, то на экране не будет видно мотылька, а будет устойчивое размытое темное пятно, которое отражает ФПРВ места нахождения его геометрического центра. Следует ожидать, что если мотылька ничем не беспокоить, то размытое пятно будет напоминать гауссову ФПРВ с наибольшим затемнением в области центра лампочки. Однако если на мотылька как-нибудь энергетически воздействовать, например, теплом или ультразвуком с определенной частотой, то его усредненное поведение может резко (скачкообразно) измениться. При этом размытое пятно может поменять конфигурацию на усредненное кольцо или на усредненную восьмерку и т.д.

Также геометрический центр цветка в зависимости от интенсивности порывов ветра может в среднем описывать прямой отрезок, или круг, или эллипс, или восьмерку или другую фигуру Лиссажу.

Аналогичные 2-мерные и 3-мерные квантовые эффекты проявляются у всех ХБЧ любого масштаба и качества. В этом содержится основная идея масс-независимой стохастической квантовой механики (МСКМ): – «Изучая

стохастические объекты макромира обычными (настольными) методами, мы одновременно можем получить информацию обо всех подобных объектах микромира и небесных тел космического масштаба.

Предложенный в данной работе подход позволил вывести уравнения не-релятивистской масс-независимой стохастической квантовой механики (МСКМ) (37), (41), (67), (68) и (73) исходя из принципов в корне отличающихся от идейных устоев современных интерпретаций КМ: копенгагенской, многомировой согласованных хронологий, декогеренции и т.д., но математический аппарат МСКМ оказался полностью аналогичным математическому аппарату КМ.

Судя по всему, подобным образом могут быть получены многие другие уравнения квантовой теории поля, например: уравнение Клейна-Фока-Гордона, уравнение Дирака, уравнения Максвелла и т. д. Возможно, что алгоритм их вывода аналогичен подходу, приведенному в данной работе:

- 1) записывается состояние среднего энергетического баланса стохастической системы;
- 2) извлекается масса из условия баланса средней энергии стохастической системы, и получается "эффективность" этой системы;
- 3) выполнить глобальное усреднение «эффективности» рассматриваемой стохастической системы;
- 4) все усредненные члены в подынтегральном выражении глобально усредненной «эффективности» выражаются через ФПРВ  $\rho(x)$  и ФПРВ  $\rho(p_x)$ ;
- 5) все члены лагранжиана глобально усредненной «эффективности» стохастической системы преобразуются в координатное представление;
- 6) уравнение экстремалей результирующего функционала определяется с помощью вариационного исчисления (т.е. с использованием уравнения Эйлера - Пуассона).

Не исключено, что дальнейшие исследования подтвердят справедливость данного подхода к выводу уравнений теории поля.

Значимость приведенного здесь вывода стохастических уравнений МСКМ заключается в следующем:

- становится понятным, к каким явлениям микро- и макромира данные уравнения относятся, каковы границы и условия их применения в зависимости от масштабов рассматриваемых событий.

- отпала необходимость в привлечении «принципа неопределённости» Гейзенберга и представлений о «волнах материи» де Бройля, поскольку при выводе стохастических уравнений (37), (41), (67), (68) и (73) получена и применена процедура (П1.47) – (П1.52) полностью аналогичная переходу от координатного представления к импульсному, и наоборот, опираясь только на анализ свойств случайного процесса.

- отношение  $\hbar/m$  определяется через дисперсию и интервал корреляции исследуемого стационарного случайного процесса (33) или (П1.46). Поэтому стохастические уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона (37), (41), (67), (68) и (73) не содержит «массу» частицы  $m$ , которую во многих случаях в принципе невозможно определить.

«Масса» является (*по мнению автора*) одной из самых «темных» размерных величин современной физики. В окончательной теории понятие «масса» должно отсутствовать, и данная статья – это один из шагов в направлении искоренения этого понятия из научных представлений об окружающей Реальности.

- возвращаются к рассмотрению объем и траектория блуждающей частицы. Вместе с ними физика микромира в интерпретации Эдварда Нельсона вновь приобретает привычную логическую «почву».

Надеюсь, что если эта работа будет тщательно проанализирована и принята научным сообществом, то это позволит не только вычислять вероятностные исходы стохастических процессов, как микромира, так и макромира, но и задуматься над внутренней сутью этих процессов, как предлагал Альберт Эйнштейн в спорах с Нильсом Бором.

#### 4 БЛАГОДАРНОСТИ

Невозможно переоценить помощь американского математика Дэвида Рида (*США, Израиль*). Решение ряда математических проблем и выработка терминологии происходили в тесном взаимодействии с Д. Ридом.

Я благодарен к.ф.-м.н. В.А. Лукьянову, к.ф.-м.н Г.К. Толоконникову и М. Хаббашу за ценные замечания и комментарии, сделанные при подготовке статьи. Также выражаю благодарность своим наставникам д.ф.-м.н А.А Кузнецову и д.ф.-м.н А.И. Козлову. Большую помощь в обсуждении этой статьи оказали д.ф.-м.н А.А. Рухадзе, д.ф.-м.н А.М. Игнатов и академик РАЕН Г.И. Шипов. Была важна поддержка С.В. Мусанова, В.П. Храмихина, к.т.н. Е.П. Мышелова, к.пс.н. Т.С. Леви, А.Н. Маслова, А.Ю. Болотова, Л.А. Батановой и Карлоса Дж. Рохаса (Mr. Carlos J. Rojas) (*редактора журнала *Avances en Ciencias e Ingeniería, Чили**), к.ф.-м.н. С.В. Мизина (Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН). Комментарии доктора Л. С. Ф. Олаво (Dr. L. S. F. Olavo) (*Бразильский университет*) и доктора Д. Эдвардса (Dr. D. Edwards) (*Университет штата Джорджия, США*) были полезны автору. Была важна критика, комментарии и предложения рецензентов журналов «Энтропия» и «Симметрия» (*Базель, Швейцария*), которые пожелали остаться анонимными. Последняя переработанная и исправленная версия статьи написана по рекомендации профессора Фабио Ринальди (Prof. Fabio Rinaldi) из Университета Гульельмо Маркони (*Рим, Италия*).

Приложение 1

#### III Определение ФПРВ производной дифференцируемого случайного процесса

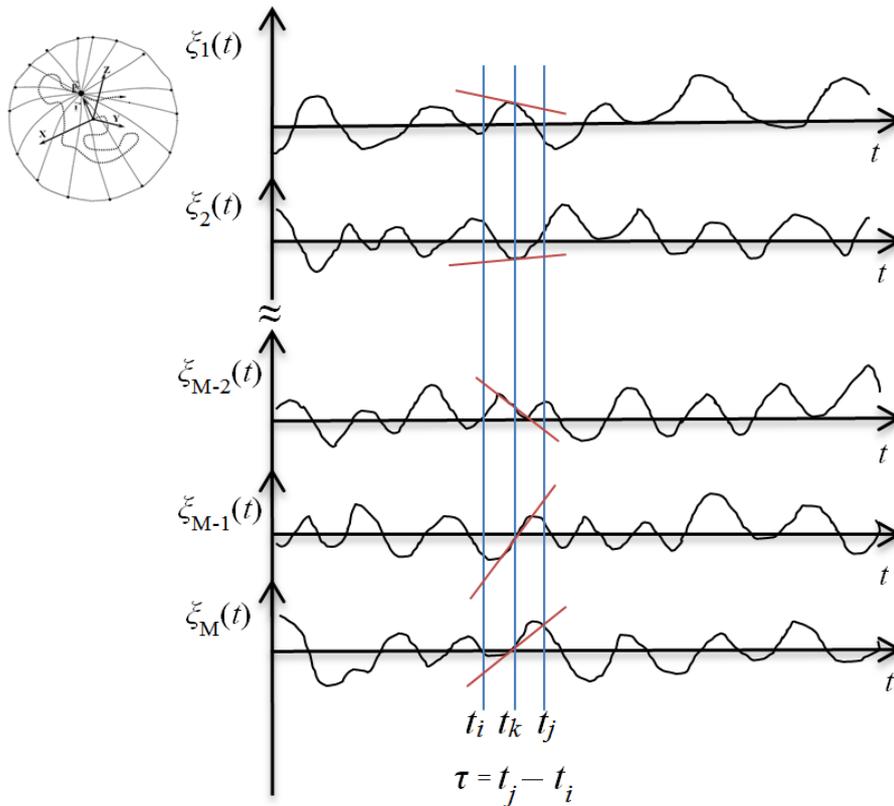
Определение способа нахождения функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) производной случайного процесса при известной ФПРВ самого этого процесса является ключом к пониманию стохастической

квантовой механики и границ ее применения. Решение данной задачи позволяет обосновать квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления к импульсному представлению, и наоборот, без привлечения гипотезы о существовании волн материи Луи де Бройля.

