# Гравимагнитный заряд и структура пространства-времени

Зафар Туракулов

22 апреля 2024 г.

**Аннотация**

Рассмотрена задача построения материального источника гравитационного поля, представленного решением Тауба-НУТ. Обнаружено, подход, основанный на применении полученной ранее наиболее общей стационарной сферически-симметричной тетрады с нарушенной пространственной четностью приводит к присутствию кротовой норы. Предпринята попытка избежать этого использованием более общей тетрады. Показано, что такое обобщение и нарушает сферическую симметрию и входит в противоречие с любыми разумными предположениями о возможных свойства материи источника. Сделан вывод о принципиальности сопутствия кротовой норы гравимагнитному заряду.

## 1 Введение

Актуальность задачи на построение материального источника, гравитационное поле которого задано решением Тауба-НУТ обусловлена несколькими причинами. Первая состоит в том, что изначально вакуумные решения уравнения Эйнштейна строились для описания поля такого источника, который сам необходим как модель какого-либо астрофизического объекта. Вторая – в том, что эта задача интересна сама по себе и ее решение может открыть путь к построению моделей более сложных объектов, таких, как вращающиеся звезды. Третья – в том, что гравимагнитный заряд является истинным нарушителем пространственной четности. В физике частиц в этом качестве известны нейтроны которые поэтому являются его носителями и это делает практически любую материю носителем этой субстанции. А раз так, то при построении сферически-симметричных моделей звезд, в особенности, нейтронных, в качестве внешнего решения следует принимать решение Тауба-НУТ, а не Шварцшильда. Четвертая – в том, что появились указания на противоречие между свойствами пространства-времени Тауба-НУТ как целого и некоторыми фундаментальными положениями [4]. Кроме того, в этой задаче сочетаются сферическая симметрия и нарушение пространственной четности, что может быть особенно важным для описания нейтронных звезд, и что делает ее решение естественным следующим шагом после построения внутреннего решения Шварцшильда [1].

Представляется естественным попытаться построить какое-нибудь частное решение этой задачи путем простой замены функций, в которых выражено ваккумное решение, какими-либо другими. Однако попытки сделать это неизменно ведут к появлению кротовой норы. Поэтому прежде, чем ставить эту задачу, необходимо установить, было ли это следствием неудачного выбора тетрады или представляет собой принципиальное следствие присутствия гравимагнитного заряда. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы установить, является ли нетривиальное строение пространства-времени, согласно которому оно содержит две вселенные, соединенные кроторой норой, обязательныи следствием присутствия гравимагнитного заряда и, таким образом, нарушения четности.

## 2 Система координат и ортонормированная тетрада

Для построения требуемой модели выбрана сферическая система координат $\{t, s, \theta, \varphi\}$, в которой векторы Киллинга выражены точно также, как в обычных сферических координатах. Так, в ней $t$ – это временная координата, совпадающая в асимптотике с лоренцевым временем, $s$ – радиальная, так что поверхности $t = \mathrm{const}$, $s = \mathrm{const}$ инвариантсны относительно вращений и имеют внутренюю геометрию сферы, а координаты $\theta$ и $\varphi$ – это соответственно полярный и азимутальный углы на них. Полагаем, что асимптотике соответствует стремление координаты $s$ к бесконечности, где геометрия рассматриваемого пространства-времени совпадает с геометрией пространства-времени Тауба-НУТ. Эта геометрия задается явным видом его римановой метрики или ортонормированной тетрады. В настоящей работе используется ортонормированная тетрада

$$\nu^0 = \Phi(s)(\mathrm{d}t + 2l\cos\theta\mathrm{d}\varphi), \qquad \nu^1 = \frac{\mathrm{d}s}{\Phi(s)}, \qquad (1)$$
$$\nu^2 = r(s)\mathrm{d}\theta, \qquad \nu^3 = r(s)\sin\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Скалярная кривизна для тетрады (1) была выведена в нашей работе [2]. Она, умноженная на $half$, имеет вид

$$-\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}\psi'' + \frac{2r'}{r}\psi' + \left(\frac{2r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{l^2}{r^4}\right)\psi - \frac{1}{r^2},$$

где $\psi = \Phi^2$. Согласно уравнению Эйнштейна это выражение в точности равно плотности массы источника. Предположим, как обычно, что радиус

$r$ координатной сферы $s = \mathrm{const}$ может принимать сколь угодно малые значения, включая значение $r = 0$, и покажем, что это предположение эквивалентно требованию, чтобы материя источника имела невозможные физические свойства. А именно, чтобы ее плотность массы принимала отрицательные значения.

