

## Условия излучения для 2-мерного уравнения Гельмгольца на границе ограниченной области

В.В. Горин.

*vvgorin@mail.ru*

Аннотация. Получены выражения для линейного интегро-дифференциального оператора Дирихле-Неймана на круглой границе расчётной области в случае двумерной краевой задачи с уравнением Гельмгольца. Краевое условие с таким оператором имеет нелокальный характер: нормальная производная решения в данной точке границы линейно зависит не только от значения решения в данной точке, но и от значений решения во всех остальных точках границы. При этом оператор разделяется на аналитическую и расчётную части. Пригодность последней для расчётов подтверждена теоремой об абсолютной и равномерной сходимости определяющего её ряда.

### 1. Введение

Условия излучения Зоммерфельда были сформулированы как асимптотические свойства волны, уходящей от рассеивающего центра на бесконечность. Однако, ввиду конечности вычислительной информации, невозможно строить расчёт краевой задачи в бесконечном пространстве на бесконечной сетке узлов. Поэтому в буквальном смысле условия Зоммерфельда применяются для плоской волны в одномерной задаче рассеяния, либо при рассеянии плоской волны на бесконечной плоской границе. В остальных случаях они представляют собой асимптотический принцип, по которому надо ориентироваться в формулировке задачи, чтобы минимизировать неизбежное отражение от возникающих границ вычислений. Все такие минимизации отражения не могут полностью от него избавиться, поэтому автору и захотелось сформулировать *точное* граничное условие, которое бы гарантировало полное отсутствие отражения от не физической, а вычислительной границы, подразумевающей свободное распространение волн за пределы расчётной области на бесконечность, где их и «поджидают» условия Зоммерфельда.

Существенно новым оказался тот, ранее неожиданный, факт, что точные неотражающие граничные условия не являются локальными: они представляют собой линейную связь функции решения задачи и нормальной к границе производной функции решения *не в каждой точке границы по отдельности* (как было с условиями Дирихле, Неймана и Робина (смешанная задача) [1]), а связь линейным интегро-дифференциальным оператором, который действует на функцию по всей границе. Неожиданность эта такова, что разработчики современных математических пакетов для решения краевых задач в частных производных, таких как COMSOL, MATLAB-PDE\_tools... и др., не предусмотрели в своих разработках того, что граничные условия могут быть нелокальными. Однако это нетрудно будет исправить, поскольку новые, нелокальные, граничные условия хорошо вписываются в идеологию метода конечных элементов в полуслабой форме (см. Ж. Деклу [2]), причём, входящий в них интегро-дифференциальный оператор 2-го порядка оказывается самосопряжённым, и преобразуется к симметричному виду. Последнее, как и ранее, позволяет в вычислениях уйти от конечно-разностного представления производных 2-го порядка и ограничиться производными лишь 1-го порядка при построении вычислительной схемы.

В предыдущей работе автора на эту тему [3] были получены выражения для линейного интегро-дифференциального оператора Дирихле-Неймана на сферической границе в случае

трёхмерной задачи. Здесь использованы аналогичные методы для двумерной задачи с круглой границей, но получены иные выражения, поскольку они непосредственно из трёхмерной задачи простым образом не выводятся.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца в  $R^2$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = f(x, y). \quad (1)$$

Пусть  $f(x, y)$  имеет ограниченный в  $R^2$  носитель, который лежит полностью внутри открытого круга  $x^2 + y^2 < R^2$  радиуса  $R$  и с центром в начале координат. Во внешности круга решение  $u = u(x, y)$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Условия излучения Зоммерфельда определяют характер поведения решения на бесконечности, а именно [4]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\sim O(1/\sqrt{r}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku &\sim o(1/\sqrt{r}), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Однако, при постановке вычислительных краевых задач приходится производить вычисления в конечной области пространства, и использование условий (2) на бесконечности вызывает затруднения. Поэтому

*Требуется:* найти выражение для условия излучения на границе ограниченной области.

Замечание. Постановка задачи может быть обобщена на случай квазилинейных систем с волновым числом  $k$  и правой частью  $f$ , зависящими от координат  $x, y$  и самой искомой функции  $u$  внутри расчётного круга.

## 3. Решение задачи

Перейдём от Декартовых координат к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение (1) перепишется в виде<sup>1</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) u = f. \quad (4)$$

Во внешности окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  решение удовлетворяет однородному уравнению

---

<sup>1</sup> Для формально других функций, уже от полярных координат, оставляем прежние обозначения.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) u = 0. \quad (5)$$

Представим решение уравнения (5) в виде ряда:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(kr) e^{in\varphi}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и приравнявая нулю коэффициенты при разных гармониках, получим:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{n^2}{z^2} + 1 \right) u_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad z = kr. \quad (7)$$

Уравнение (7), умноженное на  $z^2$  - это уравнение Бесселя [5]. Общее решение для (7) можно представить в виде [6]:

$$u_n(z) = c_n H_n^{(1)}(z) + c'_n H_n^{(2)}(z). \quad (8)$$

Здесь  $H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $0 < z < \infty$  - функции Ханкеля (Hankel) 1-го и 2-го рода. Из них условию излучения Зоммерфельда (2) удовлетворяют только функции Ханкеля 1-го рода [7], поэтому для выполнения (2) все коэффициенты  $c'_n$  следует положить равными нулю:

$$u_n(z) = c_n H_n^{(1)}(z). \quad (9)$$

На окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  из полученных формул имеем:

