

# Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

## Proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function\*

© Н. М. Мусин

25 мая 2024

УДК 511

### Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  является нетривиальным нулём, то пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных  $\sigma$  и  $t$ .

Изучение одного из этих двух уравнений показало, что из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$  следует, что  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

**Ключевые слова:** гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

### Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  is a nontrivial zero, then the pair  $(\sigma_0, t_0)$  is a solution to a system of two equations of two real variables  $\sigma$  and  $t$ .

Considering one of that two equations one can find that as nontrivial zeros are symmetric about the line  $\sigma = \frac{1}{2}$  it follows that  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

**Keywords:** the Riemann hypothesis, zeta function, nontrivial zeros.

---

\*Работа выполнена без какой-либо финансовой поддержки.

# 1 Введение и постановка задачи

Пусть  $s = \sigma + it$  – комплексная переменная, где  $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$ .  
Далее,  $x \in \mathbb{R}$  – действительная переменная.

Известно [1, с. 40], что при  $\sigma > 0$  дзета-функция Римана  $\zeta(s)$  может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx. \quad (1)$$

Вывод формулы (1) имеется также в [2].

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции  $\zeta(s)$  сводится к решению уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}. \quad (2)$$

**Замечание 1.** При работе с формулой (1) в [1, с. 34] авторы определили функцию  $x^s$  для  $x > 0$  равенством  $x^s = e^{s \ln x}$ . Тогда  $x^s = x^\sigma x^{it} = x^\sigma e^{it \ln x}$ .

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}} (\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)), \\ \frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси  $\sigma$ , поэтому достаточно рассмотреть случай  $t > 0$ .

В дальнейшем изложении всегда  $0 < \sigma < 1, t > 0$ . Кроме того, некоторый нетривиальный нуль  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

## 2 О левых и правых частях уравнений системы (3)

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$

$$v_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$

$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2},$$

$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma - 1)^2 + t^2}.$$

Таким образом, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \quad (4)$$

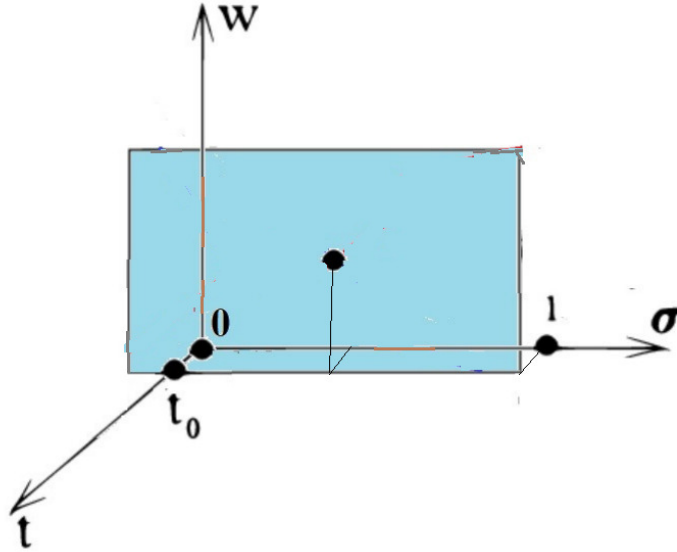


Рис. 1: Плоскость  $t = t_0$

Если  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  - нетривиальный нуль дзета-функции, то пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением системы (4) и, в частности, уравнения  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ ; в дальнейшем изложении фиксируем значение  $t = t_0 > 0$ . Далее изучаем поведение обеих частей именно этого уравнения как функции переменной  $\sigma$ ; будет показано, что из предположения  $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$  получается противоречие, поэтому изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет (выбор уравнения решался путём подбрасывания монеты; при желании доказательство можно проводить, изучая только уравнение  $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$ , схема та же самая).

**Лемма 1.** Функция  $w = v_2(\sigma, t_0)$  при фиксированном  $t_0 > 0$  возрастает как функция от переменной  $\sigma$ .

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{((\sigma - 1)^2 + t_0^2)^2} > 0.$$

□

**Следствие.** Из леммы 1 следует, что все значения функции  $w = v_2(\sigma, t_0)$  при  $\sigma \in (0; 1)$  принадлежат интервалу  $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$ .

**Определение 1.** Прямоугольник  $\left\{(\sigma, w) \mid \sigma \in (0; 1), w \in U\right\}$  будем называть критическим прямоугольником.