Действитеьно, об искомых функциях $r$ и $\Phi$ известно, что они в рассматриваемой области ограничены вместе со своими производными. При этом в выражение для плотность массы входит слагаемое $-l^2/r^4$, которое при $r \to 0$ по абсолютной величине растет быстрее чем все остальные члены, но отрицательно. Это означает, что при понижении радиуса координатной сферы до нуля она неограниченно растет в отрицательную область, поэтому предположение о том, что радиус координатной сферы может достигать сколь угодно малых значений является неразумным с физической точки зрения и его следует отклонить по этой причине. После этого неизбежным становится вывод о том, что переменная $r$ не может понижаться до нуля, т.е. существует некоторое наименьшее возможное ее значение $r_{min}$.

То, что радиус координатной сферы $r$ ни при каком значении $s$ не обращается в нуль, означает, что не существует никакого естественного ограничения для этой координаты и поэтому она пробегает всю числовую ось. Что же касается радиуса координатной сферы $r(s)$, то он, пройдя через минимум, снова возрастает создава вторую внешнюю область. Следовательно, пространство с таким поведением этой величины состоит из двух внешних областей и соединяющей их кротовой норы. Это выглядит как указание на то, что такое строение пространства является неизбежным следствием присутствия гравимагнитного заряда. Является оно таковым или нет – это принципиальный вопрос, требующий определенного ответа. Цель настоящецей работы состоит в том, чтобы дать определенный ответ на этот вопрос.

Прежде, чем делать это, рассмотрим некоторые детали строения кротовой норы. Собственно кротовой норой является сфера минимального радиуса. Эта сфера делит пространство на две внешние области, составляя их общую границу. Если пространство симметрично относительно нее, то обе внешние области идентичны, так что у нее обе стороны – внешние. Иными словами, она является сферой только с точки зрения своей внутренней геометрии, т.е. как двумерная поверхность, но не в обычном понимании как граница шара.

# 3 Распределение гравимагнитного заряда и структура пространства-времени

Идея гравимагнитного заряда пришла из электродинамики, где она оказалась в некотором противоречии с другими положениями теории. Так, оказалось, что предположение о существовании объемной плотности монополя несовместимо с существанием ”векторного” (далее – ковекторного) потенциала его поля. С его существованием совместимы только такие распределения монополя в пространстве, носители которого имеют размерность не выше двух. Если существование векторного потенциала имеет жизненно важное значение, то монополь может быть точечным, иметь линейную плотность на линии или поверхностную на поверхности, но не может быть распределен в области пространства. Однако ответа на вопрос, является ли существование ко-векторного потенциала жизненно важным для магнитостатики, сама она не дает.

В отличие от магнитостатики, в общей теории относительности гравимагнитное поле вполне определенным образом выражает геометрические свойства пространства-времени. Средства этого выражения принадлежат римановой геометрии, определены в ней и только она определяет, что в ней может, и что не может существовать. Если геометрия допускает, что носителем гравимагнитного заряда может быть поверхность, линия или точка, но никак не область пространства, то это так и никак иначе. В действительности носителем гравимагнитного заряда может быть только поверхность. Точкой или линией он быть не может потому, что из точечных линейных гравимагнитных зарядов путем усреднения можно было бы получить объемные, тогда как у поверхностного распределния есть особый случай, когда то же самое невозможно. Если пространство имеет кротовую нору в форме замкнутой поверхности, и гравимагнитный заряд распределен на ней, то такое распределение не образует объемной плотности. Дело в том, что две такие кротовые норы соприкоснувшись, сливаются, образуя одну кротовую нору, на которой расперделен суммарный гравимагнитный заряд. То же произойдет при соприкосновении большего количества кротовых нор: они объединяются, тогда как гравимагнитный заряд остается распределенным на поверхности образовавшейся кротовой норы. В результате они никогда не составляют объемной плотности. По этой же причине для гравимагнитного поля нет и специального полевого уравнения. Подтвердить сказанное можно от противного, т.е. показав, к чему приводит попытка ввести непрерывное сферически симметричное распределение гравимагнитного заряда.