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(kR) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(1)}(kR) e^{in\varphi}, \quad (10)$$

Для нормальной производной от  $u$  на окружности получим:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u'_n(kR) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(1)'}(kR) e^{in\varphi}, \quad (11)$$

Здесь обозначено

$$u'_n(kR) \equiv \left. \frac{du_n}{dz} \right|_{z=kR}, \quad H_n^{(1)'}(kR) \equiv \left. \frac{dH_n^{(1)}}{dz} \right|_{z=kR}. \quad (12)$$

#### 4. Граничное условие 4-го рода

Пользуясь ортогональностью тригонометрического базиса функций  $e^{in\varphi}$  на окружности, выразим коэффициенты  $c_n$  из представления (10) и подставим в (11):

$$\frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' e^{-im\varphi'} u(R, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(1)}(kR) \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' e^{i(n-m)\varphi'} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{mn} c_n H_n^{(1)}(kR),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(1)}(kR)} \oint d\varphi' e^{-in\varphi'} u(R, \varphi'), \quad (13)$$

Мы пришли к соотношению

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' u(R, \varphi') DtN(kR, \varphi - \varphi'), \quad (14)$$

представляющему собой выражение для нормальной производной решения уравнения Гельмгольца на границе круга через значение самого решения на границе круга, - с помощью линейного оператора с ядром, формально представленным рядом

$$DtN(z, \varphi) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)'}(z)}{H_n^{(1)}(z)} e^{in\varphi}. \quad (15)$$

Таким образом, видно, что при переносе условий излучения (2) из бесконечности на границу конечного радиуса значение нормальной производной решения в некоторой точке границы выражается линейно через значение решения не только в этой точке, но и в других точках границы. Этот новый, нелокальный, тип граничного условия для отличия от известных условий Дирихле, Неймана и Робина, следует назвать *граничным условием 4-го рода*.

Далее мы изучаем свойства ядра (15) и линейного оператора DtN, порождаемого этим ядром. Пользуясь формулой [8]

$$H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z), \quad (16)$$

преобразуем (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} DtN(z, \varphi) &= \frac{H_0^{(1)'}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_n^{(1)'}(z)}{H_n^{(1)}(z)} e^{in\varphi} + \frac{H_{-n}^{(1)'}(z)}{H_{-n}^{(1)}(z)} e^{-in\varphi} \right) = \\ &= \frac{H_0^{(1)'}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)'}(z)}{H_n^{(1)}(z)} (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) = \\ &= \frac{H_0^{(1)'}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)'}(z)}{H_n^{(1)}(z)} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы заменить производные функций Ханкеля, воспользуемся формулами [9]:

$$\frac{d}{dz} H_n^{(1)}(z) = H_{n-1}^{(1)}(z) - \frac{n}{z} H_n^{(1)}(z), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} H_n^{(1)}(z) = \frac{n}{z} H_n^{(1)}(z) - H_{n+1}^{(1)}(z). \quad (19)$$

Получим

$$DtN(z, \varphi) = -\frac{H_1^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{n}{z} \right) \cos n\varphi. \quad (20)$$

Ряд в (20) является расходящимся рядом, что характерно для обобщённых функций, которыми часто бывают ядра интегрирования линейных операторов. Поэтому есть смысл произвести дальнейшее разложение выражения (20), чтобы свести его вид к сумме ограниченного оператора и неограниченного оператора с более понятной структурой. Для этого разобьём ряд в (20) на пять слагаемых:

$$\begin{aligned} DtN(z, \varphi) = & -\frac{H_1^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + 2 \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_1^{(1)}(z)} \cos \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \cos n\varphi + \\ & + z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \cos n\varphi - \frac{2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим:

$$R(z, \varphi) \equiv -\frac{H_1^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(z)} + 2 \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_1^{(1)}(z)} \cos \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \cos n\varphi, \quad (22)$$

Далее обозначаем и вычисляем ряды аналитически:

$$\begin{aligned} A(\varphi) & \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \cos n\varphi, \\ A(\varphi) & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n+1)\varphi = \\ & = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\varphi - \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\varphi = \\ & = \cos \varphi \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1-\cos \varphi)} - \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi = \\ & = \cos \varphi \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} - \frac{\pi - |\varphi|}{2} \sin |\varphi|, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \end{aligned} \quad (23)$$

$$S(\varphi) \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} n \cos n\varphi = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\varphi = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}. \quad (24)$$

Назовём эти ряды *расчётной* (22), *аналитической* (23) и *сингулярной* (24) частями соответственно. Смысл этого разделения состоит в том, что, как будет доказано ниже, расчётная часть представляет собой абсолютно и равномерно (по переменной  $\varphi$ ) сходящийся ряд, соответствующий линейному интегральному оператору с регулярным ядром,

вычисляемым с любой точностью. Остальные члены суммируются по известным формулам [10] и приводятся к простому и понятному виду. Итак,

$$DtN(z, \varphi) = R(z, \varphi) + zA(\varphi) + \frac{2}{z}S(\varphi). \quad (25)$$

Наша первоочередная задача состоит в том, чтобы доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда в (22). Приступим же.