Это становится возможным в силу того, что импульс частицы линейно связан с производной от ее координаты. Например,  $x$ -составляющая вектора импульса частицы, движущейся в направлении оси  $X$  со скоростью  $v_x$ , связана с первой производной по координате  $x$  соотношением

$$p_x = mv_x = m \frac{\partial x}{\partial t} = mx'. \quad (\text{П1.1})$$

Рассмотрим несколько реализаций случайного процесса  $\zeta(t)$  (рис. П1.1)



**Рис. П1.1.** Реализации дифференцируемого случайного процесса  $\zeta(t)$ . Данные реализации можно интерпретировать, например, как изменения со временем проекции места нахождения блуждающей частицы на ось  $X$  (рис. 1), т.е.  $x(t) = \zeta(t)$

В общем случае этот процесс нестационарный, но будем исходить из того, что все усредненные характеристики этого процесса в сечении  $t_i$  незначительно отличаются от аналогичных его усредненных характеристик в сечении  $t_j$ . То есть потребуем, чтобы все начальные и центральные моменты этого процесса в сечении  $t_i$  были приближенно равны соответствующим начальным и центральным моментам в сечении  $t_j$  при  $\tau = t_j - t_i$  стремящемся к нулю.

Например,

$$\overline{\xi(t_i)} \approx \overline{\xi(t_j)}; \quad \overline{\xi^2(t_i)} \approx \overline{\xi^2(t_j)} \text{ и т.д.} \quad (\text{П1.2})$$

Другими словами, рассматриваемый случайный процесс  $\xi(t)$  либо стационарный (в узком смысле), либо близок к нему. Однако в каждом сечении  $t_m$  все усредненные характеристики такого процесса остаются неизменными. Для удобства будем называть такой процесс «псевдо-стационарным случайным процессом» (ПССП).

Все выводы и заключения в отношении ПССП, сделанные в этом приложении, относятся и к стационарному случайному процессу (ССП).

Отметим вначале общие свойства первой производной ПССП  $\xi(t)$ . Из реализаций на рис. П1.1 видно, что величины  $\xi(t_k)$  в сечении  $t_k$  и производные этого процесса в том же сечении  $\xi'(t_k) = \frac{\partial \xi(t_k)}{\partial t}$  являются независимыми, а следовательно, и некоррелированными, случайными величинами.

Данное утверждение может быть выражено аналитически [43]

$$\langle \xi(t_k) \xi'(t_k) \rangle = \langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\xi(t_k)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle [\xi(t_k)]^2 \rangle = 0, \quad (\text{П1.3})$$

где  $\langle \rangle$  означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными, и что все усредненные характеристики ПССП в каждом его сечении являются постоянными величинами, в том числе  $\langle [\xi(t_k)]^2 \rangle = const.$

Однако даже при статистической независимости случайных величин  $\zeta(t_k) = \zeta_k$  и  $\zeta'(t_k) = \zeta_k'$  некая связь между ФПРВ  $\rho(\zeta_k)$  и ФПРВ  $\rho(\zeta_k')$  существует. Это вытекает из известной процедуры получения ФПРВ  $\rho(\zeta_k')$  производной при известной двумерной ФПРВ случайного стационарного процесса [42, 43]

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \rho(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j). \quad (\text{П1.4})$$

Для этого в выражении (П1.4) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2} \xi_k'; \quad \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi_k'; \quad t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \quad t_j = t_k + \frac{\tau}{2}, \quad (\text{П1.5})$$

где  $\tau = t_j - t_i$ ;  $t_k = \frac{t_j + t_i}{2}$ , с якобианом преобразования  $[J] = \tau$ .

В результате из ФПРВ (П1.4) получим

$$\rho_2(\xi_k, \xi_k') = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \rho_2\left(\xi_k - \frac{\tau}{2} \xi_k', t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi_k', t_k + \frac{\tau}{2}\right). \quad (\text{П1.6})$$

Далее, интегрируя полученное выражение по  $\xi_k$ , найдем искомую ФПРВ производной исходного процесса в сечении  $t_k$  [42, 43]:

$$\rho(\xi_k') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi_k, \xi_k') d\xi_k. \quad (\text{П1.7})$$

Формальная процедура (П1.4) – (П1.7) позволяет решить задачу определения ФПРВ  $\rho(\zeta')$  при известной двумерной ФПРВ (П1.4). Однако двумерные ФПРВ определены для ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ФПРВ  $\rho(\zeta')$  при известной одномерной ФПРВ  $\rho(\zeta)$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двухмерная ФПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде [42, 43]

$$\rho(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j) = \rho(\xi_i, t_i) \rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i), \quad (\text{П1.8})$$

где  $\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i)$  – условная ФПРВ.

2. Для ПССП справедливо приближенное тождество

$$\rho(\xi_i, t_i) \approx \rho(\xi_j, t_j). \quad (\text{П1.9})$$

3. Условная ФПРВ случайного процесса при  $\tau = t_i - t_j$  стремящейся к нулю вырождается в дельта-функцию

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i) = \delta(\xi_j - \xi_i). \quad (\text{П1.10})$$

На основании вышеперечисленных свойств, препарлируем случайный процесс на участке  $[t_i = t_k - \tau/2; t_j = t_k + \tau/2]$  при  $\tau \rightarrow 0$  посредством следующей формальной процедуры.

ФПРВ  $\rho(\xi_i) = \rho(\xi_i, t_i)$  в сечении  $t_i$  и ФПРВ  $\rho(\xi_j) = \rho(\xi_j, t_j)$  в сечении  $t_j$  всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\begin{aligned} \rho(\xi_i) &= \varphi(\xi_i) \varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i), \\ \rho(\xi_j) &= \varphi(\xi_j) \varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j), \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

где  $\varphi(\xi_i)$  – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины  $\xi_i$  в сечении  $t_i$ ;  $\varphi(\xi_j)$  – ПАВ случайной величины  $\xi_j$  в сечении  $t_j$ .

Для ПССП справедливо приближенное выражение

$$\varphi(\xi_i) \approx \varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.12})$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей (П1.9).

Для ССП приближенное соотношение (П1.12) становится равенством

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.12a})$$

Отметим, что приближенное выражение (П1.12) при  $\tau \rightarrow 0$  для большинства нестационарных случайных процессов (в том числе для ПССП) так же превращается в равенство

$$\varphi(\xi_i, t_i) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi(\xi_j, t_j = t_i + \tau). \quad (\text{П1.13})$$

При выполнении условия (П1.12) выражение (П1.8) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) \approx \varphi(\xi_i) \rho(\xi_j / \xi_i) \varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.14})$$

где  $\rho(\xi_j/\xi_i)$  – условная ФПРВ.

Запишем (П.1.14) в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] \approx \\ & \approx \left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right] \rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} / \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right] \varphi\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.15})$$

Устремим в выражении (П1.15)  $\tau$  к нулю, но таким образом, чтобы данный интервал равномерно слева и справа стягивался в момент времени  $t_k = (t_i + t_j)/2$ , тогда с учетом (П1.10) из (П1.14) получим точное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \varphi(\xi_i) \rho(\xi_j / \xi_i) \varphi(\xi_j) \right\} = \varphi(\xi_{ik}) \delta(\xi_{jk} - \xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}), \quad (\text{П1.16})$$

где  $\xi_{ik}$  – результат стремления случайной величины  $\xi(t_i)$  к случайной величине  $\xi(t_k)$  слева;  $\xi_{jk}$  – результат стремления случайной величины  $\xi(t_j)$  к случайной величине  $\xi(t_k)$  справа.

Проинтегрировав обе части выражения (П1.16) по  $\xi_{ik}$  и  $\xi_{jk}$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \delta(\xi_{jk} - \xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \quad (\text{П1.17})$$

Выражение (П1.17) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства дельта-функции ( $\delta$ -функции). Для того, чтобы наполнить выражение (П1.17) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид  $\delta$ -функции.

Определим вид  $\delta$ -функции для марковского случайного процесса. Рассмотрим непрерывный случайный марковский процесс, для которого справедливо уравнение диффузии (частного случая уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова)

$$\frac{\partial \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial \xi^2}, \quad (\text{П1.18})$$

где  $B$  – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде [42, 43]

$$\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_j - \xi_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \quad (\text{П1.19})$$

где  $q$  – обобщенная частота.

При  $\tau = t_j - t_i \rightarrow 0$  из (П1.19) получим одно из определений  $\delta$ -функции

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_j / \xi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq = \delta(\xi_{jk} - \xi_{ik}). \quad (\text{П1.20})$$

Поскольку данный результат получен для предельного случая  $\tau \rightarrow 0$ , то не исключено, что  $\delta$ -функция (П1.20) может соответствовать не только диффузионному марковскому случайному процессу, но и многим другим стационарным и нестационарным случайным процессам. Другими словами, можно было сразу предположить, что  $\delta$ -функция для ПССП имеет вид (П1.20) не обращаясь к уравнению диффузии (П1.18).

Подставив полученную  $\delta$ -функцию (П1.20) в выражение (П1.17), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq \right] \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \quad (\text{П1.21})$$

Поменяв в (П1.21) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \exp\{-iq\xi_{ik}\} d\xi_{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk}) \exp\{iq\xi_{jk}\} d\xi_{jk} \right] dq = 1. \quad (\text{П1.22})$$

Учтем, что согласно (П1.13), для ПССП и ССП выполняется условие  $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$ . Поэтому выражение (П1.22) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q) \varphi^*(q) dq = 1, \quad (\text{П1.23})$$

где

$$w(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{-iq\xi_k\} d\xi_k, \quad (\text{П1.24})$$

$$w^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{iq\xi_k\} d\xi_k. \quad (\text{П1.25})$$

Подынтегральное выражение  $\varphi(q)\varphi^*(q)$  в интеграле (П1.23) отвечает всем требованиям ФПРВ  $\rho(q)$  случайной величины  $q$ :

$$\rho(q) = w(q)w^*(q) = |w(q)|^2. \quad (\text{П1.26})$$

Выясним теперь, что представляет собой случайная величина  $q$ .