Для этого удобно использовать то, что на нерелятивистском уровне его поле, подобно электростатическому, подчиняется закону обратных квадратов, и, как следствие, обладает тем же свойством, что и оно. А именно, если, например, заряд равномерно распределен на сфере, то внутри нее напряженность его поля равна нулю. Перенося это свойство на рассматриваемое поле, можно сделать вывод о том, что если гравимагнитный заряд равномерно распределен на какой-либо координатной сфере $s = s_0$, то его поле отлично от нуля только при $s \geq s_0$. Если все это так, то в том, как задана тетрада (1), уже задано, что весь гравимагнитный заряд локализован на сфере минимального $r$, т.е. возможность его объемного распределения исключена изначально.

Ввести объемное распределение можно попытаться, обобщив вид тетрады, т.е. положив, что входящая в него величина $l$ – это не постоянная, а функция радиальной координаты $l(s)$. Действительно, в таком случае, скажем, при однородном распределении гравимагнитного заряда эта функция ведет себя как $r^3$ и входящая в тензор Эйнштейна величина при малых $l^2/r^4$ пропорциональна $r^2$ и не создает нижней границы для радиуса координатной сферы. Соответствующая тетрада имеет более общий вид:

$$\begin{aligned} \nu^0 &= \Phi(s)[\mathrm{d}t + 2l(s)\cos\theta\mathrm{d}\varphi], \qquad & \nu^1 &= \frac{\mathrm{d}s}{\Phi(s)}, \\ \nu^2 &= r(s)\mathrm{d}\theta, & \nu^3 &= r(s)\sin\theta\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Ниже будет показано, что эта тетрада не обладает сферической симметрией и еще более непргодна для построения внутреннего решения для метрики Тауба-НУТ.

# 4 Нарушение сферической симметрии нескалярных полей

Ранее тетрада (1), в которой $l$ – это именно константа, а не функция радиальной координаты, была найдена как наиболее общая сферически симметричная тетрада с нарушенной четностью. Ее обобщение (2) кажется не менее сферически симметричным, однако оно не появилось в этом качестве, что указывает на то, что оно, в отличие от оригинала, сферическрой симметрией не обладает. В любом случае, появляется принципиальный вопрос, может ли замена какой-либо постоянной, входящей в какое-либо нескалярное сферически-симметричное поле, функцией, зависящей от радиальной координаты, нарушить эту симметрию. Оказывается, что это действительно так. Продемонстрируем такое нарушение симметрии на примере магнитного поля.

В нашей работе [3] рассматривался ко-векторный потенциал магнитного монополя

$$\alpha = p(\cos\theta \pm 1)\mathrm{d}\varphi, \tag{3}$$

который по определению обладает сферической симметрией. Его выражение не выглядит сферически-симметричным. Кроме того, он имеет особенность на оси $\sin\theta = 0$, однако эта особенность имеет чисто коодинатное происхождение. Дело в том, что сингулярна сама координатная 1-форма, так что эта сингулярность никакого отношения к рассматриваемому полю не имеет. Что же касается напряженности его поля, то оно

$$\eta = p\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

его сопряжение

$$^*\eta = \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

имеют явно сферически симметричный вид никакой сингулярностью не обладает.

Рассмотрим теперь его обощение $\beta$, домножив потенциал (3) на функцию радиальной координаты:

$$\beta = f(r)p(\cos\theta \pm 1)\mathrm{d}\varphi.$$

Может показаться, что домножение на множитель, зависящий только от радиальной координаты, не может привести к нарушению сферической симметрии, но это не так. Покажем, что в результате этого получается поле, не обладающее сферической симметрией. Для этого найдем соответствующую напряженность:

$$^*\mathrm{d}\beta = \frac{pf(r)}{r^2} - pf'(r)(\cos\theta \pm 1)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}.$$

Оно имеет $\theta$-компоненту, которая принципиально не может обладать этой симметрией и к тому же имеет особенность на оси $\sin\theta = 0$. Ниже будет показано что обощение (2) сферически симметричной тетрады (1) точно также не обладает сферической симметрией и имеет похожую особенность.