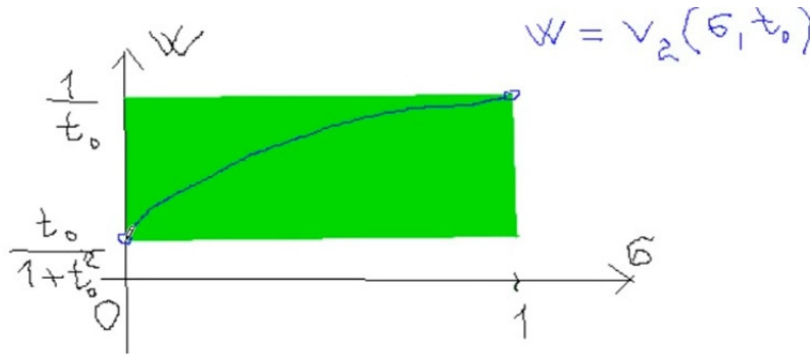


Рис. 2: Критический прямоугольник

**Замечание 2.** Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна  $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1 + t_0^2} = \frac{1}{(1 + t_0^2)t_0}$ . Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью  $t_0 = 14.134725141\dots$  получается ширина  $0.0003523461812\dots$

Далее нас интересует часть графика функции  $v_1(\sigma, t_0)$ , лежащая в этом прямоугольнике.

**Определение 2.** Значение переменной  $\sigma$ , при котором соответствующая точка  $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$  графика функции  $v_1(\sigma, t_0)$  находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.

Таким образом, значение  $\sigma_0$  является критическим значением переменной  $\sigma$ , т.к. точка  $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$  находится в критическом прямоугольнике как точка пересечения графиков функций  $v_1(\sigma, t_0)$  и  $v_2(\sigma, t_0)$ .

Если  $\sigma$  - критическое значение, то, согласно определению,  $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$ ; в частности,  $v_1(\sigma, t_0) > 0$ .

**Замечание 3.** Дзета-функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки  $s = 1$ , следовательно, она аналитична и на отрезках  $\left\{ \sigma + it \mid \sigma \in [0; 1] \right\}$  при произвольных  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , поэтому на этих отрезках, благодаря их замкнутости и ограниченности, она может иметь лишь конечное множество нулей. Отсюда следует, что множество решений уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$  также конечно на интервале  $(0; 1)$ .

**Лемма 2.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \quad (5)$$

*Доказательство.* Обозначим  $F(x)$  первообразную функции  $\frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x)$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = \int_{|u = \ln x|} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \int \sin(t_0 u) de^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \left( \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \sin(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \\ &+ \frac{t_0}{\sigma} \int e^{-\sigma u} \cos(t_0 u) du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} + \frac{t_0}{\sigma} \int -\frac{1}{\sigma} \cos(t_0 u) de^{-\sigma u} = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0}{\sigma^2} \left( \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \int e^{-\sigma u} d \cos(t_0 u) \right) = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 u) e^{-\sigma u} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 u) e^{-\sigma u} du = -\frac{1}{\sigma} \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \frac{t_0}{\sigma^2} \cos(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} - \\ &- \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \sin(t_0 \ln x) e^{-\sigma \ln x} d \ln x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} \int \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &- \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x). \end{aligned}$$

Получили равенство  $F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x)$ , следовательно,

$$F(x) + \frac{t_0^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

$$\text{Итак, } \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} - \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma}.$$

Далее,

$$\left. \frac{t_0^2 + \sigma^2}{\sigma^2} F(x) \right|_1^{+\infty} = -\left. \frac{1}{\sigma} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \right|_1^{+\infty} - \left. \frac{t_0}{\sigma^2} \frac{\cos(t_0 \ln x)}{x^\sigma} \right|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2},$$

отсюда следует, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = F(x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

□

**Замечание 4.** Если бы мы вместо равенства  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$  системы (4) выбрали равенство  $u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t)$ , то нам пришлось бы доказывать равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \cos(t_0 \ln x) dx = \frac{\sigma}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Построим функцию

$$\hat{v}_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx.$$

Лемма 2 означает, что

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Графики функций  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$  и  $v_2(\sigma, t_0)$  расположены целиком в критическом прямоугольнике и симметричны в нём друг другу относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ , пересекаясь в точке с абсциссой  $\frac{1}{2}$ .