Сначала есть смысл разобраться со свойствами функций Ханкеля с натуральным индексом  $n$  и положительным аргументом  $z$ , для этого используем их выражения через функции Бесселя и Неймана (Вебера), и представления этих функций в виде степенных рядов. По определению [7, 11],

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z). \quad (26)$$

Согласно [5], функция Бесселя (в том числе и) натурального индекса имеет представление в виде ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}. \quad (27)$$

Функция Неймана с натуральным индексом представима рядом [12]

$$\begin{aligned} \pi Y_n(z) = & \left(2\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)^2\right) J_n(z) - \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \left(\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+n} \frac{1}{m}\right) - \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера,  $\gamma = 0.5772156649\dots$  – постоянная Эйлера-Маскерони [13]. Таким образом, функции Ханкеля 1-го рода представимы суммой величин<sup>2</sup>:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) = t_n^{(1)}(z) + t_n^{(2)}(z) + t_n^{(3)}(z) + t_n^{(4)}(z); \quad (29)$$

Здесь обозначены слагаемые

$$t_n^{(1)}(z) \equiv \left(1 + \frac{i}{\pi} \left(2\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)^2\right)\right) J_n(z), \quad (30)$$

$$t_n^{(2)}(z) \equiv -\frac{i}{\pi} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (31)$$

---

<sup>2</sup> Ряды сходятся при любом положительном  $z$  (см. [12]).

$$t_n^{(3)}(z) \equiv -\frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \left( \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+n} \frac{1}{m} \right), \quad (32)$$

$$t_n^{(4)}(z) \equiv -\frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}. \quad (33)$$

Теперь нас будет интересовать поведение каждого из этих четырёх слагаемых при фиксированном значении  $z$  и при  $n \rightarrow \infty$ . Докажем Лемму 1:

**Лемма 1.** Функция  $J_n(z)$ ,  $z > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  при каждом фиксированном  $z$  является бесконечно малой последовательностью натуральной переменной  $n$ .

Доказательство. Представим  $J_n(z)$  в виде степенного ряда [5]:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{(k+n)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}. \quad (34)$$

Произведём оценку

$$\begin{aligned} |J_n(z)| &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{(k+n)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k n!}{(k+n)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right| = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+n)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right). \\ |J_n(z)| &\leq \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right), \quad z > 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Поскольку факториал растёт быстрее показательной функции, лемма доказана.

Следствие. Из Леммы 1 следует, что первый член (30) при фиксированном значении  $z$  является бесконечно малым при  $n \rightarrow \infty$ :

$$|t_n^{(1)}(z)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2} \left(2\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)^2\right)^2} \exp\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2\right). \quad (36)$$

Исследуем второй член (31).

$$\left| t_n^{(2)}(z) \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=1}^n 1 = \frac{z}{2\pi} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n-1}. \quad (37)$$

Из полученной оценки следует, что второй член также является бесконечно малым при  $n \rightarrow \infty$ .

Оценим третий член (32):

$$\begin{aligned} t_n^{(3)}(z) &= -\frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+n} \left( \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+n} \frac{1}{m} \right). \\ \left| t_n^{(3)}(z) \right| &\leq \frac{1}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+n)n!}{(k+n)!k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} = \\ &= \frac{1}{\pi(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+n)!k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} + \frac{2}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(k+n)!(k-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} = \\ &= \frac{1}{\pi(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+n)!k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} + \frac{2}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+n+1)!k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} + \frac{2}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} = \\ &= \left( \frac{1}{\pi(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^n + \frac{2}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2} \right) \exp \left( \left( \frac{z}{2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что и 3й член бесконечно мал, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\pi(n-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^n + \frac{2}{\pi n!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2} \right) \exp \left( \left( \frac{z}{2} \right)^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Четвёртый член (33)

$$t_n^{(4)}(z) = -\frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n}.$$

преобразуем следующим образом:



$$\begin{aligned}
t_n^{(4)}(z) &= -\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \\
&= -\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right).
\end{aligned} \tag{39}$$

Произведём его оценку:

$$\left|t_n^{(4)}(z)\right| = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right) \geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! \tag{40}$$

Четвёртый член оказался бесконечно большим при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому он является главным, определяющим асимптотическое поведение функций Ханкеля при фиксированном положительном значении  $z$  и при бесконечно возрастающем индексе  $n$ .

Изучим теперь поведение суммы в (39).

**Лемма 2.** Доказать, что при  $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k = 1. \tag{41}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n-1)!k!} x^k \leq 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k = \\
&= 1 + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - 1 \right) \leq 1 + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \right) = 1 + \frac{1}{n} (e^x - 1).
\end{aligned}$$

Итак,

$$1 \leq \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n-1)!k!} x^k \leq 1 + \frac{1}{n} (e^x - 1). \tag{42}$$

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} (e^x - 1) \right) = 1. \tag{43}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} x^k = 1. \tag{44}$$

Лемма доказана.

Следствие. Сумма в (39) стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ .

На основе проведенного анализа получаем следующее представление для функций Ханкеля:

$$H_n^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! (1 + r_n(z)), \quad (45)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$r_n(z) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \frac{o_n(z)}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (46)$$

$$o_n(z) \equiv i\pi \left( t_n^{(1)}(z) + t_n^{(2)}(z) + t_n^{(3)}(z) \right). \quad (47)$$

Из полученных выше оценок (36) – (38), (40) следует, что величина  $r_n(z)$  является бесконечно малой. Действительно, первый член в (46) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку это следует из оценки (42). Во второй же дроби в числителе стоит сумма бесконечно малых величин (47), а знаменатель дроби стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$  быстрее, чем растёт показательная функция, стоящая множителем справа, при любом положительном  $z$ . Поэтому первый член в (46) убывает по степенному закону  $1/n$ , а второй член – быстрее экспоненты. Таким образом, первый член в (46) является главным, а вторым при отыскании предела можно пренебречь.

Теперь возможно доказать следующее утверждение:

**Лемма 3.** Существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right) = \left( \frac{z}{2} \right)^3. \quad (48)$$

Доказательство. Воспользуемся полученным для функций Ханкеля представлением (45) и свойством остатка (46):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^3 \left( \frac{-\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+1} (n-2)! (1+r_{n-1}(z))}{-\frac{i}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (n-1)! (1+r_n(z))} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^3 \left( \left(\frac{z}{2}\right) \frac{(1+r_{n-1}(z))}{(n-1)(1+r_n(z))} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right) = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^2 \left( \frac{1+r_{n-1}(z)}{1+r_n(z)} - 1 \right) \right) = \left(\frac{z}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^2 \frac{r_{n-1}(z) - r_n(z)}{1+r_n(z)} \right) = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^2 (r_{n-1}(z) - r_n(z)) \right).
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (46) для остатка и производя преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
r_{n-1}(z) - r_n(z) &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-k-2)!}{(n-2)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \frac{o_{n-1}(z)}{(n-2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} - \frac{o_n(z)}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} \left( \frac{(n-1)(n-k-2)! - (n-k-1)(n-k-2)!}{(n-1)!} \right) \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(n-1)} + \frac{o_{n-1}(z)}{(n-2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} - \frac{o_n(z)}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-k-3)!}{(n-3)!} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \\
&\quad + \left(\frac{z}{2}\right) \frac{o_{n-1}(z)}{(n-2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{z}{2}\right) \frac{o_n(z)}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} - \left( \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{(n-1)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Первый член в полученном выражении при  $n \rightarrow \infty$  убывает как  $1/n^2$ , остальные члены убывают быстрее показательной функции, поэтому в дальнейшем мы ими пренебрегаем. Итак,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^2 (r_{n-1}(z) - r_n(z)) \right) = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)^2 \left( \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-k-3)!}{(n-3)!} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{z}{2}\right)^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-1)^2}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-k-3)!}{(n-3)!} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right) = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+2)}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right) = \left(\frac{z}{2}\right)^3.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. Из существования предела (48) вытекает справедливость утверждения:

**Теорема.** Ряд (22)

$$R'(z, \varphi) \equiv 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \cos n\varphi$$

при всяком фиксированном  $z > 0$  сходится абсолютно и равномерно по переменной  $\varphi$ .

Доказательство. Поскольку

$$|R'(z, \varphi)| \leq \bar{R}(z), \quad (49)$$

где

$$\bar{R}(z) \equiv 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right|, \quad (50)$$

то абсолютная и равномерная сходимость ряда (22) равносильна сходимости ряда (50). Докажем его сходимость.

Действительно, в силу леммы 3, для любого  $\varepsilon > 0$  и, в частности, для  $\varepsilon = 1/2$  существует  $N_1 = N_1(z)$ , начиная с которого

$$\left| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) - \left(\frac{z}{2}\right)^3 \right| < \frac{1}{2}, \quad n > N_1(z). \quad (51)$$

При этом, в силу неравенства  $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$ , получим

$$\left\| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right\| - \left\| \left(\frac{z}{2}\right)^3 \right\| \leq \left\| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) - \left(\frac{z}{2}\right)^3 \right\| < \frac{1}{2},$$

$$\left\| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) - \left( \frac{z}{2} \right)^3 \right\| < \frac{1}{2},$$

Из этого неравенства следуют последовательно такие неравенства

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< \left\| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) - \left( \frac{z}{2} \right)^3 \right\| < \frac{1}{2}, \\ \left( \frac{z}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} &< \left\| (n-1)^3 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right\| < \left( \frac{z}{2} \right)^3 + \frac{1}{2}, \\ \frac{2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 - 1}{(n-1)^3} &< \left\| 2 \left( \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right) \right\| < \frac{2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 + 1}{(n-1)^3}, \quad , \quad n > N_1(z). \end{aligned} \quad (52)$$

Оценим остаток ряда

$$\bar{R}_N(z) \equiv 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right|. \quad (53)$$