Все ко-векторные потенциалы, задающие одну и ту же напряженность поля, эквивалентны, и отдичаются друг отдруга градиентами каких-либо скалярных функций, поэтому обладать или не обладать сферической симметрией может только вся совокупность эквивалентных потенциалов. Если задаваемая ими напряженность поля симметрична, то из этого следует, что симметрична и вся совокупность. Так, ко-векторный потенциал (3) привязан к определенной сферической системе координат, и его вид изменится, если эту систему повернуть в пространстве. Поскольку преобразованный потенциал задает в точности ту же самую напряженность, исходный и преобразованный потенциалы эквивалентны, их разность есть в точности градиент какой-то скалярной функции. Точно также, все тетрады, которым соответствует одна и та же кривизна и, в конечном счете, геометрия пространства-времени, эквивалентны, и какой-либо симметрией, в частности, сферической может обладать или не обладать только само пространство-время, и, соедовательно, вся совокупность эквивалентных полей тетрад. Поэтому, если тетрада (1) или (2) не выглядит явно сферически-симметричной, то это никакого значения не имеет, т.к. свойства пространства-времени задаются не ей, а кривизной пространства-времени.

## 5 Вычисление 1-формы связности

Выражение натурального ко-репера через тетраду (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \frac{\nu^0}{\Phi} - \frac{2l\cot\theta}{r}\nu^3, \quad \mathrm{d}s = \Phi(s)\nu^1, \\ \mathrm{d}\theta &= \frac{\nu^2}{r}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\nu^3}{r\sin\theta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Оно позволяет выразить производные ко-векторов тетрады через эти же векторы:

$$\mathrm{d}\nu^0 = -\Phi'\,\nu^0\wedge\nu^1 - \frac{2l\Phi}{r^2}\,\nu^2\wedge\nu^3 - \frac{\Phi^2 l'\cot\theta}{r}\,\nu^3\wedge\nu^1, \quad \mathrm{d}\nu^1 = 0$$
$$\mathrm{d}\nu^2 = \frac{r'\Phi}{r}\,\nu^1\wedge\nu^2, \quad \mathrm{d}\nu^3 = -\frac{r'\Phi}{r}\,\nu^3\wedge\nu^1 + \frac{\cot\theta}{r}\,\nu^2\wedge\nu^3,$$

необходимые для вычсления 1-формы связности. Для их вычисления искомая форма связности разлагается по тетраде (1)

$$\omega_a{}^b = \gamma_{ca}{}^b\nu^c,$$

что превращает первое структурное уравнение Э. Картана

$$\mathrm{d}\nu^a + \omega_b{}^a\wedge\nu^b = 0$$

в систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов связности $\gamma_{ca}{}^b$, которая легко решается. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega_1{}^0 = \Phi'\nu^0 + \frac{\Phi^2 l'\cot\theta}{2r}\,\nu^3 = \omega_0{}^1, \quad \omega_2{}^0 = -\frac{l\Phi}{r^2}\nu^3 = \omega_0{}^2, \\ &\omega_3{}^0 = -\frac{\Phi^2 l'\cot\theta}{2r}\,\nu^1 + \frac{l\Phi}{r^2}\nu^2 = \omega_0{}^3, \quad \omega_1{}^3 = -\frac{\Phi^2 l'\cot\theta}{2r}\,\nu^0 + \frac{r'\Phi}{r}\,\nu^3 = -\omega_3{}^1, \\ &\omega_2{}^1 = -\frac{r'\Phi}{r}\,\nu^2 = -\omega_1{}^2, \quad \omega_2{}^3 = \frac{l\Phi}{r^2}\nu^0 + \frac{\cot\theta}{r}\nu^3 = -\omega_3{}^2, \end{aligned} \tag{5}$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой.