Особенности рассматриваемого случайного процесса накладывают на обобщенную частоту  $q$  следующие ограничения:

- 1)  $q$  должна быть случайной величиной.
- 2) случайная величина  $q$  должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале  $\tau = t_j - t_i$  (рис. П1.1) при  $\tau \rightarrow 0$ ;
- 3) величина  $q$  должна принадлежать множеству действительных чисел ( $q \in R'$ ), имеющему мощность континуума, т. е.  $q$  должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона  $]-\infty, \infty[$ .

Всем трем требованиям удовлетворяет любая из следующих случайных величин, связанных с ПССП (или ССП) в исследуемом временном интервале  $\tau = t_j - t_i$ :

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_k}{\partial t}, \quad \xi_i'' = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \xi_i^{(n)} = \frac{\partial^n \xi_i}{\partial t^n}. \quad (\text{П1.27})$$

Однако эти случайные величины характеризуют ПССП (или ССП) не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция  $\xi(t)$  (рис. П1.1) в интервале  $\tau = t_j - t_i$  при  $\tau < \tau_{\text{кор}}$  (где  $\tau_{\text{кор}}$  – интервал корреляции случайного процесса) может быть разложена в ряд Тейлора-Маклорена

$$\xi(t_j) = \xi(t_i) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \dots + \frac{\xi^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n + \dots \quad (\text{П1.28})$$

Запишем выражение (П1.28) в следующем виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_i + \frac{\xi''_i}{2!} \tau + \dots + \frac{\xi_i^{(n)} \tau^{n-1}}{n!} + \dots \quad (\text{П1.29})$$

где  $\xi(t_i) = \xi_i$ ,  $\xi(t_j) = \xi_j$ .

Так же, как в (П1.20), устремим  $\tau$  к нулю, при этом (П1.29) сводится к тождеству

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_k, \quad (\text{П1.30})$$

где  $\xi_k = \xi(t_k)$  (смотрите рис. П1.1).

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом временном интервале  $[t_i = t_k - \tau/2; t_j = t_k + \tau/2]$ , при  $\tau \rightarrow 0$ , является первая производная исходного случайного процесса  $\xi'_k = \xi'(t_k)$  в сечении  $t_k$ . Следовательно, остается положить, что случайная величина  $q$  в выражениях (П1.23) – (П1.26) линейно связана только с  $\xi'_k$ , т. е.

$$q = \frac{\xi'_k}{\eta}, \quad (\text{П1.31})$$

где  $1/\eta$  – размерный коэффициент пропорциональности.

*Дополнительный аргумент:* каждой экспоненте, например, из интеграла (П1.24) соответствует гармоническая функция с частотой  $q$

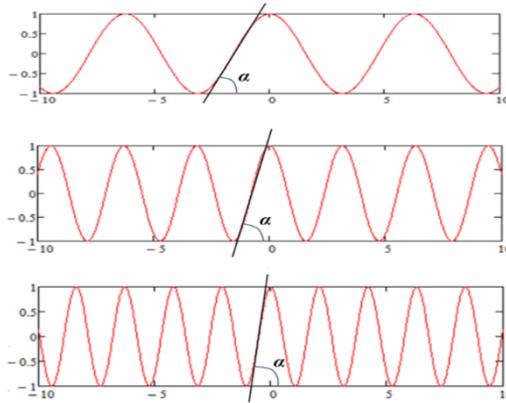
$$\exp\{-iq\xi(t)\} \rightarrow \xi_k(t) = A \sin(qt), \quad (\text{П1.32})$$

это одна из гармонических составляющих случайного процесса  $\xi(t)$ . При этом каждой частоте  $q$ , в свою очередь, соответствует тангенс угла наклона касательной линии к гармонической функции с данной частотой (рис. П1.2), то есть  $q \sim \text{tg}\alpha = \xi'(t)$ .

Действительно, продифференцировав гармоническую функцию (П1.32), получим связь  $\xi'_k(t) = qA \cos(qt)$ , откуда следует

$$q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi'_k}{A \cos(qt)} = \frac{\xi'_k}{A}. \quad (\text{П1.33})$$

При  $A = \eta$ , выражения (П1.31) и (П1.33) совпадают.



**Рис. П1.2** Чем больше частота гармонической функции, тем больше угол  $\alpha$  между касательной к этой функции и осью  $t$

Подставляя (П1.31) в (П1.23) – (П1.26), получим следующую искомую процедуру получения ФПРВ производной  $\rho(\xi', t)$  псевдо-стационарного случайного процесса (ПССП)  $\xi(t)$  в любом сечении  $t_k$  при известной одномерной ФПРВ  $\rho(\xi, t)$  в том же сечении:

1. Заданная одномерная ФПРВ  $\rho(\xi, t)$  представляется в виде произведения двух ПАВ  $\varphi(\xi)$ :

$$\rho(\xi, t) = \varphi(\xi, t)\varphi(\xi, t). \quad (\text{П1.34})$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$w(\xi', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) \exp\{i\xi'\xi/\eta\} d\xi, \quad (\text{П1.35})$$

$$w^*(\xi', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) \exp\{-i\xi'\xi/\eta\} d\xi. \quad (\text{П1.36})$$

3. Окончательно для произвольного сечения ПССП (или ССП) получим искомую ФПРВ производной

$$\rho(\xi', t) = w(\xi', t)w^*(\xi', t) = |w(\xi', t)|^2. \quad (\text{П1.37})$$

*Еще раз отметим, что процедура (П1.34) – (П1.37) может быть применима, к любым стационарным и псевдо-стационарным случайным процессам  $\{t.e. \text{ случайным процессам с медленно изменяющейся со временем ФПРВ } \rho(\xi, t)\}$ , для которых при  $\tau \rightarrow 0$   $\delta$ -функция принимает вид (П1.20).*

Для выяснения физического смысла величины  $\eta$  воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небызупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить конкретный, практически важный результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский случайный процесс  $\zeta(t)$ . При этом в каждом сечении этого процесса случайная величина  $\zeta$  распределена по гауссовому закону:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi - a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}, \quad (\text{П1.38})$$

где  $\sigma_\xi^2$  и  $a_\xi$  – дисперсия и математическое ожидание данного процесса  $\zeta(t)$ .

Осуществляя с ФПРВ (П1.38) последовательность операций (П1.34) – (П1.37), получим ФПРВ производной этого случайного процесса

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\eta/2\sigma_\xi]^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2[\eta/2\sigma_\xi]^2}\right\}. \quad (\text{П1.39})$$

С другой стороны, с помощью известной процедуры (П1.4) – (П1.7) для аналогичного случая получим [43]

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2\sigma_{\xi'}^2}\right\}, \quad (\text{П1.40})$$

где  $\sigma_{\xi'} = \sigma_\xi / \tau_{\text{cor}}$ ,

здесь  $\tau_{\text{cor}}$  – интервал автокорреляции исходного случайного процесса  $\zeta(t)$ .

Сравнивая ФПРВ (П1.39) и (П1.40), находим, что при

$$\eta = \frac{2\sigma_\xi^2}{\tau_{\xi \text{ cor}}} \quad (\text{П1.41})$$

они полностью совпадают.

*Выражение (П1.41) получено для гауссовского случайного процесса, но среднеквадратическое отклонение  $\sigma_\xi$  и интервал автокорреляции  $\tau_{\xi \text{ cor}}$  – это основные характеристики любого стационарного случайного процесса. Все*

остальные начальные и центральные моменты в случае негауссового распределения случайной величины  $\zeta(t)$  дадут незначительный вклад в выражение (П1.41). Поэтому с высокой степенью достоверности можно утверждать, что выражение (П1.41) применимо для большого класса стационарных и псевдо-стационарных случайных процессов.

В квантовой механике для перехода от координатного представления волновой функции пико-частицы к ее импульсному представлению применяется процедура

$$\varphi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{ip_x x / \hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{imx'x / \hbar\} dx, \quad (\text{П1.42})$$

$$\varphi^*(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{-ip_x x / \hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{-imx'x / \hbar\} dx, \quad (\text{П1.43})$$

где  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж/Гц – редуцированная постоянная Планка, а также учтено, что  $x$ -компонента импульса частицы  $p_x$  связана с ее скоростью  $v_x$  (т.е. производной ее координаты по времени)

$$p_x = mv_x = m \frac{dx}{dt} = mx', \quad (\text{П1.45})$$

В случае когда

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{x\text{cor}}} = \frac{\hbar}{m} \quad \text{с размерностью (м}^2\text{/с)}, \quad (\text{П1.46})$$

процедуры (П1.34) – (П1.37) и (П1.42) – (П1.43) полностью совпадают.

Из выражения (П1.46) следует, что постоянная Планка может быть выражена через основные усредненные параметры стационарного (или псевдо-стационарного) случайного процесса  $\sigma_x$  и  $\tau_{x\text{cor}}$ , в котором участвует хаотически блуждающая пико-частица (например, электрон).

Вместе с тем область применения процедуры (П1.42) – (П1.43) ограничена малостью редуцированной постоянной Планка  $\hbar$ , тогда как процедура (П1.34) – (П1.37) может быть применена для случайных стационарных и

псевдо-стационарных процессов любого масштаба. К таким случайным процессам можно отнести хаотические колебания центра масс ядра биологической клетки, хаотические перемещения кончика ветки дерева, хаотическое изменение места положения центра масс ядра планеты и т.д.