Этот остаток допускает оценку:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{R}_N(z)}{2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 + 1} &= \frac{2}{2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 + 1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{H_{n-1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{z}{2(n-1)} \right| < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^3} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n(n-1)} = \sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{-2}{n} + \frac{1}{n-1} \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^M \left( \frac{1}{n+1} + \frac{-2}{n} + \frac{1}{n-1} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=N+1}^{M+1} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=N}^M \frac{1}{n} + \sum_{n=N-1}^{M-1} \frac{1}{n} \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{M+1} + \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} \right) - \left( \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} + \frac{1}{N} \right) - \left( \frac{1}{M} + \sum_{n=N}^{M-1} \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{N-1} + \sum_{n=N}^{M-1} \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{M+1} - \frac{1}{N} - \frac{1}{M} + \frac{1}{N-1} \right) = \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N(N-1)}. \\ \bar{R}_N(z) &< \left( 2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 + 1 \right) \frac{1}{N(N-1)} < \left( 2 \left( \frac{z}{2} \right)^3 + 1 \right) \frac{1}{(N-1)^2}, \quad N > N_1(z). \end{aligned} \quad (54)$$

И для того, чтобы остаток (53) ряда (50) был меньше любого наперёд заданного  $\varepsilon > 0$ , достаточно, чтобы выполнялось

$$N > \max \left\{ N_1(z), 1 + \sqrt{\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^3 + 1}{\varepsilon}} \right\}. \quad (55)$$

А это и означает, что ряд (50) сходится, что, в свою очередь, означает, что ряд (22) сходится абсолютно и равномерно. Теорема доказана.

## 5. Симметричная форма оператора Дирихле-Неймана

Оператор (14) с ядром (25) может быть представлен в симметричной форме. Расчётная (22) и аналитическая (23) части симметричны. Сингулярную часть ядра (24) можно представить в виде

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= -\sum_{n=1}^{\infty} n \cos n\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos n\varphi = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\varphi = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}. \end{aligned} \quad (56)$$

Действие же самого оператора S выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Su(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' S(\varphi - \varphi') u(\varphi') = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} u(\varphi') = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} u(\varphi') = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' u(\varphi') \frac{\partial}{\partial \varphi'} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|}. \end{aligned} \quad (57)$$

Для того, чтобы далее проинтегрировать по частям, необходимо уточнить классы функций, стоящих под интегралом. Во-первых, следует допустить, что  $u(\varphi) \in C^1$  - классу непрерывно дифференцируемых функций на единичной окружности. Во-вторых, выражение с

логарифмом следует рассматривать как обобщённую функцию, являющуюся слабым пределом последовательности непрерывных функций. А именно, пусть

$$K_{\varepsilon}(\varphi) \equiv \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (58)$$

- семейство непрерывных функций на единичной окружности. Тогда определим обобщённую функцию слабым пределом

$$\ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{\varepsilon}(\varphi). \quad (59)$$

Если принять эти допущения, то последнее выражение в представлении (57) интегрируется по частям следующим образом:

$$\begin{aligned} Su(\varphi) &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left( u(\varphi') \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \frac{\partial u}{\partial \varphi'}(\varphi') = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} u(\varphi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( K_{\varepsilon}(\varphi - \varphi')_{\varphi' \rightarrow \varphi-0} - K_{\varepsilon}(\varphi - \varphi')_{\varphi' \rightarrow \varphi+0} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \frac{\partial u}{\partial \varphi'}(\varphi') = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} u(\varphi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( K_{\varepsilon}(+0) - K_{\varepsilon}(-0) \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \frac{\partial u}{\partial \varphi'}(\varphi') = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \frac{\partial u}{\partial \varphi'}(\varphi'). \end{aligned}$$

Итак,

$$Su(\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} K \frac{\partial}{\partial \varphi} u(\varphi), \quad (60)$$

$$Ku(\varphi) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} u(\varphi'). \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \text{DtN } u(\varphi) = & \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' R(z, \varphi - \varphi') u(\varphi') + z \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' A(\varphi - \varphi') u(\varphi') + \\ & + \frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial \varphi} K \frac{\partial}{\partial \varphi} u(\varphi). \end{aligned} \quad (62)$$

Итак, (14) может быть переписано в операторной форме:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = \text{DtN } u(R, \varphi), \quad (63)$$

где оператор DtN определён формулой (62).

## 6. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

Рассмотрим уравнение (1) с элементарным источником в правой части:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) g = \delta^2(x, y), \\ \delta^2(x, y) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad \iint dx dy \delta^2(x, y) = 1. \end{aligned} \quad (64)$$

Поскольку задача (64) азимутально симметричная, её решение должно быть пропорциональным  $H_0^{(1)}(kr)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Найдём коэффициент пропорциональности.

Проинтегрируем уравнение (64) по кругу радиуса  $r$  с центром в начале координат<sup>3</sup>:

$$2\pi \int_0^r r' dr' \left( \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + k^2 \right) g(r') = 1. \quad (65)$$

$$2\pi \int_0^r r' dr' \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} r' \frac{\partial}{\partial r'} + k^2 \right) g(r') = 1.$$

$$2\pi r \frac{\partial g}{\partial r}(r) + 2\pi k^2 \int_0^r r' dr' g(r') = 1, \quad (66)$$

При малых  $z$  известна<sup>4</sup> асимптотика для функции Неймана (Вебера) [9]:

$$Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{z}{2} + \gamma \right), \quad z \rightarrow 0,$$

<sup>3</sup> При интегрировании левой части равенства используем полярные координаты (3).