## 6 Нарушение сферической симметрии и сингулярность кривизны

Полученные выражения позволяют, используя второе структурное уравнение Э. Картана

$$\mathrm{d}\omega_a{}^b + \omega_c{}^b\wedge\omega_a{}^c - \Omega_a{}^b = 0,$$

собрать 2-форму кривизны, и найти из нее компоненты тензора Римана, однако необходимости в это м нет, т.к. для достижения наших целей достаточно построить только некоторые из них. Наших целей три. Первая состоит в том, чтобы показать, что рассматриваемое пространство-время не обладает сферической симметрией. Вторая – в том, чтобы показать, что в нем есть линия, на которой кривизна пространства-времени имеет особеннноть. Третья – в том, чтобы показать, что тензор энергии-импульса реальной материи не может совпадать с тензором Эйнштейна, полученным из тетрады (2).

То, что рассматриваемое пространство-время не обладает сферической симметрией, видно из сравнения вкладов $l'$ в компоненты ${R_{020}}^2$ и ${R_{030}}^3$ тензора Римана . Если бы оно имело сферическую симметрию, то в данной тетраде индексы 2 и 3 были бы взаимно заменяемыми и как следствие, они были бы равны. В действительности, как видно из этих выражений, компонента ${R_{020}}^2$ вклада $l'$ не содержит, а ее вклад в в компоненту ${R_{030}}^3$ равен $-\Phi^2\left[\left(\frac{\Phi^2 l'}{r}\right)'\right]^2\cot^2\theta$. Следовательно, рассматриваемое пространство-время не обладает сферической симметрией, а источник поля в нем вообще не поддается какой-либо физической интерпретации. Рассмотренный пример показывает, что ввести объемное сферически симметричное расперделение гравимагнитного заряда невозможно.

# 7 Заключение

Тетрада (1) была построена в нашей работе [2] как наиболее общая стационарная сферически-симметричная тетрада с нарушенной пространственной четностью. Она содержит две неопределенные функции радиальной координаты $\Phi(s)$ и $r(s)$ и одну произвольную постоянную $l$. Уравнение Эйнштейна в вакуумном случае для нее сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям для этих функций и решается [2], поэтому представлялось естественным попытаться на этом же пути построить невыкууумные решения. Это исследование дало следующий результат: оказалось, что из предположения, что материя источника имеет неорицательную плотность массы, неизбежно следует вывод о нетривиальной структуре пространства-времени, а именно, оказывается, что в таком случае пространство время имеет две внешние области, соединенные кротовой норой. Поэтому была поставлена другая задача: изучить возможность построения невакуумных решений, обобщив исходную тетраду заменой постоянной $l$ еще одной функцией редиальной координаты $l(s)$. Предполагалось, что такая замена не может нарушить сферическую симметрию и поэтому обобщенная таким образом тетрада тоже задает сферически-симметричное пространство-время.

Это исследование дало два результата, причем оба отрицательные. Во-первых, оказалось, что вопреки ожиданиям, замена постоянной $l$ на функцию $l(s)$, т.е. тетрады (1) на тетраду (2) нарушает сферическую симметрию. Во-вторых, соответствующий тензор Эйнштейна не может быть равен тензору энергии-импульса какой-либо материи. Полученные результаты показывают, что изученное обощение тетрады непригодно для построения сферически-симметричных решений уравнения Эйнштейна для поля материального объекта с нарушенной пространственной четностью. Единственную возможность для этого дает исходная тетрада (1) со всеми вытекающими последствиями, прежде всего, с тем, что нарушение пространственной четности неизбежно влечет присутствие в нем кротовой норы.

# Список литературы

[1] Карл Шварцшильд (1916). "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie"[О гравитационном поле шара из несжимаемой жидкости по теории Эйнштейна]. Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften (на немецком). Берлин: 424–434.

[2] Туракулов З. Я. 2024. Симметрии и четность пространства-времени. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112986

[3] Туракулов З. Я. 2024. Векторный потенциал и локальные вращающиеся системы отсчета. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112978

[4] Туракулов З. Я. 2024. Критика теории черных дыр на примере решения Тауба-НУТ. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3113003