Отметим следующие промежуточные результаты:

1]. Для стационарного и псевдо-стационарного случайного процесса  $\zeta(t) = x(t)$  может быть применима следующая процедура получения ФПРВ  $\rho(x')$  производной этого процесса.

Заданная одномерная ФПРВ  $\rho(x)$  стационарного процесса (или медленно изменяющаяся ФПРВ  $\rho(x,t)$  псевдо-стационарного процесса) представляется в виде произведения двух ПАВ  $\psi(x)$  или  $\psi(x,t)$  :

$$\rho(x) = \psi(x)\psi(x) \quad \text{или} \quad \rho(x,t) = \psi(x,t)\psi(x,t). \quad (\text{П1.47})$$

а) Для стационарного случайного процесса осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{ix'x/\eta_x\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{iv_x x/\eta_x\} dx, \quad (\text{П1.48})$$

$$\varphi^*(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{-ix'x/\eta_x\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp\{-iv_x x/\eta_x\} dx, \quad (\text{П1.49})$$

и определяется искомая ФПРВ производной данного процесса

$$\rho(x') = \varphi(x')\varphi^*(x') = |\varphi(x')|^2. \quad (\text{П1.50})$$

$$\text{или} \quad \rho(v_x) = \varphi(v_x)\varphi^*(v_x) = |\varphi(v_x)|^2 \quad (\text{П1.51})$$

$$\text{где} \quad \eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = \frac{\hbar}{m} \quad (\text{П1.52})$$

$\sigma_x$  – среднеквадратичное (стандартное) отклонение исходного стационарного случайного процесса  $x(t)$  от среднего значения;

$\tau_{xcor}$  – интервал автокорреляции данного процесса.

В в § 2.6 статьи [44, [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527)] применена процедура (П1.47) – (П1.51) для получения ФПРВ  $\rho(x')$  производной стационарных случайных

процессов с законами распределения: Гаусса, равномерным, Лапласа, Коши и синусоидальным.

б) Для псевдо-стационарного случайного процесса выполняются два преобразования Фурье

$$\varphi(x', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\{ix'x/\eta_x(t)\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\{iv_x x/\eta_x(t)\} dx, \quad (\text{П1.53})$$

$$\varphi^*(x', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\{-ix'x/\eta_x(t)\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\{-iv_x x/\eta_x(t)\} dx. \quad (\text{П1.54})$$

и определяется искомая ФПРВ производной данного процесса в каждый момент времени  $t$

$$\rho(x', t) = \varphi(x', t)\varphi^*(x', t) = |\varphi(x', t)|^2. \quad (\text{П1.55})$$

или 
$$\rho(v_x, t) = \varphi(v_x, t)\varphi^*(v_x, t) = |\varphi(v_x, t)|^2, \quad (\text{П1.56})$$

где 
$$\eta_x(t) = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{x\text{cor}}(t)} = \frac{\hbar}{m(t)} \quad (\text{П1.57})$$

$\sigma_x(t)$  – среднеквадратичное (стандартное) отклонение исходного псевдо - стационарного случайного процесса  $x(t)$  от его среднего значения в момент времени  $t$ ;

$\tau_{x\text{cor}}(t)$  – интервал автокорреляции данного процесса в момент времени  $t$ .

2]. Процедура (П1.47) – (П1.52) с точностью до коэффициента пропорциональности  $\eta$  совпадает с квантово-механической процедурой (П1.42) – (П1.43) перехода от координатного представления к импульсному. Но квантово-механическая процедура (П1.42) – (П1.43) получена с привлечением весьма неочевидной (экзотической) гипотезы о возможном существовании волн материи Луи де Бройля (которые так и небыли обнаружены). Тогда как процедура (П1.47) – (П1.52) получена на основании подробного анализа дифференцируемого случайного процесса с единственным предположением (который может быть подвергнут сомнению), что дельта-функция  $\delta(x_j - x_i)$

имеет вид (П1.20). В связи с этим интересно проанализировать, к каким процедурам перехода от ФПРВ  $\rho(x)$  к ФПРВ  $\rho(x')$  могут привести другие виды  $\delta$ -функции?

Также нет необходимости использовать гипотезу Луи де Бройля о существовании волн материи для описания дифракции частиц на кристалле. В статье [44, [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527)] показано, что на основании законов геометрической оптики и теории вероятностей получена формула для расчёта объемных диаграмм рассеяния частиц на многослойной периодической поверхности кристалла.

3] В случае изучения хаотического поведения пико-частиц, отношение  $\hbar/m$  может быть выражено через основные характеристики исследуемого случайного процесса (П1.46). На взгляд автора, это очень важный результат, т.к. оценить реальную массу подвижной элементарной частицы практически невозможно. Напомним, что в физических справочниках приведены только массы покоя элементарных частиц, которые определены косвенно на основании сложных экспериментов. Тогда как получить оценку стандартного отклонения  $\sigma_x$  и интервала автокорреляции  $\tau_{x\text{ cor}}$  случайно блуждающей частицы гораздо проще. Важно так же, что редуцированная постоянная Планка  $\hbar$  теряет фундаментальный характер и оказывается размерным коэффициентом пропорциональности между массой частицы и отношением усредненных характеристик случайного процесса  $\sigma_x$  и  $\tau_{x\text{ cor}}$ , в котором эта частица участвует.

## Приложение 2

### **П2 Координатное представление характеристик хаотически блуждающей частицы (ХБЧ)**

#### **П2.1 Координатное представление усредненной скорости ХБЧ**

Для стационарного и псевдо-стационарного случайных процессов (смотрите Приложение 1) докажем справедливость равенств

$$\begin{aligned} \overline{x^n} &= \overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') x'^n dx'_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x) v_x^n dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_x) v_x^n \phi(v_x) dv_x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \pm i \eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

и (П2.2)

$$\begin{aligned} \overline{x'^n(t)} &= \overline{v_x^n(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x', t) x'^n dx'_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x, t) v_x^n dv_x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_x, t) v_x^n \phi(v_x, t) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left( \pm i \eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx, \end{aligned}$$

где  $n$  – целая, положительная степень;  $\eta_x$  – масштабный параметр (A1.52).

Специалистам в области квантовой механики хорошо известно доказательство аналогичного выражения

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(p_x) p_x^n dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_x) p_x^n \varphi(p_x) dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx,$$

смотрите, например, [45]. Однако в виду важности данного доказательства для данной статьи приведем его в несколько измененном виде, применительно к особенностям не зависящей от массы частицы стохастической квантовой механики.

Воспользуемся преобразованиями Фурье (П1.48) и (П1.49)

$$\phi(v_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{\frac{i v_x x}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{\frac{i p_x x}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} dx, \quad (\text{П2.3})$$

$$\phi^*(v_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-\frac{i v_x x}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-\frac{i p_x x}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} dx. \quad (\text{П2.4})$$

Подставим интегралы (П2.3) и (П2.4) в третью часть равенства (П2.1)

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \frac{e^{-\frac{i v_x x_i}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{\frac{1}{2}}} dx_i v_x^n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_j) \frac{e^{\frac{i v_x x_j}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{\frac{1}{2}}} dx_j \right] dv_x. \quad (\text{П2.5})$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$v_x^n e^{\frac{i v_x x_j}{\eta_x}} = \left( -i \eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n e^{\frac{i v_x x_j}{\eta_x}}, \text{ или } p_x^n e^{\frac{i p_x x_j}{\hbar}} = \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n e^{\frac{i p_x x_j}{\hbar}}. \quad (\text{П2.6})$$

$$v_x^n e^{-\frac{i v_x x_i}{\eta_x}} = \left( i \eta_x \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n e^{-\frac{i v_x x_i}{\eta_x}}, \text{ или } p_x^n e^{\frac{i p_x x_i}{\hbar}} = \left( i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n e^{-\frac{i p_x x_i}{\hbar}}. \quad (\text{П2.6a})$$

Перепишем (П2.5) с учетом (П2.6)

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) e^{-i\frac{v_x x_i}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_j) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^n e^{i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} dx_j \right] dv_x.$$

или с учетом (П2.6а) (П2.7)

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \left(i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n e^{-i\frac{v_x x_i}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_j) e^{i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} dx_j \right] dv_x$$

(П2.7а)

Проинтегрируем второй интеграл в подынтегральном выражении (П2.7)  $n$  раз по частям, при этом будем предполагать, что  $\psi(x)$  и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования  $x = \pm \infty$ . Выполняя данные действия с выражением (П2.7), получим [45]

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) e^{-i\frac{v_x x_i}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^n \psi(x_j) dx_j \right] dv_x,$$

или (П2.8)

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^n \psi(x_j) dx_j \right] dv_x.$$

(П2.9)

Аналогично проинтегрируем первый интеграл в подынтегральном выражении (П2.7а)  $n$  раз по частям, при этом будем предполагать, что  $\psi(x)$  и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования  $x = \pm \infty$ . Выполняя данные действия с выражением (П2.7а), получим

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{v_x x_i}{\eta_x}} \left(i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n \psi(x_i) dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} \psi(x_j) dx_j \right] dv_x,$$

или (П2.8а)

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \left(i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n \psi(x_j) e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \right] dv_x,$$

(П2.9а)

Изменим в (П2.9) и (П2.9а) порядок интегрирования, т.е. сначала будем интегрировать по  $v_x$  [45]

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \psi(x_i) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dv_x.$$

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \psi(x_j) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \psi(x_i) \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dv_x.$$

В этих выражениях присутствует дельта-функция (П2.10)

$$\delta(x_j - x_i) = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dv_x \text{ типа } \delta(x_j - x_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(x_j-x_i)} dq.$$

Поэтому представим их в виде [45]

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \left( -i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \delta(x_j - x_i) dx_j. \quad (\text{П2.11})$$

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \left( i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \delta(x_j - x_i) dx_j. \quad (\text{П2.11a})$$

Используя свойства  $\delta$ -функции, окончательно запишем

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left( \mp i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx, \quad (\text{П2.12})$$

где 
$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = \text{constant}. \quad (\text{П2.12a})$$

таким образом, выражение (П2.1) доказано для случая стационарного случайного процесса (ССП).