В самом деле, функция  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$  убывает на  $[0; 1]$  от  $\frac{1}{t_0}$  до  $\frac{1}{1+t_0^2}$ , функция  $v_2(\sigma, t_0)$  возрастает на  $[0; 1]$  от  $\frac{1}{1+t_0^2}$  до  $\frac{1}{t_0}$ , при этом

$$\hat{v}_1(\sigma, t_0) = \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - (1 - \sigma))^2 + t_0^2} = v_2(1 - \sigma, t_0).$$

Равенство  $\hat{v}_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$  означает то же самое, что и  $\frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \frac{t_0}{(1 - \sigma)^2 + t_0^2}$ , откуда следует, что графики  $\hat{v}_1$  и  $v_2$  пересекаются в точке с абсциссой  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

### 3 Доказательство гипотезы Римана

**Теорема.** Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль  $s_0 = \sigma_0 + it_0$ , где  $t_0 > 0$ , то  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Согласно замечанию 3, уравнение  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$  может иметь лишь конечное множество решений. Предположим, что среди этих решений нет  $\frac{1}{2}$ , тогда среди решений, которые меньше  $\frac{1}{2}$ , возьмём наибольшее. Обозначим его  $\sigma_0$ .

Как известно, в комплексной плоскости  $(\sigma, t)$ , если точка  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка  $1 - \sigma_0 + it_0$ , то есть симметричная ей относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ , тоже является нетривиальным нулём дзета-функции, то есть,

если пара  $(\sigma_0, t_0)$  является решением уравнения  $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$ , то пара  $(1 - \sigma_0, t_0)$  тоже будет решением этого же уравнения.

Отсюда следует, что на интервале  $(\sigma_0, 1 - \sigma_0)$  нет решений уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ .

**Замечание 5.** Это означает, что дуга  $(AB)$  графика  $v_1$  целиком лежит либо ниже, либо выше дуги  $(AB)$  графика  $v_2$ .

Точка  $A(\sigma_0, v_2(\sigma_0, t_0))$  имеет ординату  $\frac{t_0}{(1 - \sigma_0)^2 + t_0^2}$ ,  
а точка  $B(1 - \sigma_0, v_2(1 - \sigma_0, t_0))$  имеет ординату  $= \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2}$ .

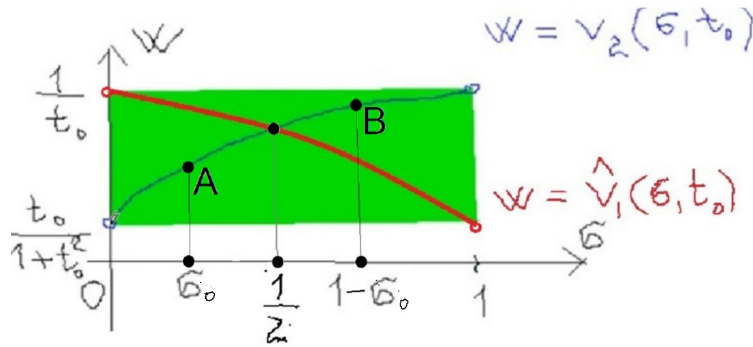


Рис. 3: Пересечение графиков  $\hat{v}_1$  и  $v_2$

Так как по построению  $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ , то точка  $A$  лежит ниже графика функции  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ , а точка  $B$  - выше.

Функция  $v_1$  непрерывна, значит, её график, проходя из точки  $A$  в точку  $B$ , пересекает график функции  $\hat{v}_1$  в некоторой точке, абсциссу которой обозначим  $\sigma_1$ .

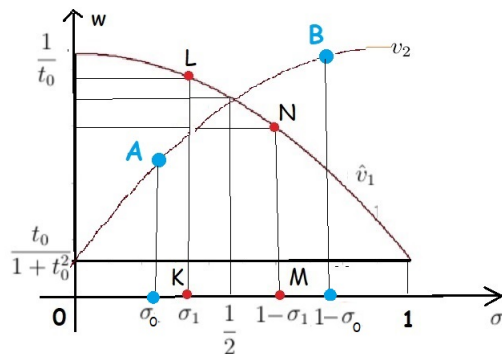


Рис. 4: Пересечение графиков  $\hat{v}_1$  и  $v_1$

**Лемма 3.** Если графики  $\hat{v}_1$  и  $v_1$  пересекаются в точке  $L(\sigma_1, t_0)$ , то они пересекутся и в точке  $N(1 - \sigma_1, t_0)$ .