<sup>4</sup> В учебнике Лебедева [9] приводится более грубая оценка, по пределу отношения бесконечно большой функции и её асимптотики, равному единице. Если же определить асимптотику по пределу разности этих величин, равному нулю, получается уточнение оценки, которое здесь и приведено.



из которой, учётом  $J_0(0) = 1$ , следует оценка:

$$H_0^{(1)}(z) \sim \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{z}{2} + \gamma \right) + 1, \quad z \rightarrow 0.$$

Здесь  $\gamma = 0.577216\dots$  - постоянная Эйлера-Маскерони [13]. Используем эту асимптотику при подстановке в (66):

$$g(r) = c H_0^{(1)}(kr) \approx c \left( \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + 1 \right), \quad r \rightarrow 0. \quad (67)$$

Подставляя в (66), получим:

$$2\pi r \frac{\partial}{\partial r} c \left( \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + 1 \right) + 2\pi k^2 \int_0^r r' dr' c \left( \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{kr'}{2} + \gamma \right) + 1 \right) = 1,$$

$$2\pi r c \frac{2i}{\pi r} + 2\pi c \int_0^{kr} x dx \left( \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + 1 \right) = 1,$$

$$4ic + c \int_0^{kr} \left( 2i \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \pi \right) d(x^2) = 1,$$

$$c \left( 4i + (kr)^2 \left( 2i \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + \pi \right) - \int_0^{kr} x^2 d \left( 2i \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \pi \right) \right) = 1,$$

$$c \left( 4i + (kr)^2 \left( 2i \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + \pi \right) - 2i \int_0^{kr} x dx \right) = 1,$$

$$c \left( 4i + (kr)^2 \left( 2i \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + \pi - i \right) \right) = 1,$$

При  $r \rightarrow 0$  получим:

$$c = -\frac{i}{4}.$$

$$g(r) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr). \quad (68)$$

Это и есть искомое нормированное фундаментальное решение с элементарным источником.

## 7. Численная проверка неотражающего граничного условия

Пусть точечный единичный источник монохроматического излучения расположен на расстоянии  $r_0$ ,  $r_0 < R$  от начала координат<sup>5</sup>. Проверим полученное граничное условие (63) на граничной окружности.

Следует заметить, что математический пакет Wolfram Mathematica не способен проверить соотношение (63) аналитическими методами. Поэтому проверка выполнена численно.

Волновое поле данного источника описывается функцией

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi} \right). \quad (69)$$

На граничной окружности

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \varphi} \right). \quad (70)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = \frac{1}{4i} \frac{R - r_0 \cos \varphi}{\sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \varphi}} H_0^{(1)'} \left( k \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \varphi} \right).$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = -\frac{1}{4i} \frac{R - r_0 \cos \varphi}{\sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \varphi}} H_1^{(1)} \left( k \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \varphi} \right). \quad (71)$$

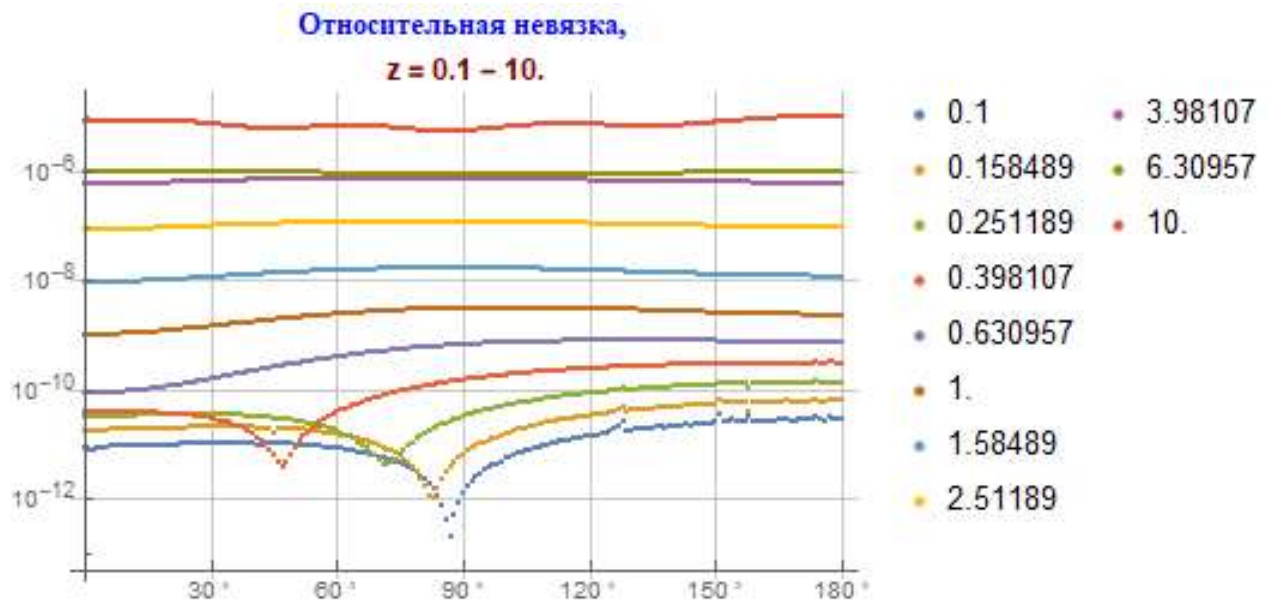
Далее численно рассчитываем DtNu согласно полученным формулам (62), (61), (22), (23) и находим *относительную невязку* формулы (63):

$$\delta = \frac{\left| \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) - \text{DtNu}(R, \varphi) \right|}{\left| \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) \right|}. \quad (72)$$

Эта невязка должна быть тем меньше, чем выше точность расчётов всех входящих величин. Примеры такого расчёта приводятся на Рис. 1 - 3.