Для псевдо-стационарного случайного процесса (ПССП) выражение (П2.2) доказывается аналогично. Выполняя операции подобные (П2.5) – (П2.12) с использованием преобразований (П1.53) и (П1.54), получим

$$\overline{v_x^n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left( \mp i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx. \quad (\text{П2.13})$$

где 
$$\eta_x \approx \eta_x(t) = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{xcor}(t)} \approx \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = \text{constant}. \quad (\text{П2.13a})$$

В общем случае масштабный параметр (П1.57) может изменяться со временем  $\eta_x(t)$ . Однако во многих нестационарных стохастических системах он остается неизменным, поскольку дисперсия  $\sigma_x^2(t)$  и радиус автокорреляции  $\tau_{xcor}(t)$  псевдо-стационарного случайного процесса (ПССП) изменяются одновременно и пропорционально по отношению друг к другу. Например, возможна ситуация, когда дисперсия ПССП изменяются со временем по закону

$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 \times (t - t_0)$ , и его коэффициент автокорреляции изменяется по тому же закону  $\tau_{xcor}(t) = \tau_{xcor} \times (t - t_0)$ , тогда

$$\eta_x(t) = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{xcor}(t)} \approx \frac{2\sigma_x^2 \times (t-t_0)}{\tau_{xcor} \times (t-t_0)} \approx \eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xcor}} = const. \quad (\text{П2.14})$$

Неизменное соотношение основных усредненных характеристик исследуемого случайного процесса будем называть: «Законом пропорционального постоянства масштабного параметра стохастической системы».

## П2.2 Координатное представление усредненного изменения механической энергетичности хаотически блуждающей частицы

Рассмотрим случай, когда изменение амплитуды вероятности  $\psi(x,t)$  связано с изменением кинетической энергетичности ХБЧ.

Вернемся к рассмотрению условной ФПРВ (П1.19)

$$\rho(x_j, t_j / x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(x_j - x_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \quad (\text{П2.15})$$

где согласно (П1.31) при выполнении условия (П2.14)

$$q = \frac{x'}{\eta_x} = \frac{v_x}{\eta_x}. \quad (\text{П2.16})$$

При  $\Delta x = x_j - x_i \rightarrow 0$  из выражения (П2.16) получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(x_j, t_j / x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{v_x^2}{\eta_x^2} B(t_j - t_i)\right\} dv_x. \quad (\text{П2.17})$$

Учтем, что 
$$\frac{v_x^2}{2} = k_x, \quad (\text{П2.18})$$

где  $k_x$  –  $x$ -кинетическая энергетичность частицы, согласно терминологии масс-независимой физики (14) – (16), т.е. физики, освобожденной от эвристического понятия «масса».

Также примем во внимание, что для некоторых стохастических процессов без трения следует положить, что коэффициент самодиффузии  $B$  является комплексной величиной, т.е.

$$B = iD. \quad (\text{П2.19})$$

*\*\*Коэффициент самодиффузии  $B$  является комплексным потому, что рассматриваемая ХБЧ попеременно диффундирует в окружающей ее хаотически флуктуирующей среде то в прямом, то в обратном направлении в окрестности условного центра стохастической системы (рис. 1). Такое колебательное поведение ХБЧ обусловлено тем, что она одна и на нее не оказывается давление со стороны подобных ей частиц. Самодиффузия ХБЧ происходит только за счет усредненного избытка (или недостатка) хаотического обмена кинетической энергичностью (т.е. интенсивностью движения) между ХБЧ и окружающей средой.*

*В общем случае  $B = e^{-(\mu_0 - i\mu)} = D e^{i\mu} = D [\cos(\mu) + i \sin(\mu)]$ , где  $\mu_0$  и  $\mu$  – параметры комплексной самодиффузии,  $D = e^{-\mu_0}$ . В частном случае, при  $\mu = \pi/2$  получается, что  $B = iD$ . При  $D = \eta_x$  рассматриваемая стохастическая система оказывается самосогласованной.*

Используя выражения (П2.18) и (П2.19), запишем уравнение (П2.17) в следующем виде

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(x_j, t_j/x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i \frac{v_x^2}{2} \frac{2D}{\eta_x^2} (t_j - t_i)\right\} dv_x. \quad (\text{П2.20})$$

Подставим (П2.20) в выражение подобное (П.1.17) (П2.21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_i) \left[ \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i \frac{v_x^2}{2} \frac{2D}{\eta_x^2} (t_j - t_i)\right\} dv_x \right] \psi(x, t_j) dt_i dt_j = 1$$

и поменяем порядок интегрирования (П2.22)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_i) \frac{1}{2\pi\eta_x} \exp\left\{-i \frac{v_x^2}{2} \frac{2D}{\eta_x^2} (t_j - t_i)\right\} \psi(x, t_j) dt_i dt_j \right] dv_x = 1.$$

Запишем (П2.22) аналогично (П1.22) (П2.23)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_j) \exp\left\{-i \frac{v_{xj}^2}{2} \frac{2D}{\eta_x^2} t_j\right\} dt_j \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_i) \exp\left\{i \frac{v_{xi}^2}{2} \frac{2D}{\eta_x^2} t_i\right\} dt_i \right] dv_x = 1.$$

Из выражения (П2.23) с учетом выражения (П2.18), по аналогии с (П1.22) – (П1.25), следуют два преобразования Фурье

$$\phi(k_{xj}, t_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_j) \exp\left\{-i k_{xj} \frac{2D}{\eta_x^2} t_j\right\} dt_j \quad (\text{П2.24})$$

$$\phi(k_{xi}, t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_i) \exp\left\{i k_{xi} \frac{2D}{\eta_x^2} t_i\right\} dt_i \quad (\text{П2.25})$$

Изменение механической энергичности ХБЧ  $\varepsilon_{kx}$  из-за изменения ее кинетической энергичности в точке  $x$  в промежуточный момент времени  $t = (t_j + t_i)/2$  при  $\tau = t_i - t_j \rightarrow 0$  (стремящемся к нулю) в среднем равно

$$\varepsilon_{kx} = \lim_{\tau \rightarrow 0} (k_{xj} + k_{xi})/2. \quad (\text{П2.26})$$

Поэтому вместо интегралов (П2.24) и (П2.25) для любого промежуточного момента времени  $t$  можно записать

$$\phi(\varepsilon_{kx}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\left\{-i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t\right\} dt, \quad (\text{П2.27})$$

$$\phi^*(\varepsilon_{kx}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp\left\{i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t\right\} dt. \quad (\text{П2.28})$$

Согласно выражению (51), глобально усредненное изменение {увеличение (+) или уменьшение (-)} механической энергетичности ХБЧ равно

$$\pm \overline{\varepsilon_k(x, t)} = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} d\varepsilon_{kx} = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} \phi^*(\varepsilon_{kx}, t) d\varepsilon_{kx}, \quad (\text{П2.29})$$

где  $\varepsilon_{kx}$  – локальное изменение механической энергетичности ХБЧ из-за небольшого изменения его кинетической энергетичности в направлении оси  $X$ ;

$\rho(\varepsilon_{kx}, t)$  – функция плотности распределения вероятностей (ФПРВ) изменений  $\varepsilon_{kx}$ .

Для того, чтобы представить выражение (П2.29) в координатном представлении выполним действия аналогичные (П2.1) – (П2.13), с учетом преобразований Фурье (П2.27) – (П2.28) и справедливости выражений

$$\varepsilon_{kx}^n e^{i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t} = \left(-i \frac{\eta_x^2}{D} \frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t}, \quad (\text{П2.30})$$

$$\varepsilon_{kx}^n e^{-i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t} = \left(i \frac{\eta_x^2}{D} \frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{-i \frac{D}{\eta_x^2} \varepsilon_{kx} t}.$$

В результате получим координатное представление глобально усредненного изменения механической энергетичности ХБЧ за счет изменения ее усредненной кинетической энергетичности

$$\overline{\varepsilon_k(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_{kx}, t) \varepsilon_{kx} d\varepsilon_{kx} = \pm i \frac{\eta_x^2}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx. \quad (\text{П2.31})$$

Доказательство справедливости выражения (П2.31) полностью совпадает с доказательством выражения (П2.13).