*Доказательство.* Перепишем равенство 1 в виде  $\zeta(s) = -s \left( \frac{1}{1-s} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$ .

Пусть  $s = s_1$  — решение уравнения

$$\zeta(s) = -s \left( \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right), \quad (6)$$

тогда  $-s_1 \left( \frac{1}{1-s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s_1+1}} dx \right) = -s_1 \left( \frac{1}{1-s_1} + \frac{1}{s_1} \right)$ .

Далее,  $\frac{1}{1-s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s_1+1}} dx = \frac{1}{1-s_1} + \frac{1}{s_1}$ . Как видим, в полученном равенстве

правая часть при замене  $s_1 \mapsto 1-s_1$  сохраняет своё значение. Следовательно, чтобы и левая часть сохранила это значение, интеграл после замены должен принять значение  $\frac{1}{1-s_1}$ :

$$\frac{1}{s_1} + \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{(1-s_1)+1}} dx = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{1-s_1}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1, t_1) - iv_1(\sigma_1, t_0) &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + t_0^2} - i \frac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2}, \\ u_1(1-\sigma_1, t_1) - iv_1(1-\sigma_1, t_0) &= \frac{1-\sigma_1}{\sigma_1^2 + t_0^2} - i \frac{t_0}{(1-\sigma_1)^2 + t_0^2}, \text{ следовательно,} \\ v_1(\sigma_1, t_0) &= \frac{t_0}{\sigma_1^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(\sigma_0, t_0), \\ v_1(1-\sigma_1, t_0) &= \frac{t_0}{(1-\sigma_1)^2 + t_0^2} = \hat{v}_1(1-\sigma_0, t_0). \end{aligned}$$

□

Итак, согласно доказанной лемме, замена  $\sigma \mapsto 1-\sigma$  переводит точку  $A$  в точку  $B$ , а точку  $L$  в точку  $N$ , и наоборот. Следовательно, если график  $v_1$  проходит через точку  $L$ , то он проходит и через точку  $N$ , то есть получилась бы дуга графика  $ALNB$ . Но, согласно замечанию 5, это невозможно. Получилось противоречие.

Гипотеза Римана доказана. □

## 4 О функции $v_1$

Функция  $v_1(\sigma, t) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx$  оказалась полезной при доказательстве гипотезы Римана.

Обозначим  $\mathfrak{R}[a, b]$  множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ .

Нам понадобится следствие из следующей теоремы [3, с. 347]:

**Теорема** (первая теорема о среднем для интеграла). Пусть  $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Если функция  $g$  неотрицательна (или неположительна) на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \text{ где } \mu \in [m, M].$$

**Следствие.** Пусть условия теоремы о среднем выполняются для любого

$b \in [a, +\infty)$  и существует такое действительное  $B$ , что  $\int_a^b g(x)dx > 0$  при всех

$b > B$ , пусть существуют несобственные интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ , тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} g(x)dx, \text{ где } \alpha \in [m, M].$$

*Доказательство.* Согласно теореме о среднем

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu(b) \text{ при } b > B, \text{ где } \mu(b) \in [m, M].$$

Так как несобственные интегралы существуют, то при  $b \rightarrow +\infty$  существует предел левой части, а значит, существует и  $\alpha = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mu(b)$ . Так как  $\mu(b) \in [m, M]$ , то и  $\alpha \in [m, M]$ .  $\square$

Согласно следствию из первой теоремы о среднем для интеграла, для каждого  $\sigma > 0$  и, тем более, для каждого  $\sigma \in (0; 1)$  найдутся такие  $\alpha(\sigma), \beta(\sigma) \in [0; 1]$ , что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx &= \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \alpha(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \\ &= \alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}, \end{aligned}$$

(7)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} (1 + \sin(t_0 \ln x)) dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx. \quad (8)$$

Приравнивая правые части равенств 6 и 7, получаем

$$\alpha(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} = \beta(\sigma) \frac{1}{\sigma} + \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx,$$

отсюда получаем

$$\int_1^{+\infty} \{x\} \frac{\sin(t_0 \ln x)}{x^{\sigma+1}} dx = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2}.$$

Таким образом,

$$v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0). \quad (9)$$

**Замечание 6.** Пусть  $\sigma$  – критическое значение.

Пусть  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$ . Так как  $v_1(\sigma, t_0) \in U$ , то  $\frac{1}{t_0} > v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) > (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} > \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$ , следовательно,  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < \frac{1}{t_0}$ .