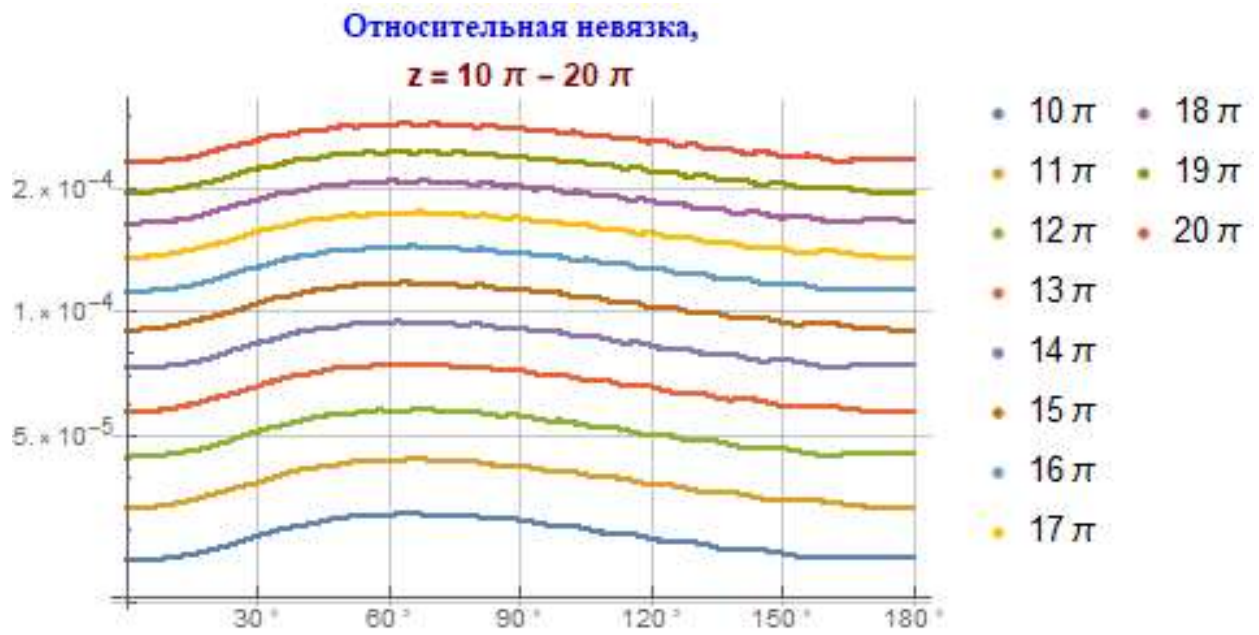
---

<sup>5</sup> Следует заметить, что источник любой конфигурации внутри данного круга может быть представлен линейной комбинацией точечных источников, поэтому предлагаемой здесь проверки вполне достаточно для общих утверждений.



**Рис. 1.** Относительная невязка абсолютной величины левой и правой части полученного в работе неотражающего граничного условия (63) при различных значениях  $z = kR$  вдоль окружности границы области источников.

Следует заметить, что вычисление ряда, входящего в определение расчётной части в формуле (22) является нетривиальной задачей: как видно из асимптотики (45) функций Ханкеля при больших номерах, они растут по абсолютной величине с ростом номера быстрее экспоненты, однако, абсолютная величина отношения функций Ханкеля с соседними номерами является уже величиной бесконечно малой (но убывающей с ростом номера недостаточно быстро для того, чтобы такой ряд сходил). Вычитание из этого отношения другой, более простой, бесконечно малой весьма улучшает сходимость ряда, делая его абсолютно и равномерно сходящимся (см. теорему выше). Ввиду указанных свойств структуры формулы, трудно избежать применения асимптотического представления для «хвоста» ряда, поскольку иначе точность вычислений теряется с катастрофической скоростью. Поэтому в работе использовались асимптотики



**Рис. 2.** Относительная невязка абсолютной величины левой и правой части полученного в работе неотражающего граничного условия (63) при различных значениях  $z = kR$  от пяти до десяти длин волны.



**Рис. 3.** Повышенная точность при 64 разрядах (чёрная кривая) по сравнению с машинной точностью (16 разрядов, красная кривая),  $z = 20\pi$ , угловой интервал интерполяции 15 минут, число членов ряда, вычисленных через функции Ханкеля (без асимптотики) равно 50, далее применена улучшенная асимптотика членов ряда.

$$r_n(z) \rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad n \rightarrow \infty; \quad (73)$$

$$r_{n-1}(z) - r_n(z) \rightarrow \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-k-3)!}{(n-3)!} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (74)$$

которые следуют из представления (46) и формулы в доказательстве Леммы 3.