Аналогичность доказательств выражений (П2.13) и (П2.31) соответствует пространственно-временной симметрии между  $p_{x\dot{x}}$  и  $E_{x\dot{t}}$  (или  $v_{x\dot{x}}$  и  $\varepsilon_{x\dot{t}}$ ) в волновой функции Луи де Бройля

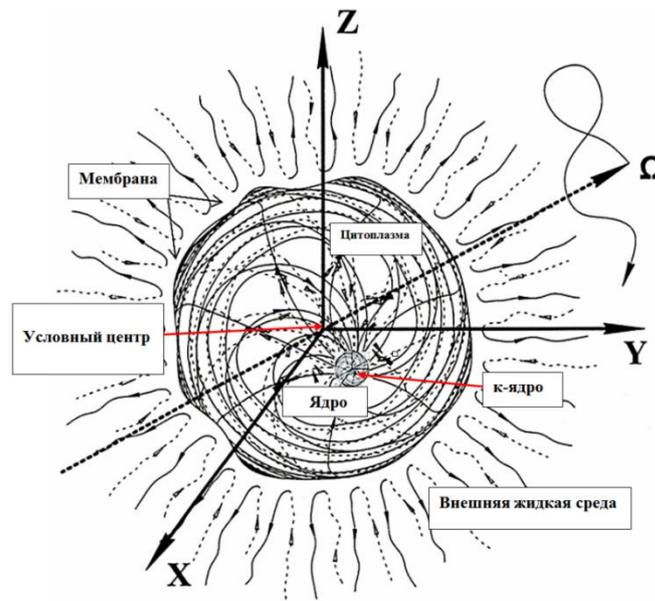
$$\psi = \exp\{-i(p_{x\dot{x}} - E_{x\dot{t}})/\hbar\} = \exp\{-i(v_{x\dot{x}} - \varepsilon_{x\dot{t}})m/\hbar\} = \exp\{-i(v_{x\dot{x}} - \varepsilon_{x\dot{t}})\eta_x\},$$

которая лежит в основе классической квантовой механики.

### Приложение 3

#### П3 Квантованные состояния ядра биологической клетки

Масс-независимая стохастическая квантовая механика (МСКМ), предлагаемая в этой статье, пригодна для описания квантовых эффектов не только на уровне элементарных частиц, но и на микро- и макроуровнях окружающего нас мира. В качестве примера используем уравнение (41) для исследования усредненного поведения хаотически колеблющегося ядра биологической клетки (смотрите рис. П3.1).



**Рис. П3.1** Упрощенная модель эукариотической биологической клетки с явно выраженным клеточным ядром (к-ядром), которое непрерывно хаотически блуждает в окрестности

условного центра, таким образом, что ее полная механическая энергия  $E$  (точнее энергетичность  $\varepsilon$ ) всегда остается постоянной ( $E = m\varepsilon = \text{const}$ )

Рассмотрим живую эукариотическую биологическую клетку в период между ее делением (т.е. в состоянии интерфазы).

Пусть состояние интерфазы рассматриваемой клетки продолжается весь период наблюдения за хаотически колеблющимся клеточным ядром (далее к-ядром). При этом полная механическая энергетичность к-ядра остается постоянной

$$\varepsilon_n = \langle \varepsilon_n \rangle = \langle t_n(x, y, z, t) \rangle + \langle u_n(x, y, z, t) \rangle = \text{const}, \quad (\text{ПЗ.1})$$

где  $\varepsilon_n = E_n(x, y, z, t)/m_n$  – полная механическая энергетичность к-ядра (здесь  $m_n$  – масса к-ядра);

$t_n(x, y, z, t) = T_n(x, y, z, t)/m_n$  – кинетическая энергетичность к-ядра;

$u_n(x, y, z, t) = U_n(x, y, z, t)/m_n$  – потенциальная энергетичность к-ядра.

Рассматриваемый случайный процесс с участием к-ядра полностью соответствует стохастической модели, описанной в § 2.1, а условие (ПЗ.1) совпадает с условием (40). Поэтому для описания усредненных состояний хаотически колеблющегося к-ядра может быть использовано стационарное стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона (41)

$$\frac{\eta_n^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + [\langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle - \langle u(\vec{r}) \rangle] \psi(\vec{r}) = 0, \quad (\text{ПЗ.2})$$

где 
$$\eta_n = \frac{2\sigma_{nr}^2}{\tau_{nr}} \quad (\text{ПЗ.3})$$

– масштабный параметр;

$$\sigma_{nr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2} \quad (\text{ПЗ.4})$$

– среднеквадратичное отклонение хаотически колеблющегося к-ядра от условного центра (рис. ПЗ.1);

$$\tau_{nr} = \frac{1}{3} (\tau_{nx} + \tau_{ny} + \tau_{nz}) \quad (\text{ПЗ.5})$$

- усредненный интервал автокорреляции рассматриваемого трехмерного стационарного случайного процесса, в котором участвует хаотически колеблющееся  $k$ -ядро.

Рассмотрим случай, когда упругие натяжения цитоплазмы  $\sigma_v$ , окружающей  $k$ -ядро, в среднем увеличиваются пропорционально удалению  $k$ -ядра от условного центра

$$\sigma_v(x) \approx k_u r, \quad (\text{ПЗ.6})$$

где  $k_u = K_u/m_n$  – безкилограммный коэффициент упругого натяжения цитоплазмы ( $K_u$  – силовая константа цитоплазмы),

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – расстояние от условного центра до  $k$ -ядра (рис. ПЗ.1);

В этом случае усредненная потенциальная энергетичность  $k$ -ядра, стремящееся его вернуть в исходное положение, может быть приближенно представлена в виде

$$\langle u_n(r) \rangle \approx - \int k_{ux} r dr = -\frac{1}{2} k_u r^2. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Подставляя выражение (ПЗ.7) в уравнение (ПЗ.2), получим известное в квантовой механике уравнение изотропного трехмерного гармонического осциллятора [47]

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \frac{2}{\eta_{nr}^2} \left[ \varepsilon_n - \frac{k_u r^2}{2} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (\text{ПЗ.8})$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\nabla_{\theta, \varphi}^2}{r^2} \quad (\text{ПЗ.9})$$

– оператор Лапласа в сферических координатах, где оператор  $\nabla_{\theta, \varphi}^2$  задается выражением (64);

Решениями данного уравнения являются волновые функции [47] (ПЗ.10)

$$\psi_{klm}(r, \theta, \varphi) = R_k(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{nl}} \right)^3 \frac{2^{k+2l+3} k!}{(2k+2l+1)!!} \left( \frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{nl}} \right)^l} r^l \exp\left\{-\frac{\sqrt{k_u} r^2}{2\eta_{nl}}\right\} \times \\ \times L_l^{(l+1/2)} \left( 2\sqrt{\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{nl}}} r^2 \right) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где  $L_l^{(l+1/2)} \left( 2\sqrt{\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{nl}}} r^2 \right)$  – обобщенные полиномы Лагерра;

$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\varphi} P_m(\cos\theta)$  – сферические гармонические функции;

$P_m(\cos\theta) = \frac{d}{2^l l!} (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} + (\xi^2 - 1)$  – присоединенные функции

Лежандра;

$\xi = \cos\theta$ ;

$l$  – орбитальное квантовое число;

$m$  – периферийное квантовое число.

*В атомной квантовой физике число  $m$  называют «магнитным квантовым числом», но это название не подходит для стохастической квантовой механики. Поэтому в данной статье число  $m$  предложено называть «периферийным квантовым числом».*

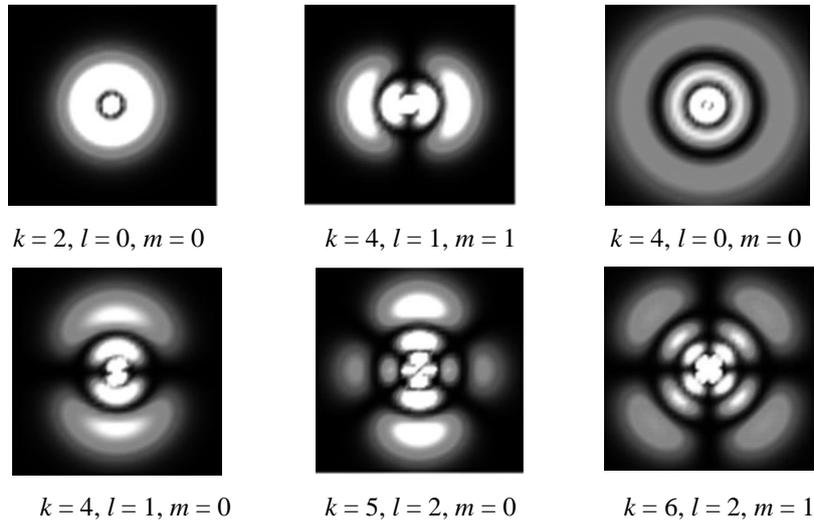
Волновые функции (ПЗ.10) соответствуют собственным значениям полной механической энергетичности к-ядра [47]

$$\varepsilon_{nkl} = \eta_{nr1} \sqrt{k_{ur}} \left( 2k + l + \frac{3}{2} \right) = \eta_{nr1} \sqrt{k_{ur}} \left( N + \frac{3}{2} \right), \quad (\text{ПЗ.11})$$

где  $N = 2k + l$ .

Квадраты модуля волновых функций (ПЗ.10)  $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$  (т.е. ФПРВ возможного места нахождения к-ядра внутри биологической клетки) при  $\varphi = 0$  и различных значениях квантовых чисел  $k$ ,  $l$  и  $m$  показаны на рис. ПЗ.2.