Если же  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$ , то  $v_1(\sigma, t_0) = (\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) > \frac{t_0}{1 + t_0^2}$ ,  $\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < (\beta(\sigma) - \alpha(\sigma)) \frac{1}{\sigma} < \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) - \frac{t_0}{1 + t_0^2} < \hat{v}_1(\sigma, t_0) < \frac{1}{t_0}$ , следовательно,  $\beta(\sigma) - \alpha(\sigma) < \frac{1}{t_0}$ .

Таким образом,  $|\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)| < \frac{1}{t_0}$ .

Возьмём какую-либо точку  $\sigma \in (0; 1)$ . Рассмотрим случаи, когда функция  $\alpha - \beta$  принимает отрицательное или нулевое значения.

1.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) < 0$ .

Из равенства 8 следует, что  $v_1(\sigma, t_0) < \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$  при всех  $\alpha \in (0; 1)$ .

2.  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) = 0$ .

Из равенства (8) следует, что  $v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) \leq \hat{v}_1(\sigma, t_0)$  при всех  $\sigma \in (0; 1)$ . При  $\alpha(\sigma) < 1$  точка  $v_1(\sigma, t_0)$  лежит ниже точки  $\hat{v}_1(\sigma, t_0)$ . При  $\alpha(\sigma) = 1$  должно выполняться и равенство  $\beta(\sigma) = 1$ . Но ведь тогда из равенства

$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \beta(\sigma) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx$  получается равенство  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx$ , которое не выполняется. Значит, равенство  $\alpha(\sigma) = 1$  не достигается, поэтому  $\alpha(\sigma) < 1$ .

Таким образом, если  $v_1$  отрицательна на каком-либо интервале, то соответствующая часть графика лежит ниже графика функции  $\hat{v}_1$ .

**Предложение.** *Функция  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$  непрерывна на  $(0; 1)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\varphi(\sigma) = \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx$ . Для

каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеем неравенство  $\int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{\sigma+1}} dx \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$ , поэтому функциональный ряд

для функции  $\varphi(\sigma)$  мажорируется рядом  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}}$  на отрезке  $[\varepsilon, 1]$  для произвольного  $\varepsilon \in (0; 1)$ , следовательно, он по признаку Вейерштрасса на этом отрезке сходится равномерно, значит, функция  $\varphi(\sigma)$  непрерывна на  $[\varepsilon, 1]$ . В силу произвольности  $\varepsilon$  функция  $\varphi(\sigma)$  непрерывна на  $(0, 1]$  и, значит, и на  $(0, 1)$ .

Функция  $\beta$  является непрерывной функцией на  $(0; 1)$ , так как, согласно определению,  $\beta(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx}$ , это отношение двух непрерывных функций, причём

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{1}{\sigma} > 0.$$

Запишем равенство (8) в виде  $\varphi(\sigma) + v_1(\sigma, t_0) = \alpha(\sigma) \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{t_0}{\sigma^2 + t_0^2} \right)$ ; выражая из него  $\alpha(\sigma)$ , устанавливаем её непрерывность, поскольку выражение в скобках непрерывно и не равно нигде нулю на  $(0; 1)$ , а функция  $v_1(\sigma, t_0)$  непрерывна как мнимая часть аналитической функции  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}$ , в соответствии с (1).  $\square$

Если графики функций  $v_1$  и  $\hat{v}_1$  пересекаются, то

$$(\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)) \frac{1}{\sigma} + \alpha(\sigma) \hat{v}_1(\sigma, t_0) = \hat{v}_1(\sigma, t_0),$$

откуда следует, что  $\alpha(\sigma) - \beta(\sigma) > 0$  на всём интервале  $(0; 1)$ .

Если гипотеза Римана верна, то графики функций  $v_1$  и  $\hat{v}_1$  пересекаются в единственной точке с абсциссой  $\sigma_0 = 0.5$  и ординатой  $\hat{v}_1(0.5) = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}$ .

Таким образом, если  $\frac{1}{2} + it_0$  — нуль дзета-функции Римана, то выполняется равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{0.25 + t_0^2}.$$

В соответствии с системой 3 выполняется равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{0.5}{0.25 + t_0^2},$$

а также и равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \cos(t_0 \ln x) dx = -\frac{1}{2t_0} \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1.5}} \sin(t_0 \ln x) dx.$$

В общем случае функция  $v_1$  ведёт себя совершенно непредсказуемо, так как вычислить параметры  $\alpha(\sigma)$  и  $\beta(\sigma)$ , от которых зависит её поведение, так, чтобы график функции  $v_1$  прошёл через точку с абсциссой  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$  нетривиального нуля, не представляется возможным.