Расчёт проводился с помощью пакета “Wolfram Mathematica 12.0”. Из графиков Рис. 1,2 видно, что точность расчёта снижается с увеличением  $z$ . Но, если постараться, точность можно поднять переходом на 64-разрядную арифметику, и с густотой сетки интерполяции для расчётной части в 15 угловых минут, - см. Рис. 3. На первых двух рисунках показаны результаты расчётов, выполненных с машинной точностью – примерно 16 десятичных разрядов, и с густотой сетки интерполяции для расчётной части в 30 угловых минут. Третий рисунок (чёрная кривая) – 64 десятичных разряда, и 15 угловых минут соответственно. Видно, что точность расчёта наиболее трудной задачи – с радиусом круга в 10 длин волны – приблизилась к хорошим результатам, которые были получены с машинной точностью при меньших значениях радиуса, - разумеется, ценой больших затрат времени расчёта.

Однако, рисунки ни в коей мере не выступают в роли доказательства справедливости неотражающего граничного условия (63), а служат лишь его наглядной иллюстрацией.

## 8. Продолжение решения во внешность круга

Из формул (6) и (9) имеем:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}. \quad (75)$$

Подставляя выражение из (13) для коэффициентов ряда, получим:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' u(R, \varphi') G(kr, kR, \varphi - \varphi'), \quad (76)$$

где

$$G(z, Z, \varphi) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(Z)}. \quad (77)$$

Пользуясь формулой (16):  $H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z)$ , производим замену отрицательных индексов суммирования на положительные, и получим

$$\begin{aligned}
G(z, Z, \varphi) &= \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(Z)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(Z)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} \frac{H_{-n}^{(1)}(z)}{H_{-n}^{(1)}(Z)} = \\
&= \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(Z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(Z)} = \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(Z)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(Z)} \cos n\varphi. \\
G(z, Z, \varphi) &= \frac{H_0^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(Z)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(Z)} \cos n\varphi.
\end{aligned} \tag{78}$$

Полученный ряд сходится равномерно по углу  $\varphi$  при  $z > Z$ , и со скоростью убывающей геометрической прогрессии<sup>6</sup> по индексу суммирования  $n$ . При  $z \rightarrow Z + 0$  ряд сходится в слабом смысле к дельта-функции Дирака:

$$\lim_{z \rightarrow Z+0} G(z, Z, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} = 2\pi\delta(\varphi), \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \tag{79}$$

при  $z < Z$  ряд расходится.

Доказательство формулы (79). Пусть  $f(\varphi)$  - произвольная непрерывная функция, заданная на единичной окружности. Известно [14], что ряд Фурье такой функции сходится равномерно к самой функции. Тогда из определяющей формулы (77) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' G(Z+0, Z, \varphi - \varphi') f(\varphi') &= \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi - \varphi')} \frac{H_n^{(1)}(Z+0)}{H_n^{(1)}(Z)} f(\varphi') = \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi - \varphi')} f(\varphi') = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi' e^{-in\varphi'} f(\varphi') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} f_n = f(\varphi).
\end{aligned} \tag{80}$$

А это и есть определение дельта-функции:

$$\oint d\varphi' \delta(\varphi - \varphi') f(\varphi') = f(\varphi). \tag{81}$$

## 9. Выводы

Задача нахождения волнового поля в бесконечном двумерном пространстве для неоднородного уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда (2) на бесконечности, может быть решена следующими последовательными шагами:

---

<sup>6</sup> Это следует из представления (45) для функций Ганкеля и асимптотики, вытекающей из свойства бесконечной малости остатка.

1. Определяем круг, содержащий все источники излучения данной системы.
2. Решаем краевую задачу для уравнения (1) внутри круга при условиях (63) на границе круга.
3. Продлеваем полученное решение внутри и на границе круга – за пределы круга – с помощью формул (76) – (78).

1. «Краевая задача» - Математическая энциклопедия, том 3, с. 75.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976.
3. V. Gorin. Radiation condition for the 3-dimensional Helmholtz equation on the boundary of a bounded domain//The scientific heritage No. 114 (2023), P. 28 - 40.
4. «Излучения условия» - Математическая энциклопедия, том 2, с. 486-488.
5. Д.С. Кузнецов. Специальные функции, с. 95. М.: «Высшая школа», 1962.
6. Д.С. Кузнецов. Специальные функции, с. 126. М.: «Высшая школа», 1962.
7. «Ганкеля функции» - Математическая энциклопедия, том 1, с. 858.
8. Д.С. Кузнецов. Специальные функции, с. 128. М.: «Высшая школа», 1962.
9. Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, с. 138. МЛ: «ГИФ-МЛ», 1963.
10. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: «ГИФ-МЛ», - 1963. С. 52 Ф-ла 1.441.2.
11. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции – формулы, графики, таблицы. М.: «Наука», 1964, с. 189.
12. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: «ГИФ-МЛ», - 1963. С. 965 Ф-ла 8.403.2.
13. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: «ГИФ-МЛ», - 1963. С. 1094.
14. Л.Д. Кудрявцев. Математический анализ, том 2, М.: «Высшая школа», - 1970. С. 244.