Из рис. ПЗ.2 видно, что каждому набору из трех квантовых чисел  $k$ ,  $l$  и  $m$  соответствует уникальная пространственная конфигурация усредненного состояния хаотического дрожания к-ядра. Это состояние определяется ФПРВ  $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$  места возможного появления к-ядра (точнее его центра масс), внутри биологической клетки).



**Рис. ПЗ.2** Функции плотности распределения вероятности (ФПРВ)  $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$  возможного места нахождения к-ядра при  $\varphi = 0$  и различных значениях квантовых чисел  $k$ ,  $l$  и  $m$ . Чем светлее пятно, тем больше вероятность появления к-ядра в данной области. Расчеты выполнены с использованием выражения (ПЗ.10) [47] и представлены на веб-странице:

[Spherical Harmonic Orbitals.png](#)

*Как известно, имеется еще четвертое спиновое квантовое число  $s$ , которое в рассматриваемом случае, по своей видимости, связано с одним из двух возможных направлений вращения цитоплазмы внутри биологической клетки. Однако данный процесс в этой статье не рассматривается.*

Чтобы экспериментально зафиксировать одну из пространственных конфигураций, показанных на рис. ПЗ.2, необходимо:

- обеспечить отсутствие ощутимого влияния внешних и внутренних силовых факторов на биологическую клетку на весь период наблюдения за к-ядром.

- сделать видеозапись хаотического поведения к-ядра в течение длительного промежутка времени;

- учесть, что клетка в целом может участвовать в сложном тепловом движении; эти движения необходимо устранить физически или исключить программным способом;

- учесть, что к-ядро может менять форму, и его внутреннее содержимое (кариоплазма, хроматин, ядрышко и др.) могут изменяться со временем; это приводит к размыванию границ пространственной конфигурации усреднённого состояния дрожания данной органеллы. Поэтому следует следить не за поведением всего к-ядра, а за хаотическим перемещением только его центра масс. Другими словами, необходимо программным способом выявить геометрический центр к-ядра и следить только за его хаотическими перемещениями.

- оцифрованную, программно-очищенную и математически обработанную видеозапись хаотического поведения геометрического центра к-ядра воспроизвести с большой скоростью, с отображением данного сильно ускоренного процесса на мониторе компьютера. Скорость воспроизведения движения к-ядра должна быть настолько большой, что данная точка должна «размыться» по всей области наблюдения.

- если все вышеуказанные действия удастся выполнить с достаточно высокой разрешающей способностью видеоаппаратуры, максимально чисто и с исключением различных мешающих факторов и воздействий, то в соответствии с изложенной в данной статье гипотезой, на экране монитора должна выявляться конфигурация темных и светлых пятен (наподобие одной из конфигураций пятен, показанных на рис. ПЗ.3). При этом темное пятно на экране монитора должно означать, что в этом месте к-ядро появлялось чаще, чем в том месте, где образовалось светлое пятно.

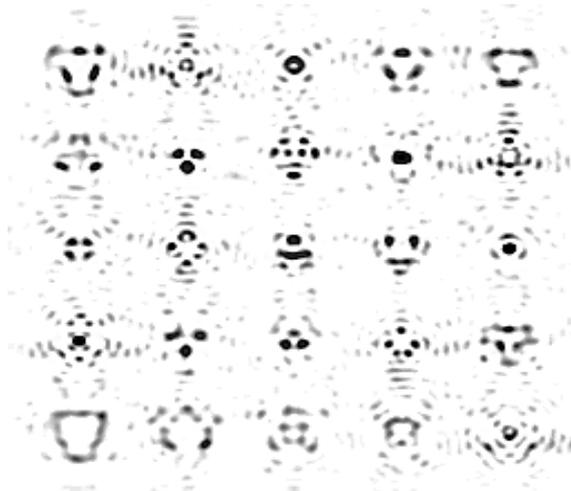
Возможно, что конфигурация данных темно-светлых пятен окажется соответствующей одной из собственных волновых функций  $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)$

(точнее ФПРВ  $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$ ) изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора (т.е. негативу конфигураций, показанных на рис. ПЗ.2).

С помощью звуковых колебаний с резонансной частотой (т.е. с частотой близкой к собственной частоте колебаний рассматриваемого изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора)

$$f_{0x} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi\tau_{nr}} \quad (\text{ПЗ.12})$$

можно повлиять на к-ядро, тем самым изменить усредненное состояние хаотического дрожания его центра масс (т.е. к-ядра). После этого следует повторить все вышеуказанные действия для выявления другой конфигурации темно-светлых пятен, соответствующих более возбужденному состоянию к-ядра.



**Рис. ПЗ.3.** Примеры возможных конфигураций темно-светлых пятен, которые могут быть выявлены в результате усреднения хаотического движения (дрожания) к-ядра внутри биологической клетки. Данные конфигурации пятен могут соответствовать собственным волновым функциям  $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)$  (ПЗ.10) с различными наборами трех квантовых чисел  $k$ ,  $l$  и  $m$

Не исключено, что данные колебания необходимо возбуждать одновременно с двух противоположных концов каждого из трех взаимно-перпендикулярных направлений. Это позволит исключить возможность трансляционного смещения к-ядра (или всей клетки в целом) из-за одностороннего воздействия.

Если изложенные выше основы масс-независимой стохастической квантовой механики (МСКМ) органелл биологической клетки окажутся верными, то квантовый переход к-ядра из одного усредненного состояния в другое его состояние (т.е. скачкообразное изменение конфигурации темно-светлых пятен на экране монитора), должен происходить при передаче данному к-ядру дополнительной полной механической энергетичности

$$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{nk} - \varepsilon_{nk+j}, \quad (\text{ПЗ.13})$$

где  $\varepsilon_{nk}$  – полная механическая энергетичность к-ядра в состоянии  $k$ ;

$\varepsilon_{nk+j}$  – полная механическая энергетичность к-ядра в состоянии  $k+j$

(здесь  $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

В этом отношении масс-независимой статистическая квантовая биофизика ( $\sim 10^{-3}$  см) не должна отличаться от квантовой физики элементарных частиц ( $\sim 10^{-13}$  см). Разница заключается только в масштабах рассматриваемых процессов, которые отличаются друг от друга примерно на 10 порядков. Между тем в современном научном сообществе нет сомнений, что квантовая механика применима для описания процессов в промежуточных масштабах, т.е. на молекулярном уровне ( $\sim 10^{-8}$  см). Например, квантово-механическими методами описываются осцилляции атомной решетки (фононы), молекулярные вибрации и т.д.

Искусственный перевод органеллы (в частности, к-ядра) биологической клетки в возбужденное состояние, может иметь практическое значение. Например, не исключено, что генетическому материалу (ДНК и/или РНК) вирусов будет сложнее проникать внутрь к-ядра через его ядерные поры, если оно находится в одном из возбужденных состояний (смотрите рис. ПЗ.3). Поэтому возможно, что способ звукового или иного механического воздействия на ядро и/или другие органеллы клетки окажется эффективным способом борьбы с вирусной инфекцией.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. E. Schrödinger "*Quantisierung als Eigenwertproblem, Vierte Mitteilung*", *Annalen der Physik*, №18 (1926).
2. E. Nelson *Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics*. *Phys. Rev.* **150** (4): 1079–1085, (1966) [doi:10.1103/physrev.150.1079](https://doi.org/10.1103/physrev.150.1079).
3. E. Nelson *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1967) [zbMATH](#) [Google Scholar](#).
4. E. Nelson *Quantum fluctuations*. Princeton: Princeton University Press (1985)
5. R. Furth "*On certain relations between classical Statistics and Quantum Mechanics*" *Zeitschrift für Physik* **81**, 143 (1933) [arXiv: 2006.03740](https://arxiv.org/abs/2006.03740) .
6. I. Fenyés *Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik*, *Zeitschrift für Physik*, **132**, 81- 106 (1952).
7. W. Weizel *Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen, kausal determinierten Modell*. (German) *Z. Physik* **134**, 264–285 (1953).
8. M. Pavon *Stochastic mechanics and the Feynman integral*. *J. Math. Phys.* **41** (9): 6060–6078 (2000) [arXiv:quant-ph/0007015](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0007015). [doi:10.1063/1.1286880](https://doi.org/10.1063/1.1286880).
9. R. Tsekov "*Bohmian Mechanics versus Madelung Quantum Hydrodynamics*". *Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.* **SE**: 11219 (2012) [arXiv:0904.0723](https://arxiv.org/abs/0904.0723), [doi:10.13140/RG.2.1.3663.8245](https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3663.8245).
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Механика*. Наука, Москва (1988) с. 237.
11. Л.Э. Эльсгольц *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. Наука, Москва (1969), с. 424. ([Elsgolts LE VI](#))
12. А.Н. Матвеев *Атомная физика*. Высшая школа, Москва (1989), с. 439, ISBN 5-06-000056-7.
13. N. Rosen *The relation between classical and quantum mechanics*. *Am J Phys* **32**:597–600. (1964) [Google Scholar](#).
14. N. Rosen *Quantum particles and classical particles*. *Found Phys* **16**:687–700. (1986), [Google Scholar](#).