Но, тем не менее, об этих параметрах можно кое-что сказать. Например, следующее: их можно, ради интереса, приближённо вычислить, уже зная положительную мнимую часть  $t_0$  нетривиального нуля, например,  $t_0 = 14.134725141\dots$  — наименьшая положительная мнимая часть известного нетривиального нуля.

Обозначим  $\alpha(\sigma_0)$  и  $\beta(\sigma_0)$  символами  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  соответственно.

Далее под  $\sigma_0$  всегда будет подразумеваться  $\frac{1}{2}$ .

Как указано в замечении 4, для нетривиальных нулей с большими положительными мнимыми частями эти коэффициенты очень мало отличаются друг от друга.

При  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$  выполняется равенство  $(\alpha_0 - \beta_0) \frac{1}{\sigma_0} + \alpha_0 v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$ , из которого получаем  $1.035329666\dots\alpha_0 - \beta_0 = 0.03532966658\dots$

Найдём теперь  $\beta_0$  в соответствии с равенством  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = \beta_0 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx$ .

Сначала вычислим интеграл в левой части равенства.

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx &= |x = k+t| = \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \int_0^1 \frac{k+t}{(k+t)^{\sigma+1}} dt - \int_0^1 \frac{k}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^\sigma} dt - k \int_0^1 \frac{1}{(k+t)^{\sigma+1}} dt = \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+t)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+t)^\sigma} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot (k+1)^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{(k+1)^\sigma} \right) - \left( \frac{1}{1-\sigma} \cdot k^{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{1}{k^\sigma} \right) = \\ &= \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left( \frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^{\sigma+1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{(k+1)^{1-\sigma} - k^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{k}{\sigma} \cdot \left( \frac{1}{(k+1)^\sigma} - \frac{1}{k^\sigma} \right) \right).$$

При  $\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2}$  получаем  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1-2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}$ .

При  $k = 1000000$  получаем  $\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} dx = 0.9170582237\dots$

Из равенства  $0.9170582237 = \beta_0 \cdot 2$  получаем  $\beta_0 = 0.4585291118\dots$

Теперь можем найти  $\alpha_0 = \frac{\beta_0 + 0.03532966658}{1.035329666} = 0.4770063050$ .

Попробуем теперь хотя бы приблизительно представить, как ведут себя левый и правый части уравнения  $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$ . Конечно, для этого надо бы знать значения коэффициентов  $\alpha(\sigma)$  и  $\beta(\sigma)$  при всех остальных значениях  $\sigma$ , и выражения для их вычисления приведены в этой части статьи, но они очень громоздки.

Если предположить, что  $\alpha(\sigma) \approx \alpha\left(\frac{1}{2}\right)$  и  $\beta(\sigma) \approx \beta\left(\frac{1}{2}\right)$ , то равенство (8) принимало бы приблизительно вид  $v_1(\sigma, t_0) = \frac{0.0184771932}{\sigma} + \frac{6.742353011}{\sigma^2 + 199.7904548}$ .

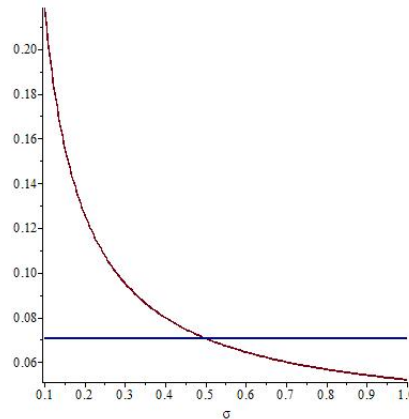


Рис. 5: Пересечение графиков  $v_1$  и  $v_2$

И это всё, что пока установлено.

## Список литературы

- [1] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, Изд-во Московского университета, М., 1984. [A. I. Galochkin, Ju. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskij, Vvedenie v teoriju chisel, Izd-vo Moskovskogo universiteta, Moscow., 1984 (In Russian)].
- [2] Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. М.:Изд-во иностранной литературы, 1953.

- [3] В . А. Зорич, Математический анализ. Часть I., 2-е изд., испр. и доп., Фазис, М., 1997; англ. пер. :V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.