15. R.L.W. Chen *Derivation of the real form of Schrödinger's equation for a non-conservative system and the unique relation between  $\text{Re}(\psi)$  and  $\text{Im}(\psi)$*  Journal of Mathematical Physics **30**, 83 (1989), <https://doi.org/10.1063/1.528593>.
16. V.J.H. Vleck *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*. Proc Natl Acad Sci USA **14**(2):178–188, (1994), [Google Scholar](#)
17. Yang & H. Y. Jick *Derivation of the modified Schrödinger equation for a particle with a spatially varying mass through path integrals* . Phys. Rev. A **50**, 104. (1994).
18. F. Ogiba *Phenomenological Derivation of the Schrödinger Equation*, Progress in Physics, 2011, 4, p. 25-28. 4. Piece P., Another Schrodinger Derivation of the Equation, Eur. J. Phys., 17, (1996), p. 116 - 117.
19. J. Briggs & J.M. Rost *On the derivation of the time-dependent equation of Schrödinger*, Foundations of Physics, 31 (2001), p. 693-712.
20. J. Briggs, S. Boonchui & S. Khemmani (2007) *The derivation of the time-dependent Schrödinger equation*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** 1289-1302.
21. M.J.W. Hall & M. Reginatto *Schrodinger Equation from an Exact Uncertainty Principle*, J. Phys. A, **35** (2002), p. 3289-3303.
22. G. Grössing *Derivation of the Schrödinger Equation and the Klein-Gordon Equation from First Principles*, (2002), [v6] [arXiv:quant-ph/0205047](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205047) .
23. S. Inage *One Approach on Derivation of the Schrodinger Equation of Free Particle*, (2006), [arXiv:physics/0610097](https://arxiv.org/abs/physics/0610097).
24. D.W. Ward, S.M. Volkmer *How to Derive the Schrodinger Equation*. Am.J.Phys./Ward (2008) and [v1] [arXiv:physics/0610121](https://arxiv.org/abs/physics/0610121).
25. C-S. Ricardo *Heuristic Derivation Of The Schrödinger Equation and the Momentum Operator*, (2010), [v2] [arXiv:1004.4935](https://arxiv.org/abs/1004.4935).
26. A. Szepessy *Stochastic and deterministic molecular dynamics derived from the time-independent Schrödinger equation*, (2010), [v5] [arXiv:0812.4338](https://arxiv.org/abs/0812.4338).
27. R.S. Pranab, *Direct Derivation of Schrödinger Equation from Hamilton-Jacobi Equation Using Uncertainty Principle*, Romanian Journal of Physics, 2011, 56(9-10), (2011), p. 1053-1056.

- 
28. J.H. Field *Derivation of the Schrödinger equation from the Hamilton-Jacobi equation in Feynman's path integral formulation of quantum mechanics*. Eur. J. Phys. 32 (2011) 63-87 and [arXiv:1204.0653](https://arxiv.org/abs/1204.0653) .
29. P. Chiarelli) *The Schrödinger equation and its generalized analogs derived by the quantum hydrodynamic representation*. (2012 [v7] [arXiv:1210.1138](https://arxiv.org/abs/1210.1138) .
30. W.P. Schleich, D.M. Greenberger, M.O. Scully *Schrödinger equation revisited*. Proceedings of the National Academy of Sciences (2013), DOI:10.1073/pnas.1302475110 Corpus ID: 26266485
31. L. Nanni *A New Derivation of the Time-Dependent Schrödinger Equation from Wave and Matrix Mechanics*. Advances in Physics Theories and Applications, Vol. 43 (2015) ISSN 2224-719X (Paper) ISSN 2225-0638 (Online) Vol 43, (2015), [v1] [arXiv:1506.03180](https://arxiv.org/abs/1506.03180).
32. N.P. Barde, P.M. Kokne & P. P. Bardapurkar *Deriving time dependent Schrödinger equation from Wave-Mechanics, Schrödinger time independent equation, Classical and Hamilton-Jacobi equations*. Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies ISSN 1583-1078 Issue 26, January-June, (2015), p. 31-4831 [http://lejpt.academicdirect.org/A26/031\\_048.pdf](http://lejpt.academicdirect.org/A26/031_048.pdf).
33. R. Wieser *Derivation of a time dependent Schrödinger equation as quantum mechanical Landau-Lifshitz-Bloch equation*. Eur. Phys. J. B 88, 77 (2015) DOI [10.1088/0953-8984/28/39/396003](https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/39/396003) and [arXiv:1607.06184](https://arxiv.org/abs/1607.06184).
34. M. Godart *Stochastic Theory of Quantum Mechanics*. (2014) [v2] arXiv: 1206.2917.
35. M. Godart *Stochastic theory of quantum mechanics and the Schrödinger equation*. (2016) [v1] [arXiv:1603.08966](https://arxiv.org/abs/1603.08966).
36. L.S.F. Olavo *Quantum Mechanics: Principles, New Perspectives, Extensions and Interpretation (Physics Research and Technology)*. Nova Science Publishers, Incorporated (2016), ISBN: 978-1-63117-450-6.
37. L.S.F. Olavo *Quantum Mechanics as a Classical Theory XV: Thermodynamical Derivation*. (2019), [v2] <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9703006> .
38. J. G. Baixaul *Derivation of the Schrodinger Equation from Classical Physics* International journal of scientific research. (2016) Corpus ID: 124057573.

- 
39. B.A. Faycal *Space-Time Geodesics and the Derivation of Schrödinger's equation*. (2018) [arXiv:1805.03509](https://arxiv.org/abs/1805.03509) .
40. P.-H. Chavanis *Derivation of a generalized Schrödinger equation from the theory of scale relativity*. Eur. Phys. J. Plus, 132, 286 (2017) and [arXiv:1612.02323](https://arxiv.org/abs/1612.02323).
41. X.-S. Wang *Derivation of the Schrödinger equation based on a fluidic continuum model of vacuum and a sink model of particles*. (2018), [arXiv:physics/0610224](https://arxiv.org/abs/physics/0610224).
42. С.М. Рытов *Введение в статистическую радиофизику Ч.1*. Наука, Москва, (1976), с. 494.
43. В.И. Тиханов *Статистическая радиофизика*. Радио и связь, Москва, (1982), с. 622.
44. M. Batanov-Gaukhman *The Diffraction of Microparticles on Single-layer and Multi-layer Statistically Uneven Surfaces*, (2020) [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527).
45. Д.И. Блохинцев *Основы квантовой механики*. Высшая школа, Москва, (1963), с. 620.
46. R.P. Feynman & A.R. Hibbs (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. DOI:[10.1063/1.3048320](https://doi.org/10.1063/1.3048320) Corpus ID: 117361245.
47. D.M. Fradkin *Three-dimensional isotropic harmonic oscillator and SU3*. American Journal of Physics **33** (3) 207–211, (1965), [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_harmonic\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator).
48. L. Arnold *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, (1974).
49. Prigogine, I. & Stengers, I. *Order Out of Chaos*. URSS. (2021). 320 s. ISBN 978-5-354-01695-2.
50. Namsrai, K. (1985). *Nonlocal Quantum Field Theory and Stochastic Quantum Mechanics*. Dordrecht; Boston: D. Reidel Publishing Co. doi:10.1007/978-94-009-4518-0. ISBN 90-277-2001-0.
51. Lindgren, J. & Liukkonen, J. (2019) *"Quantum Mechanics can be understood through stochastic optimization on spacetimes"*. Scientific Reports. 9 (1): 19984. doi:10.1038/s41598-019-56357-3.

- 
52. Koide, T. & Kodama, T. (2018) *Generalization of uncertainty relation for quantum and stochastic systems*. Physics Letters A, Volume 382.
53. Batanov, M.S. (2017) *Excited states of nuclei of spherical vacuum formations (fundamentals of quantum geometrophysics)* // Education and science in modern realities: materials of Intern. scientific - practical. conf. / - Cheboksary: CNS "Interactive Plus", - pp. 17-43. - ISBN 978-5-9500297-9-0. Doi: [10.21661/r-462206](https://doi.org/10.21661/r-462206)
54. Batanov-Gaukhman, M. (2020) *Derivation of the Generalized Time - independent Schrodinger Equation. The New Stochastic Quantum Mechanics: Think and calculate* [arXiv:1702.01880](https://arxiv.org/abs/1702.01880)
55. Courant, R. & Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I (First English ed.). New York: Interscience Publishers, Inc. [ISBN 978-0471504474](https://www.isbn-international.org/product/978-0471504474).
56. Gelfand, I. M. (1963) *Calculus of Variations*. Dover. [ISBN 0-486-41448-5](https://www.isbn-international.org/product/0-486-41448-5).
57. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. Учебное пособие для вузов по спец. «Автоматика и управление в технических системах. – М.: высшая школа, 1989. 263 с.
58. Kuipers, F. (2023). *Stochastic Mechanics: the Unification of Quantum Mechanics with Brownian Motion*, Briefs in Physics (Springer, Cham). [arXiv:2301.05467](https://arxiv.org/abs/2301.05467) .
59. Simon, M. & Kavan, M. (2021). *Tutorial Quantum Stochastic Processes and Quantum non-Markovian Phenomena*. PRX QUANTUM 2, 030201.
60. Tsekov, R. (2017). *On the Stochastic Origin of Quantum Mechanics*. Rep. Adv. Phys. Sci. 1 1750008. [arXiv:1703.00140](https://arxiv.org/abs/1703.00140) .